

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.34
УДК 534.8: 534.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ПОЛОСОВОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АКТУАТОРА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

М.В. Голуб¹, А.Н. Шпак¹, I. Buethe², С.-Р. Fritzen²

¹Институт математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация

²Institute of Mechanics and Control Engineering – Mechatronics, University of Siegen, Germany

Моделируется динамическое поведение прямоугольного полосового пьезоэлектрического актуатора с помощью метода конечных элементов высокого порядка точности. Строится гармоническое решение в частотной области, что позволяет применить преобразование Лапласа для построения решения во временной области. В качестве аппроксимационных полиномов и тестовых функций используются полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто. Рассматривается два варианта граничных условий. В первом случае все границы пьезоактуатора свободны от напряжений, электрический потенциал задан на нижней границе, в то время как на верхней границе он равен нулю, также нулевыми являются электрические перемещения на боковых границах. Во втором случае на нижней границе приложены некоторые нормальная и касательная нагрузки, при этом на левой боковой границе пьезоактуатор жестко зажат. Составляется система линейных алгебраических уравнений относительно функций перемещений и электрического потенциала в узловых точках. Вектор-столбец правой части системы формируется в соответствии с граничными условиями из электрических потенциалов на границе, а в случае смешанных граничных условий, еще и из нормальных и касательных напряжений на нижней границе актуатора. Результаты моделирования сравниваются с результатами, полученными с помощью пакета Comsol Multiphysics: проводится сопоставление функций перемещений, напряжений, электрического потенциала и электрических перемещений, а также максимальных и минимальных значений этих величин. Анализируется поведение пьезоактуатора в зависимости от граничных условий и частоты гармонических колебаний. Рассчитываются резонансные частоты колебаний актуатора для различных граничных условий, изучаются соответствующие резонансным частотам собственные формы колебаний.

Ключевые слова: пьезоупругость, актуатор, моделирование, метод конечных элементов высокого порядка точности, среда Comsol, резонанс, гармонические колебания, электрод

HARMONIC MOTION SIMULATION AND RESONANCE FREQUENCY DETERMINATION FOR A PIEZOELECTRIC STRIP-LIKE ACTUATOR USING HIGH PRECISION FINITE ELEMENT METHOD

M. V. Golub¹, A. N. Shpak¹, I. Buethe² and C.-P. Fritzen²

¹Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

²Institute of Mechanics and Control Engineering – Mechatronics, University of Siegen, Germany

The dynamic behaviour of a strip-like rectangular piezoactuator is simulated via finite element method using high order interpolation polynomials. The governing equations are considered in the frequency domain, where a harmonic solution has a much simpler form. The Laplace transform is applied in order to obtain the non-stationary solution in time domain. Gauss–Legendre–Lobatto polynomials are used as approximation and test functions. Two different boundary-value problems are analysed. In the first case it is assumed that the piezoactuator has stress-free boundaries, the electric potential has a certain value at the bottom surface of the actuator, the upper surface is ground, and the side surfaces are free of charge. The second problem has almost the same boundary conditions, except a surface load at the bottom boundary and the clamped left boundary, which means zero displacements. The system of linear equations includes the coefficients for displacement and potential functions at finite element nodes. The vector of unknowns is composed of the values of electric potentials and of bottom surface normal and tangential stresses at the nodal points according to the boundary conditions. The model developed is compared with the COMSOL Multiphysics model. A comparison of displacements, stresses, electric potential and electric displacements has been performed. The corresponding plots and tables demonstrating the maximum and minimum values of wave-fields are provided. The dependence of the actuator behaviour on various boundary conditions and harmonic oscillation frequency has been analysed. The resonance frequencies of the actuator have been calculated, and the corresponding eigenmodes have been studied.

Key words: piezo-elasticity, actuator, simulation, high precision finite element method, Comsol medium, resonance, harmonic motion, electrode

1. Введение

В настоящее время широкое распространение получили системы мониторинга объектов в режиме online. Их основной задачей является оценка целостности объектов и, при необходимости, выявление мест локализации дефектов, а соответствующая область деятельности носит название Structural Health Monitoring или мониторинг состояния конструкции (МСК) [1]. Значительная часть методов МСК использует для неразрушающего контроля упругие волны. Для этого на этапе производства или эксплуатации в систему встраивается набор пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, способных под действием электрического поля возбуждать и принимать волновые сигналы [2]. Исследование динамического поведения пьезоактуаторов важно для развития методов автоматизированной обработки

сигналов и выявления поврежденных сенсоров в системах МСК, поскольку требуется постоянный контроль их работоспособности, а также для совершенствования самих пьезоактуаторов [3].

Моделировать динамическое воздействие актуатора, прикрепленного к протяженной конструкции, можно прямыми сеточными методами, но для их реализации из-за больших размеров объекта требуются значительные вычислительные ресурсы. В связи с этим получили распространение полуаналитические модели, в которых действие актуатора заменяется точечными сдвиговыми нагрузками [4] или описывается более простыми уравнениями [5]. В задачах идентификации отклейки или повреждения актуаторов эти модели оказываются недостаточно эффективными, и возникает необходимость в решении связанной задачи, учитывающей сложную геометрию пьезоактуатора [4].

В настоящей статье предлагается построение математической модели двумерного пьезоупругого образца (пьезоактуатора или сенсора) с помощью видоизмененного метода конечных элементов (МКЭ), который в литературе называется методом спектральных элементов [6, 7] или методом конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ) [8]. Специальный выбор узловых точек позволяет экспоненциально уменьшать ошибку аппроксимации с ростом степени интерполяционных полиномов [6–8] и получать численное решение при сравнительно небольших вычислительных затратах. Приводятся примеры расчетов колебаний используемых на практике тонких прямоугольных актуаторов. На их нижней и верхней границах задаются электрические потенциалы. Рассматриваются два случая условий на границе: отсутствие напряжений на сторонах пьезоактуатора; его заземление по одной из боковых поверхностей и приложение нагрузки. Кроме того, поскольку метод допускает «сшивку» с полуаналитическими методами [5, 9], в разделе 5 — заключении статьи, обсуждается возможность моделирования взаимодействия поврежденного актуатора с протяженными конструкциями на основе МКЭ ВПТ и полуаналитического интегрального подхода. Это позволит производить расчеты и анализ резонансных частот актуатора, что является важным в оценке целостности и работоспособности самого пьезоактуатора [10].

2. Постановка задачи

Уравнения состояния для пьезоэлектрического материала имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl} u_{k,l} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} u_{k,l} + \varepsilon_{ik} E_k.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь: σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_k — компоненты вектора перемещений, $u_{k,l}$ — компоненты тензора деформаций, E_k — компоненты вектора электрического поля, D_i — компоненты вектора электрических смещений, причем $\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi)$, φ — электрический потенциал. Свойства материала задаются тензором упругих констант C_{ijkl} , тензором констант пьезоэлектрических напряжений e_{kij} , тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik} и плотностью ρ .

Нестационарные колебания в пьезоупругом материале описываются уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},$$

которые при гармонических колебаниях $u_k(x_1, x_2, t) = u_k(x_1, x_2) e^{i\omega t}$ с круговой частотой ω принимают вид:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \omega^2 u_j, \quad (2)$$

и уравнениями электростатики

$$D_{i,i} = 0 \quad (i, j = \overline{1,2}). \quad (3)$$

В настоящей работе МКЭ ВПТ применяется для численного моделирования колебаний пьезоупругой прямоугольной области $x_1 \in [-3 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}]$, $x_2 \in [-10^{-4}, 10^{-4}]$. Рассматриваемый вариант МКЭ ВПТ может быть без особых затруднений обобщен на случай более сложных областей. Динамика пьезоупругого образца описывается уравнениями (2), (3) и одним из двух видов граничных условий (см. задачи А и Б, Рис. 1). Решения при смешанных граничных условиях и граничных условиях в напряжениях наиболее полно иллюстрируют возможности используемого конечно-элементного подхода.

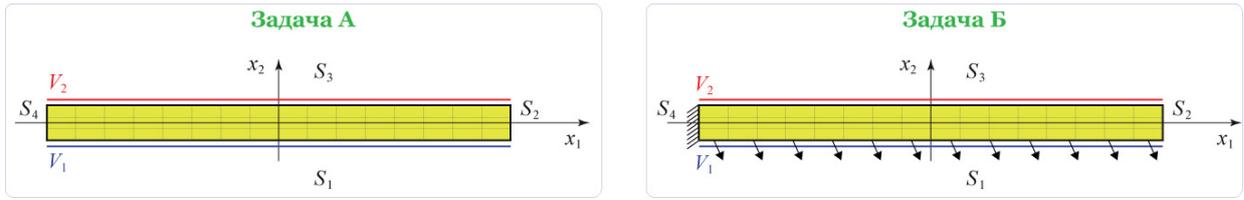


Рис. 1. Схемы к постановкам задач

Общим для обеих задач является:

– отсутствие нормальных и касательных напряжений на двух границах и приложение нагрузки $q(x)$ к нижней границе (во всех приведенных для задачи А примерах полагается $q(x) = 0$)

$$\sigma(x) \cdot n = 0, \quad x \in S_2 \cup S_3, \quad (4)$$

$$\sigma(x) \cdot n = q(x), \quad x \in S_1; \quad (5)$$

– отсутствие электрического поля на боковых границах

$$D \cdot n = 0, \quad x \in S_2 \cup S_4; \quad (6)$$

– наличие на нижней и верхней границах электрического потенциала

$$\varphi(x) = V_1, \quad x \in S_1, \quad (7)$$

$$\varphi(x) = V_2, \quad x \in S_3.$$

Здесь n — вектор нормали к поверхности актуатора.

Задачи А и Б различаются условиями на границе S_4 :

– задача А — граница S_4 предполагается свободной от напряжений

$$\sigma(x) \cdot n = 0, \quad x \in S_4; \quad (8a)$$

– задача Б — актуатор заземлен по всей границе S_4 :

$$u_{x_1} = u_{x_2} = 0, \quad x \in S_4. \quad (8б)$$

Подставив уравнения состояния (1) в уравнения движения (2), (3), домножив каждое из них на тестовую функцию и проинтегрировав по заданной области Ω , получим вариационную формулировку задачи в виде системы уравнений [6]:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^2 \sigma_{ij}(x) \right) d\Omega = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} v_j(x) \rho \frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial t^2} d\Omega, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \psi(x) \frac{\partial D_i(x)}{\partial x_i} d\Omega = 0,$$

в которой вид тестовых функций $v = \{v_1, v_2\}$ и ψ зависит от граничных условий [6]. Так, в силу (7), тестовые функции составляют: $\psi = 0, x \in S_1 \cup S_3$. В задаче А на тестовые вектор-функции v не накладываются дополнительных условий, тогда как в задаче Б $v = 0, x \in S_4$. Следует отметить, что выбирается $v(x) = v^s(x) = (\delta_{1s}, \delta_{2s}) \cdot v(x)$ ($s = 1, 2$), здесь δ_{ik} — символ Кронекера. Применив правило интегрирования по частям к уравнениям (9), запишем уравнения движения в слабой постановке с учетом свойств симметрии тензора упругих констант ($C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{kilk}$):

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] n_j dS - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] d\Omega = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} v_j^s \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} d\Omega, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^2 \oint_{\partial\Omega} \psi \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 e_{ikl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] n_i dS - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 e_{ikl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] d\Omega = 0. \quad (11)$$

3. Схема решения

В качестве базисных функций для нахождения значений неизвестных функций рассматриваются интерполяционные многочлены, строящиеся на основе полиномов Лобатто в виде [6, 11]:

$$C_i^{N+1}(x) = \gamma_i^{N+1} \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} (x - \lambda_j), \quad \gamma_i^{N+1} = \frac{(2N)!}{2^N (N!)^2 (N+1) P_N(\lambda_i)}. \quad (12)$$

Здесь нормирующие множители определяются через полиномы Лежандра $P_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dx^N} (x^2 - 1)^N$. При этом узловые точки λ_k являются нулями полинома $(x-1)^2 L_N(x)$, где $L_N(x) = \frac{d}{dx} P_{N+1}(x)$ — полиномы Лобатто. Интерполяционные полиномы (12) обладают тем важным свойством, что их значения равны нулю во всех узловых точках $\lambda_k \neq \lambda_i$, иначе говоря, $C_i^{N+1}(\lambda_j) = \delta_{ij}$.

Для решения задачи область Ω разбивается на прямоугольные элементы (на M_1 элементов по оси x_1 и на M_2 элементов по оси x_2):

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}].$$

Поскольку интерполяционные полиномы (12) являются ортогональными только на отрезке $[-1, 1]$, то требуется преобразование координат, которое переводит каждую из подобластей в прямоугольник $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \xi_i^{l_i} &= \frac{2x_i - x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}, & x_i &= \frac{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}{2} \xi_i^{l_i} + \frac{x_i^{l_i+1} + x_i^{l_i}}{2}, \\ \frac{d}{dx_i} &= S_i^{l_i} \frac{d}{d\xi_i^{l_i}}, & S_i^{l_i} &= \frac{2}{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}} \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Соответственно, функции u_j , φ отыскиваются в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \{u_k\}_{k=1}^2 = \left\{ \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \right\}_{k=1}^2, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \varphi^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}). \end{aligned} \quad (14)$$

В пределах элементов используются тестовые функции

$$\begin{aligned} v_i^s(\mathbf{x}) &= \delta_{is} C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}) \quad (t_1 \in \overline{1, M_1}), \\ \psi(\mathbf{x}) &= C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}) \quad (t_2 \in \overline{1, M_2}). \end{aligned} \quad (15)$$

При элементах более сложной геометрии для преобразования координат необходимо прибегать к определителю Якоби.

Так как тестовые функции выбираются в соответствии с граничными условиями, то для задачи А при составлении системы относительно неизвестных значений перемещений и потенциала в узловых точках индексы принимают значения $p_1, p_2 \in \overline{1, N+1}$, $t_1 \in \overline{1, M_1}$, $t_2 \in \overline{1, M_2}$. В задаче Б для удовлетворения граничных условий (8б) необходимо выполнить дополнительное условие $v_i^s = 0$ при $p_2 = 1$, $t_2 = 1$. Полученная после подстановки (14) в уравнения (10), (11) и соответствующих преобразований разрешающая система уравнений приводится к виду: $A_1 \mathbf{u} = \mathbf{f}_1$, где для удобства принято: $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \varphi\}$. Ниже подробно рассматривается преобразование одного из интегралов системы (10) после подстановки в нее представлений (14), (15):

$$-\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x) d\Omega =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[C_{i1k1} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} \int_{x_2^k}^{x_2^{k+1}} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_1}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_1}(x) dx_1 dx_2 + C_{i1k2} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} \int_{x_2^k}^{x_2^{k+1}} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_1}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2 + \right. \\
 &\quad \left. + C_{i2k1} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} \int_{x_2^k}^{x_2^{k+1}} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_2}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_1}(x) dx_1 dx_2 + C_{i2k2} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} \int_{x_2^k}^{x_2^{k+1}} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_2}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2 \right] = \\
 &= -\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \delta_{is} \left[C_{i1k1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_1^i \frac{\partial}{\partial \xi_1^i} (C^{p_1}(\xi_1^i) C^{p_2}(\xi_2^i)) S_1^i \frac{\partial}{\partial \xi_1^i} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^i) C^{i_2}(\xi_2^i) \right) \frac{d\xi_1^i d\xi_2^i}{S_1^i S_2^i} + \right. \\
 &\quad + C_{i1k2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_1^i \frac{\partial}{\partial \xi_1^i} (C^{p_1}(\xi_1^i) C^{p_2}(\xi_2^i)) S_2^i \frac{\partial}{\partial \xi_2^i} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^i) C^{i_2}(\xi_2^i) \right) \frac{d\xi_1^i d\xi_2^i}{S_1^i S_2^i} + \\
 &\quad + C_{i2k1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_2^i \frac{\partial}{\partial \xi_2^i} (C^{p_1}(\xi_1^i) C^{p_2}(\xi_2^i)) S_1^i \frac{\partial}{\partial \xi_1^i} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^i) C^{i_2}(\xi_2^i) \right) \frac{d\xi_1^i d\xi_2^i}{S_1^i S_2^i} + \\
 &\quad \left. + C_{i2k2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_2^i \frac{\partial}{\partial \xi_2^i} (C^{p_1}(\xi_1^i) C^{p_2}(\xi_2^i)) S_2^i \frac{\partial}{\partial \xi_2^i} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^i) C^{i_2}(\xi_2^i) \right) \frac{d\xi_1^i d\xi_2^i}{S_1^i S_2^i} \right] = \\
 &= -\sum_{k=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[C_{i1k1} \frac{S_1^i}{S_2^i} \int_{-1}^1 \frac{\partial C^{p_1}(\xi_1^i)}{\partial \xi_1^i} \frac{\partial C^{i_1}(\xi_1^i)}{\partial \xi_1^i} d\xi_1^i \int_{-1}^1 C^{p_2}(\xi_2^i) C^{i_2}(\xi_2^i) d\xi_2^i + \right. \\
 &\quad + C_{i1k2} \int_{-1}^1 \frac{\partial C^{p_1}(\xi_1^i)}{\partial \xi_1^i} C^{i_1}(\xi_1^i) d\xi_1^i \int_{-1}^1 C^{p_2}(\xi_2^i) \frac{\partial C^{i_2}(\xi_2^i)}{\partial \xi_2^i} d\xi_2^i + \\
 &\quad + C_{i2k1} \int_{-1}^1 C^{p_1}(\xi_1^i) \frac{\partial C^{i_1}(\xi_1^i)}{\partial \xi_1^i} d\xi_1^i \int_{-1}^1 \frac{\partial C^{p_2}(\xi_2^i)}{\partial \xi_2^i} C^{i_2}(\xi_2^i) d\xi_2^i + \\
 &\quad \left. + C_{i2k2} \frac{S_2^i}{S_1^i} \int_{-1}^1 C^{p_1}(\xi_1^i) C^{i_1}(\xi_1^i) d\xi_1^i \int_{-1}^1 \frac{\partial C^{p_2}(\xi_2^i)}{\partial \xi_2^i} \frac{\partial C^{i_2}(\xi_2^i)}{\partial \xi_2^i} d\xi_2^i \right]. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Входящие в уравнение (16) интегралы вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса [11], использующих в качестве узлов точки λ_k :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(\lambda_k),$$

где весовые коэффициенты w_k определяются согласно выражению:

$$w_k = \frac{2}{N(N+1)(P_N(\lambda_k))^2}.$$

При этом производные от интерполяционных полиномов C_i^{N+1} в узловых точках λ_k вычисляются по простым формулам:

$$\frac{dC_{N+1}^i(\lambda_k)}{dx} = D_{ki} = \begin{cases} -\frac{N(N+1)}{4} & (i = k = 1), \\ \frac{N(N+1)}{4} & (i = k = N+1), \\ 0 & (1 < i = k < N+1), \\ \frac{L_N(\lambda_k)}{L_N(\lambda_i)(\lambda_k - \lambda_i)} & (1 < i \neq k < N+1). \end{cases} \tag{17}$$

Учитывая преобразование координат (13), формулы (17) и квадратурные формулы, уравнение (16) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{k=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[C_{i1k1} \frac{S_1^i}{S_2^i} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} + C_{i1k2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} + \right. \\
 &\quad \left. + C_{i2k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} + C_{i2k2} \frac{S_2^i}{S_1^i} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right].
 \end{aligned}$$

Интеграл по контуру из уравнения (10) преобразуется следующим образом. Подставляя в (10) граничные условия (4), (5) и (8), а также тестовые функции (15), нетрудно получить его нулевые значения для всех границ, кроме S_1 . Поскольку на границе S_1 нормаль $\mathbf{n} = \{0; -1\}$, то контурный интеграл с учетом условий (5) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{i=1}^2 \int_{S_1} v_i^s(\mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) dS_1 = -\sum_{i=1}^2 \delta_{is} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} C^{p_1}(\xi_1^i) C^{p_2}(\xi_2^i) q_i(\mathbf{x}) \frac{d\xi_1^i}{S_1^i} \Big|_{x_2=c} = \\
 & = -\frac{1}{S_1^i} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} C^{p_2}(c) \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} \delta_{k_1 p_1} q_i(\lambda_{k_1}, c) = -\frac{1}{S_1^i} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \delta_{1 p_2} w_{p_1} q_i(\lambda_{k_1}, c).
 \end{aligned}$$

Наконец, для правой части уравнения (2) $\forall s = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} v_j^s(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(\mathbf{x}) d\Omega = -\sum_{j=1}^2 \rho \omega^2 \int_{\Omega} v_j^s u_j(\mathbf{x}) d\Omega = \\
 & = -\sum_{j=1}^2 \rho \omega^2 \delta_{js} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} \int_{x_2^i}^{x_2^{i+1}} C^{p_1}(\xi_1^i) C^{p_2}(\xi_2^i) \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_j^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^i) C^{i_2}(\xi_2^i) \frac{d\xi_1^i d\xi_2^i}{S_1^i S_2^i} = \\
 & = -\sum_{j=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_j^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{js} \rho \omega^2 w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2}.
 \end{aligned}$$

Прочие интегралы в уравнениях (10), (11) перестраиваются таким же образом. В итоге получается система линейных алгебраических уравнений с вектором-столбцом неизвестных, состоящих из значений вектора перемещений \mathbf{u}_j и функции электрического потенциала ϕ в узловых точках λ_k , определяемых с использованием точек Гаусса–Лежандра–Лобатто. Удовлетворение граничных условий (7) осуществляется путем прямого задания значений $\phi^{i_1 i_1}$ и $\phi^{i_1 N+1 i_1 M_2}$ на границах S_1 и S_3 . Иначе говоря, строки матрицы системы, относящиеся к узловым точкам на границах S_1 и S_3 , заполняются нулями за исключением диагонального элемента, который приравняется единице, а в правой части стоит значение из (7). Полная система линейных алгебраических уравнений принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & (\delta_{k_1} + \delta_{k_2}) \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[\begin{aligned}
 & -\frac{S_1^i}{S_2^i} C_{i1k_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} - C_{i1k_2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} - \\
 & -C_{i2k_1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} - \frac{S_2^i}{S_1^i} C_{i2k_2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}
 \end{aligned} \right] + \\
 & + \frac{1}{S_1^i S_2^i} \rho \omega^2 \delta_{is} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2}
 \end{aligned} \right\} + \\
 & + \delta_{k_3} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left(\begin{aligned}
 & -\frac{S_1^i}{S_2^i} e_{i11} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} - e_{2i1} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} - \\
 & -e_{i12} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} - \frac{S_2^i}{S_1^i} e_{2i2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_1^i} \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{i_2 1} w_{p_1} q_i(x_1^{p_1}, c). \\
 & \left. \left\{ \begin{aligned}
 & (\delta_{k_1} + \delta_{k_2}) \left(\begin{aligned}
 & -\frac{S_1^i}{S_2^i} e_{1k_1} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} - e_{1k_2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} - \\
 & -e_{2k_1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} - \frac{S_2^i}{S_1^i} e_{2k_2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}
 \end{aligned} \right) + \\
 & + \delta_{k_3} \left(\begin{aligned}
 & \frac{S_1^i}{S_2^i} \varepsilon_{11} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} + \varepsilon_{12} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} + \\
 & + \varepsilon_{21} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} + \frac{S_2^i}{S_1^i} \varepsilon_{22} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2}
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Для сшивки решения на гранях элементов необходимо, чтобы, во-первых, на всех элементах интерполяционные полиномы имели одинаковую степень и, во-вторых, значения коэффициентов,

относящихся к одной и той же точке, совпадали. На практике это условие реализуется с помощью специального индекса [11]:

$$I = (s - 1)(M_1 N + 1)(M_2 N + 1) + (p_1 - 1)(M_2 N + 1) + (M_2 N + 1)N(l_1 - 1) + N(l_2 - 1) + p_2.$$

4. Численный анализ

Во всех приведенных ниже примерах рассматривался пьезоактуатор из материала PIC 155 производства PI Ceramic GmbH (Германия). Для верификации модели применялся коммерческий пакет Comsol Multiphysics 4.4 с включением модуля Structural Mechanics Module. Далее приводятся некоторые результаты, полученные по предлагаемой модели, и для сравнения — тестовые в среде Comsol. Все приведенные ниже результаты получены при $V_1 = 50$ В, $V_2 = 0$ В, $q_1 = -5$ Н/м², $q_2 = -10$ Н/м² и пьезоактуаторе размерами 6 мм на 0,2 мм из материала PIC 155. На рисунках 2–4 и в таблицах 1–2 представлены данные для задачи А, на рисунках 5–8 и в таблице 2 — для задачи Б. На рисунке 2 приведены графики перемещений, напряжений и электрического потенциала на частоте $f = 180$ кГц, рассчитанные МКЭ ВПТ с использованием одного элемента, если не указано иное (частота связана с круговой частотой соотношением $2\pi f = \omega$). На рисунке 2, а также на некоторых последующих рисунках значения величин отображаются цветом, причем более темные области соответствуют минимальным значениям, а светлые — максимальным. Видно, что граничные условия (4)–(8а) удовлетворяются, а поведение перемещений близко к линейному (исключение составляют резонансные частоты), что подтверждается расчетами в среде COMSOL. Следовательно, для сопоставления результатов по авторской модели и тестовых достаточно оценить максимальные и минимальные значения вектора перемещений u_i , что можно сделать, обратившись к таблице 1. На низких частотах имеет место хорошее совпадение результатов, однако с ростом частоты наблюдается небольшое расхождение, говорящее о необходимости дискретизации расчетной области большим количеством элементов.

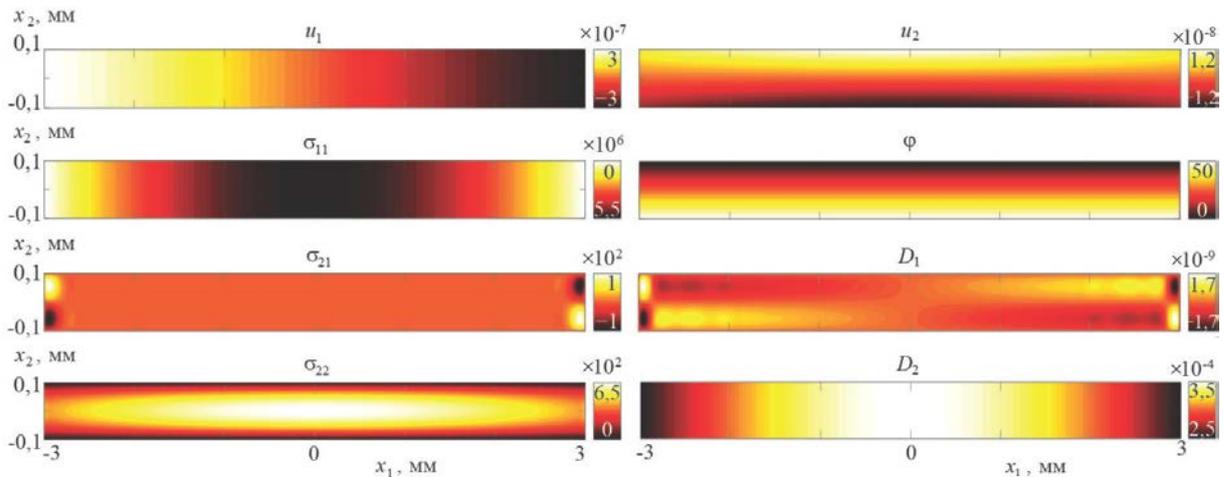


Рис. 2. Задача А: перемещения, напряжения, вектор электрического поля и электрические смещения, рассчитанные МКЭ ВПТ на частоте $f = 180$ кГц

Таблица 1. Минимальные и максимальные значения перемещений на разных частотах в задаче А

Частота		1 кГц	60 кГц	100 кГц	180 кГц	500 кГц	1000 кГц
max u_1	МКЭ ВПТ	1,77e-7	1,86e-7	2,04e-7	3,25e-7	5,75e-8	2,95e-8
	COMSOL	1,77e-7	1,86e-7	2,04e-7	3,25e-7	5,75e-8	2,91e-8
min u_1	МКЭ ВПТ	-1,77e-7	-1,84e-7	-2,04e-7	-3,25e-7	-5,75e-8	-2,95e-8
	COMSOL	-1,77e-7	-1,86e-7	-2,04e-7	-3,25e-7	-5,75e-8	-2,91e-8
max u_2	МКЭ ВПТ	7,86e-9	8,17e-9	8,82e-9	1,32e-8	7,89e-9	8,50e-9
	COMSOL	7,86e-9	8,17e-9	8,82e-9	1,32e-8	7,90e-9	8,02e-9
min u_2	МКЭ ВПТ	-7,86e-9	-8,17e-9	-8,82e-9	-1,32e-8	-7,89e-9	-8,50e-9
	COMSOL	-7,86e-9	-8,17e-9	-8,82e-9	-1,32e-8	-7,9e-9	-8,02e-9

Рисунок 3 иллюстрирует распределения напряжений в задаче А вдоль срединного среза, где $x_2 = 0$, рассчитанные с использованием обоих подходов, на частотах 100 и 500 кГц. Нетрудно видеть, что МКЭ ВПТ дает более гладкую аппроксимацию тензора напряжений, что объясняется более точным вычислением производных. Аналогичное сравнение выполнено и для задачи Б.

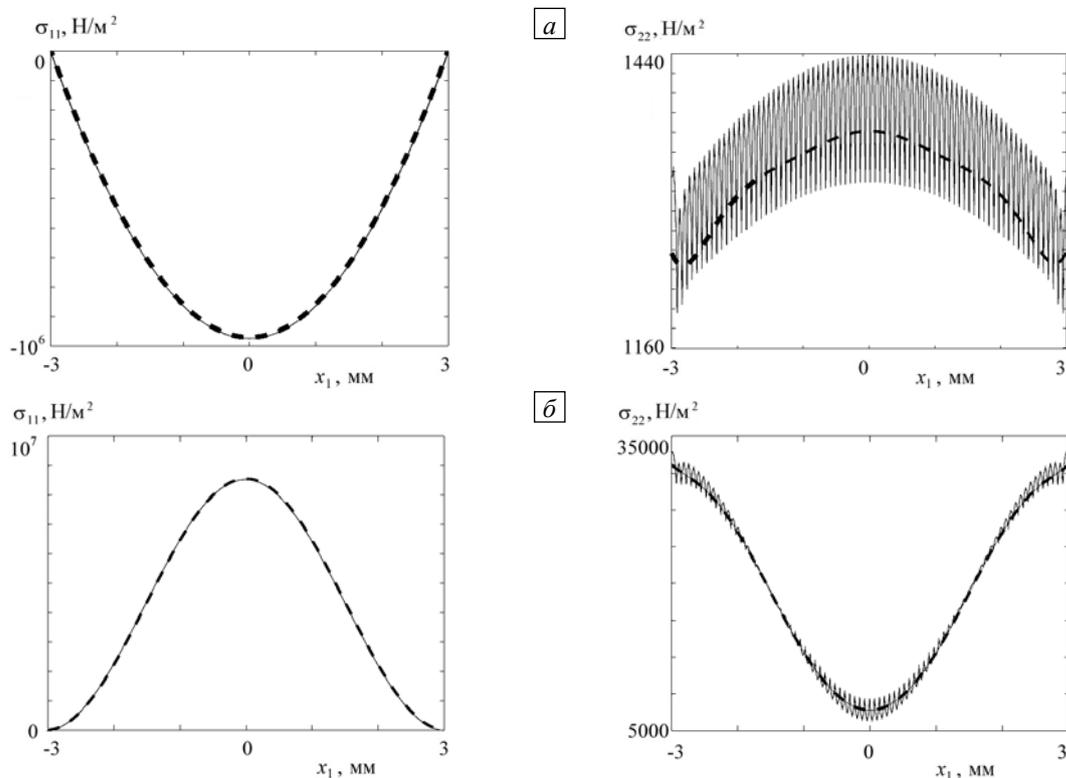


Рис. 3. Задачи А: напряжения при частоте 100 кГц (а) и 500 кГц (б), рассчитанные МКЭ ВПТ (пунктирная линия) и в среде COMSOL (сплошная линия)

На рисунке 4 представлены графики перемещений и напряжений на частоте 100 кГц с приложенными к нижней стороне актуатора нормальной ($q_2 = -10 \text{ Н/м}^2$) и касательной нагрузками ($q_1 = -5 \text{ Н/м}^2$) соответственно (задача Б). Можно отметить, что минимумы и максимумы функций перемещений практически совпадают: по координате x_1 — $-3,7 \cdot 10^{-7}$ и 0 (МКЭ ВПТ) и $-3,7 \cdot 10^{-7}$ и 0 (COMSOL); по координате x_2 — $-8,24 \cdot 10^{-9}$ и $-8,38 \cdot 10^{-9}$ (МКЭ ВПТ) и $-8,75 \cdot 10^{-9}$ и $-8,75 \cdot 10^{-9}$ (COMSOL).

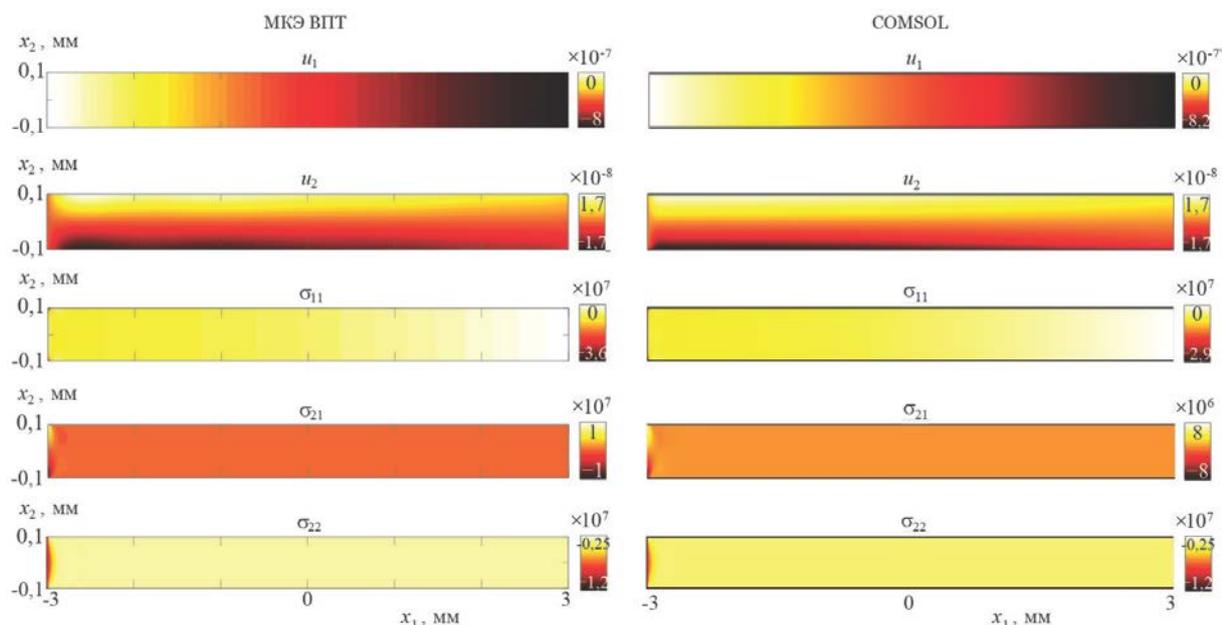


Рис. 4. Задача Б: перемещения и напряжения при частоте колебаний 100 кГц с нагрузкой, рассчитанные МКЭ ВПТ (слева) и в среде COMSOL (справа)

Таблица 2. Резонансные частоты, вычисленные по авторской модели (МКЭ ВПТ) и в среде COMSOL

Номер частоты f	Задача А		Задача Б		
	МКЭ ВПТ, 1 элемент	COMSOL, $80 \times 6 = 480$ элементов	МКЭ ВПТ, 1 элемент	COMSOL,	
				$80 \times 6 = 480$ элементов	$17 \times 3 = 51$ элемент
Значение резонансной частоты f , кГц					
1-я			3,264 к	3,254	3,260
2-я	20,622	20,622	20,331	20,270	20,312
3-я	56,378	56,380	56,386	56,226	56,377
4-я	107,366	109,230	109,075	108,728	109,131
5-я	177,975	177,834	127,358	127,295	127,226
6-я	253,414	253,414	175,578	176,795	177,720

Предлагаемая модель позволяет находить резонансные частоты актуатора в задачах с различными граничными условиями при равенстве нулю определителя матрицы левой части в (18). Аналогичный анализ проводился и в среде COMSOL при разном количестве элементов. Результаты применения обоих подходов сведены в таблицу 2 и свидетельствуют, что они достаточно близки; расхождение между ними также растет с увеличением частоты.

Для иллюстрации того факта, что оба метода позволяют устанавливать резонансную частоту, соответствующую одному и тому же режиму колебаний, приведен рисунок 5 — поля перемещений на 3-й резонансной частоте для задачи Б. При том, что значения 3-й резонансной частоты f расходятся на несколько десятков герц, картины качественно совпадают. Кроме того, резонансные частоты находятся из условий равенства нулю определителя матрицы системы, поэтому при численных расчетах в некоторых ситуациях собственные формы колебаний совпадают с точностью до знака величины.

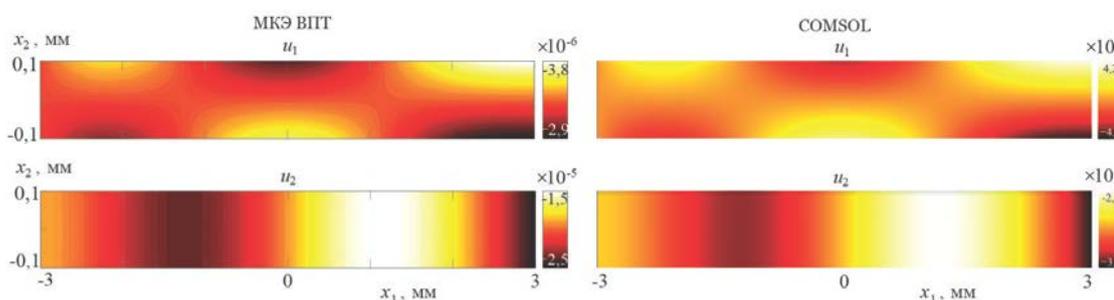


Рис. 5. Задача Б: перемещения на 3-й резонансной частоте $f = 56,386$ кГц (МКЭ ВПТ, слева) и $f = 56,226$ кГц (COMSOL, справа)

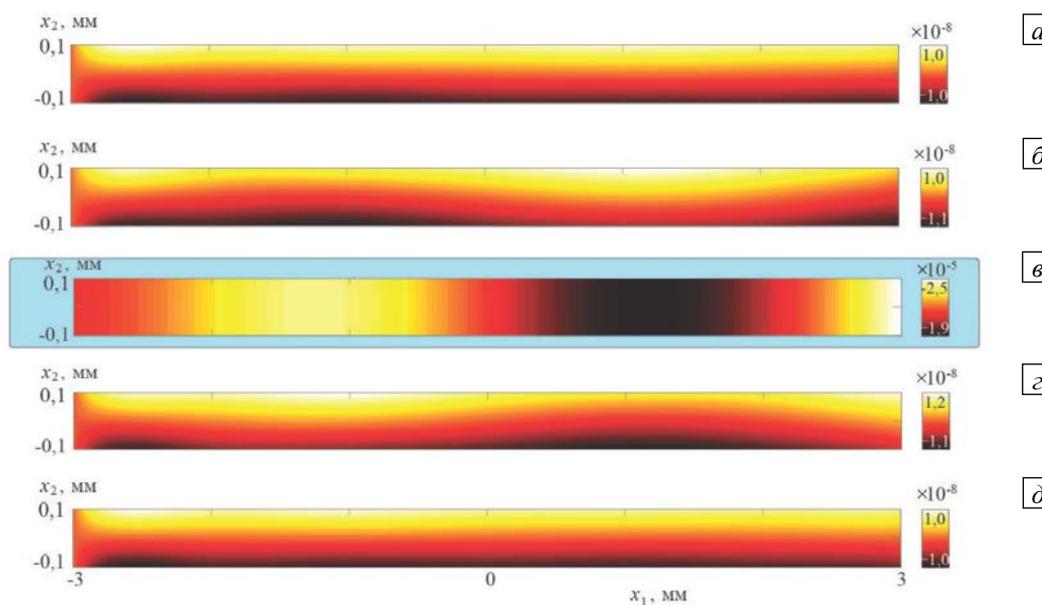


Рис. 6. Задача Б: вертикальные перемещения u_2 , вычисленные МКЭ ВПТ при частотах, близких к 3-й резонансной частоте, f , кГц: 55,000 (а); 56,180 (б); 56,386 (в); 56,580 (г); 58,000 (д)

Для более детального анализа резонансных частот МКЭ ВПТ были рассмотрены собственные формы колебаний (поля перемещений) на частотах, близких к 3-й резонансной частоте (выделена в таблице 2 и на рисунке б). На рисунке б видно, что было ожидаемо, значительное изменение в поведении пьезоактуатора при непосредственной близости к резонансной частоте и возрастание амплитуды колебаний на несколько порядков. Для прочих резонансных частот также наблюдается рост амплитуд и существенное изменение характера их распределения. Указанный анализ может быть полезен при идентификации поврежденных актуаторов путем их «прозванивания» на различных частотах и обнаружения резонансных частот, зависящих от характера повреждения.

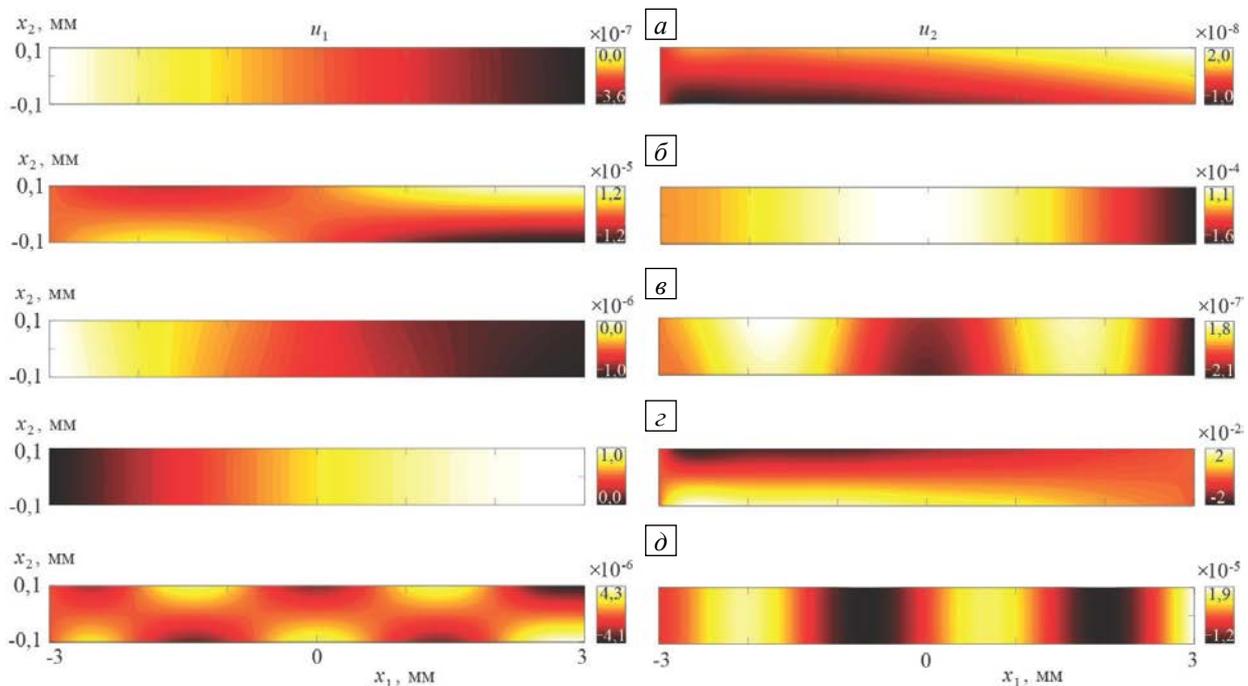


Рис. 7. Задача Б – перемещения u_1 (слева) и u_2 (справа), вычисленные МКЭ ВПТ для 1-й ($f = 3,264$ кГц) (а), 2-й ($f = 20,331$ кГц) (б), 4-й ($f = 109,075$ кГц) (в), 5-й ($f = 127,358$ кГц) (г), 6-й ($f = 177,080$ кГц) (д) резонансных частот

5. Заключение

Представлена математическая модель для описания прямоугольного полосового пьезоэлектрического актуатора, построенная на основе метода конечных элементов высокого порядка точности в частотной области. Проведен анализ поведения актуатора при различных граничных условиях и достаточно широком диапазоне частот, рассчитаны его резонансные частоты. Произведена верификация модели путем сравнения результатов расчетов по ней с результатами, полученными при решении аналогичной задачи для актуатора в коммерческой среде COMSOL. Сопоставлялись общий вид и конкретные значения функций перемещений, напряжений и электрического потенциала.

Предполагается, что в дальнейшем одним из основных приложений обсуждаемой модели будет ее включение в создаваемые смешанные или гибридные модели, а также разработка на их основе алгоритмов для выявления и оценки степени поврежденности актуатора. Настоящая модель будет интегрироваться в более математически сложную компьютерную модель, способную описывать взаимодействие пьезоэлектрической накладки с многослойной композитной подложкой. При этом пьезоактуатор будет моделироваться так же, как это сделано здесь — с помощью МКЭ ВПТ, а подложка — с использованием интегрального подхода, как в [5, 9]. Преимущество такого подхода заключается в простоте и эффективности учета отслоившегося актуатора или актуатора с частичным электродированием [12]. При этом область отслоения может быть сложной, в то же время волновые колебания в дальнейшей от актуатора зоне, наиболее интересной с практической точки зрения, будут определяться с привлечением более эффективного в этом случае полуаналитического интегрального подхода [5, 9]. Подобный подход обуславливается необходимостью изучения влияния поврежденных пьезоактуаторов на систему мониторинга состояния конструкции и достоверность выдаваемых ею данных. Надежная математическая и компьютерная модель позволит, во-первых, произвести анализ динамики поврежденных актуаторов в зависимости от размера, геометрии и местоположения отслоения (повреждения), и, во-вторых, разработать индекс работоспособности актуаторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-08-00370 и 13-01-96516-р_юг).

Литература

1. Giurgiutiu V. *Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors*. – Elsevier Academic Press, 2007. – 740 p.
2. *New trends in structural health monitoring* / Ed. by W. Ostachowicz, A. Güemes. – Springer Verlag Wien, 2013. – 427 p. DOI
3. Taylor S.G., Park G., Farinholt K.M., Todd M.D. Diagnostics for piezoelectric transducers under cyclic loads deployed for structural health monitoring applications // *Smart Mater. Struct.* – 2013. – Vol. 22, no. 2. – 025024. DOI
4. Moll J., Golub M.V., Glushkov E., Glushkova N., Fritzen C.-P. Non-axisymmetric Lamb wave excitation by piezoelectric wafer active // *Sensors Actuat. A-Phys.* – 2012. – Vol. 130. – P. 173-180. DOI
5. Glushkov E., Glushkova N., Kvasha O., Seemann W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate // *Smart Mater. Struct.* – 2007. – Vol. 16, no. 3 – P. 650-664. DOI
6. Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sánchez-Sesma F.J. The spectral element method for elastic wave equations – application to 2-D and 3-D seismic problems // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1999. – Vol. 45, no. 9. – P. 1139-1164. DOI
7. Ostachowicz W., Kudela P., Krawczuk M., Zak A. *Guided waves in structures for SHM: The time-domain spectral element method*. – Polish Academy of Sciences, Institute of Fluid Flow Machinery, 2012. – 337 p. DOI
8. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion // *J. Comput. Phys.* – Vol. 54, no. 3. – P. 468-488. DOI
9. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2011. – Vol. 129. – P. 2923-2934. DOI
10. Golub M.V., Shpak A.N., Buehe I., Fritzen C.-P., Jung H., Moll J. Continuous wavelet transform application in diagnostics of piezoelectric wafer active sensors // *Proc. of the International Conference "Days on Diffraction"*, Saint-Petersburg, May 27-31, 2013. – P. 59-64. DOI
11. Бубенчиков А.М., Попонин В.С., Мельникова В.Н. Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов // *Вест. Том. гос. ун-та. Математика и механика*. – 2008. – № 3. – С. 70-76.
12. Акопьян В.А., Наседкин А.В., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н. Влияние геометрии и способов подключения электродов на электромеханические характеристики перестраиваемых по частоте дисковых пьезоэлементов // *Дефектоскопия*. – 2006. – № 5. – С. 63-72. (English version DOI).

References

1. Giurgiutiu V. *Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors*. Elsevier Academic Press, 2007. 740 p.
2. *New trends in structural health monitoring*, ed. by W. Ostachowicz, A. Güemes. Springer Verlag Wien, 2013. 427 p. DOI
3. Taylor S.G., Park G., Farinholt K.M., Todd M.D. Diagnostics for piezoelectric transducers under cyclic loads deployed for structural health monitoring applications. *Smart Mater. Struct.*, 2013, vol. 22, no. 2, 025024. DOI
4. Moll J., Golub M., Glushkov E., Glushkova N., Fritzen C.-P. Non-axisymmetric Lamb wave excitation by piezoelectric wafer active sensors. *Sensors Actuat. A-Phys.*, 2012, vol. 130, pp. 173-180. DOI
5. Glushkov E., Glushkova N., Kvasha O., Seemann W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate. *Smart Mater. Struct.*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 650-664. DOI
6. Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sánchez-Sesma F.J. The spectral element method for elastic wave equations – application to 2-D and 3-D seismic problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1999, vol. 45, no. 9, pp. 1139-1164. DOI
7. Ostachowicz W., Kudela P., Krawczuk M., Zak A. *Guided waves in structures for SHM: The time-domain spectral element method*. Polish Academy of Sciences, Institute of Fluid Flow Machinery, 2012. 337 p. DOI
8. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, vol. 54, no. 3, pp. 468-488. DOI
9. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 129, pp. 2923-2934. DOI
10. Golub M.V., Shpak A.N., Buehe I., Fritzen C.-P., Jung H., Moll J. Continuous wavelet transform application in diagnostics of piezoelectric wafer active sensors. *Proc. of the International conference "Days on Diffraction"*, Saint-Petersburg, May 27-31, 2013, pp. 59-64. DOI
11. Bubenchikov A.M., Poponin V.S., Melnikova V.N. The mathematical statement and solution of spatial boundary value problems by means of spectral element method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Bulletin of Tomskiy State University. Mathematics and Mechanics*, 2008, no. 3, pp. 70-76.
12. Akopyan V.A., Nasedkin A.V., Rozhkov E.V., Solov'ev A.N., Shevtsov S.N. Influence of the geometry and connection of electrodes on electromechanical characteristics of frequency-tuned disk piezoelectric elements. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2006, vol. 42, no. 5, pp. 334-339. DOI

Поступила в редакцию 10.07.2015; опубликована в электронном виде 30.12.2015

Сведения об авторах

Голуб Михаил Владимирович, кфмн, внс, Институт математики, механики и информатики Кубанского Государственного Университета (ИММИ КубГУ), 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149; e-mail: m_golub@inbox.ru

Шпак Алиса Николаевна, асп., мнс, ИММИ КубГУ; e-mail: alisashpak7@gmail.com

Buehe Inka, Universität Siegen, Paul-Bonatz-Straße 9-11, Department Maschinenbau, Siegen, 57068, Deutschland; e-mail: inka.buehe@uni-siegen.de

Fritzen Claus-Peter, Prof. Dr.-Ing., Universität Siegen; e-mail: claus-peter.fritzen@uni-siegen.de