DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.33
УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТИПА НАЧАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Ю.В. Астапов, Д.В. Христич

Тульский государственный университет, Тула, Российская Федерация

Для материала, в дополнение к известному определению главных осей анизотропии, вводится понятие канонических осей анизотропии как осей декартовой прямоугольной системы координат, в которой тензоры упругих свойств материала имеют наименьшее число независимых ненулевых компонент. Разработана программа экспериментов, дающая возможность установить канонические оси в материалах с различным типом анизотропии. При этом для поиска положения главных осей предлагается выполнить три эксперимента на одноосное сжатие. Выявлено, что у ромбического, моноклинного и триклинного материалов канонические оси анизотропии совпадают с главными осями анизотропии. Для тригонального, тетрагонального и гексагонального материалов однозначно находятся одна главная ось анизотропии – главная поворотная ось, и совпадающая с ней каноническая ось анизотропии. Для отыскания ориентации двух других канонических осей анизотропии требуется еще два эксперимента: на растяжение–сжатие и сдвиг в плоскости, перпендикулярной главной поворотной оси. В кубическом материале главные оси анизотропии выбираются совпадающими с осями лабораторной системы координат. Для конкретизации положения канонических осей анизотропии относительно осей лабораторной системы оказывается достаточным знание результатов двух экспериментов на одноосное сжатие.

Разработана программа механических экспериментов для распознания типа начальной упругой анизотропии материала по данным опытов в канонических осях анизотропии в случае, когда эти оси совпадают с осями лабораторной системы координат. Для того чтобы отличить изотропный материал от кубического, необходимо провести эксперимент на двухосное растяжение–сжатие по направлениям любых двух лабораторных осей и эксперимент на сдвиг в содержащей их плоскости. Такие же два эксперимента в плоскости, перпендикулярной главной поворотной оси, позволяют выделить тригональный, тетрагональный и гексагональный материалы. Выполненное компьютерное моделирование задач по идентификации типа начальной упругой анизотропии материала, аналогичных экспериментам, подтвердило работоспособность предложенных программ экспериментов.

Ключевые слова: анизотропные материалы, главные оси анизотропии, программа механических экспериментов, численный эксперимент, моделирование

NUMERICAL MODELING OF EXPERIMENTS BY DETECTING OF INITIAL ANISOTROPY TYPE OF ELASTIC MATERIALS

Yu.V. Astapov and D.V. Khristich

Tula State University, Tula, Russian Federation

In addition to a well-known term of the main axes of anisotropy of material a term of the canonical axes of anisotropy of material as the axes of a Cartesian rectangular coordinate system, in which tensors of elastic properties have the least number of non-zero independent components, is introduced. An experimental program, which allows one to establish the position of the canonical axes of anisotropy in the material, is developed. For definition of the position of the main axes of anisotropy it is necessary to perform three uniaxial compression experiments. For rhombic, monoclinic and triclinic materials the canonical axes of anisotropy coincide with the main axes of anisotropy. For trigonal, tetragonal and hexagonal materials one main axis of anisotropy and a canonical axis of anisotropy coinciding with it are determined definitely. To determine the orientation of the other two canonical axes of anisotropy, it is necessary to perform some tension-compression and shift experiments in the plane orthogonal to the defined main axis of anisotropy. In a cubic material the main axes of anisotropy are chosen coinciding with the axes of the laboratory coordinate system. To determine the position of the canonical axes of anisotropy with respect to the laboratory system axes it is enough to use the results of two uniaxial compression experiments.

An experimental program for identification of the type of the initial elastic anisotropy of material is developed. This program includes tension-compression and shift tests in the canonical axes of anisotropy. The performed computer modeling of experiments by identification of the type of initial elastic anisotropy of material confirmed the applicability of the proposed experimental programs.

Key words: anisotropic materials, main axes of anisotropy, program of mechanical experiments, numerical experiment, modeling

1. Введение

Деформируемые твёрдые тела при малых деформациях проявляют свойство упругости. При бесконечно малых деформациях и постоянной температуре соотношения, задающие связь между тензорами напряжений и деформаций, асимптотически стремятся к закону Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{S}\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — линейный тензор деформаций; $\boldsymbol{C}$ — постоянный тензор упругих податливостей четвёртого ранга; $\boldsymbol{S}$ — тензор истинных напряжений. Для материала с каждым типом анизотропии характерна своя структура тензора упругих податливостей $\boldsymbol{C}$ [1–5]. Поэтому тип начальной упругой анизотропии можно выяснить из экспериментов при бесконечно малых деформациях. Проблема состоит лишь в том, что для анизотропного материала необходимо знать, какой точечной группой симметрии обладают его механические свойства, при этом сам материал не обязательно должен быть кристаллическим. Для кристаллов же установление точечной группы симметрии позволяет отнести их к одной из известных кристаллографических систем [2–5]. В качестве объекта исследования рассматривается кубический образец представительных размеров.

В работе [6] задача определения типа анизотропного материала решена в общем виде на основе разложения известного из экспериментов тензора модулей упругости на изотропную (постоянную) часть и части, содержащие два девиатора и нонор. Приведены формулы разложений матриц модулей упругости материалов всех кристаллографических сингоний. Эти разложения для разных типов анизотропии имеют различный вид, поэтому, с опорой на них, проблема идентификации анизотропного материала полностью решается.

Существуют способы нахождения 21 компоненты тензора упругости в лабораторной системе координат с применением акустических волн [10], методов голографической и спекл-интерферометрии [7], экспериментов по статическому однородному деформированию [8]. Однако при этом предварительно должны быть известны значения 21 компоненты тензора упругости или тензора упругих податливостей в некоторой системе координат [6–10]. Как показано в работах [3, 12], тип анизотропии материала распознается, если известно каноническое представление тензора упругости в главных осях анизотропии.

Альтернативный подход к решению проблемы отнесения анизотропных материалов к тому или иному типу состоит в разработке программы механических экспериментов с макрообразцами, по результатам которых можно, не имея конкретных значений упругих констант, провести классификацию материалов по кристаллографическим системам. Такая экспериментальная программа позволит определить тип симметрии свойств анизотропного материала в том случае, когда она априори неизвестна.

2. Определение положения главных и канонических осей анизотропии материала

В работах [3, 11, 12] была предложена программа экспериментов для идентификации типа упругой симметрии анизотропного материала, структура которого в общем случае заранее неизвестна. Базовым в программе является эксперимент по выяснению положения в материале главных осей анизотропии. Согласно В.В. Новожилову [13], главными осями анизотропии называются главные оси тензора напряжений, возникающих в анизотропном материале в ответ на чисто объёмную деформацию. В работе [14] показано, что главные оси анизотропии отождествимы с главными осями тензора деформаций, возникающих в материале при гидростатическом сжатии, когда тензор напряжений $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0$, где $\boldsymbol{S}_0$ — шаровой тензор.

В статье [15] описана возможность установления главных осей анизотропии из трёх экспериментов на сжатие. Тензор напряжений $\boldsymbol{S}_0$ представляется в виде суммы

$$\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 , \tag{2}$$

где $\boldsymbol{S}_1 = -t_1\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{S}_2 = -t_2\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{S}_3 = -t_3\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^3$ — тензоры, каждый из которых описывает сжатие одинаковым напряжением $t_i = t$ вдоль одной из осей некоторой фиксированной декартовой прямоугольной системы координат $\mathrm{O}x'y'z'$ с базисом $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$, которую в дальнейшем будем называть лабораторной. Полагаем, что оси лабораторной системы проходят по рёбрам рассматриваемого кубического макрообразца. Каждому тензору напряжений $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$ соответствует тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, связанный с ним законом Гука (1):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{S}_1 , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{S}_2 , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{S}_3 . \tag{3}$$

В силу линейности закона Гука, с учётом формул (2) и (3), получаем:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{C}\cdot\cdot(\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3) = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 . \tag{4}$$

Аддитивность представления (4) разрешает отождествить опыт на всестороннее сжатие с тремя экспериментами на одноосное сжатие, в которых требуется измерить все компоненты тензора деформации образца. Выполнение трех таких одноосных экспериментов позволяет идентифицировать главные оси анизотропии материала как главные оси тензора деформаций (4), который описывает отклик образца на всестороннее сжатие. Если не представляется возможным измерить в экспериментах все компоненты тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, то недостающие следует выразить через геометрические параметры деформированных образцов [15].

Главные оси $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (4) являются главными осями анизотропии материала и определяются методами линейной алгебры. В результате нахождения главных осей этого тензора становится известной ориентация главных осей анизотропии материала в пространстве относительно лабораторной системы координат.

В случае кратных собственных значений тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ главные оси анизотропии отыскиваются в общем случае с точностью до трёх параметров. Однако тензор упругих податливостей $\boldsymbol{C}$ имеет наименьшее число независимых констант исключительно в базисе, который присущ элементам симметрии свойств материала. Для кристаллов такой базис связывают с кристаллофизическими осями [4, 13, 16], а для композитных материалов или древесины — с тремя осями анизотропии по преимущественным структурным направлениям [17].

В работе [18] показано, что в случае, когда внутреннее строение некоторого анизотропного материала заранее неизвестно, базис декартовой прямоугольной системы координат для элементов симметрии свойств этого материала может быть установлен из механических экспериментов. Оси этой системы координат названы каноническими осями анизотропии материала. Их базисные векторы обозначим как $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$, $\boldsymbol{k}^3$. Канонические оси анизотропии — это оси такой декартовой прямоугольной системы координат, в которой тензоры, описывающие свойства материала, имеют наименьшее число независимых ненулевых констант. Канонические оси анизотропии с отвечающими им элементами симметрии кристаллической структуры всегда совпадают с главными осями анизотропии (см. [13]). Однако главные оси анизотропии, найденные в соответствии с понятием В.В. Новожилова, допускают произвол в выборе их ориентации и в общем случае могут не совпадать с каноническими осями.

Рассмотрим три возможных случая кратности главных значений тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (4) и для каждого из них покажем способы конкретизации положения канонических осей анизотропии.

Итак, если по результатам экспериментов (3) оказывается, что все собственные значения тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ различны ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$), то его собственные векторы распознаются однозначно и задают ориентацию главных осей анизотропии $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$. Канонические оси анизотропии $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$, $\boldsymbol{k}^3$ в этом случае совпадают с главными осями анизотропии, а материал по своим свойствам может быть отнесён к ромбическому, моноклинному или триклинному. Методика идентификации этих трёх материалов разработана в статье [19].

В случае, когда два из трёх собственных значений тензора деформаций (4) одинаковы ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$), материал является одноосным кристаллом — тригональным, тетрагональным или гексагональным. При этом однозначно определяется только одна главная ось анизотропии — главная поворотная ось $\boldsymbol{a}^3$. Базисные векторы $\boldsymbol{a}^1$ и $\boldsymbol{a}^2$ могут быть выбраны произвольно, а базисные векторы $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$ необходимо согласовывать с боковой поворотной осью; для вектора $\boldsymbol{k}^3$ справедливо равенство: $\boldsymbol{k}^3 = \boldsymbol{a}^3$. Базисы $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ и $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$, $\boldsymbol{k}^3$ связаны ортогональным тензором поворота

$$\boldsymbol{Q}_3 = \cos\varphi\left(\boldsymbol{k}^1\boldsymbol{k}^1 + \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{k}^2\right) + \sin\varphi\left(\boldsymbol{k}^1\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{k}^1\right) + \boldsymbol{k}^3\boldsymbol{k}^3 \tag{5}$$

так, что $\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{k}^i \cdot \boldsymbol{Q}_3$, где $i = 1, 2, 3$.

Чтобы выяснить, каков угол φ в случае тригонального материала, необходимо провести один эксперимент: двухосное растяжение–сжатие вдоль векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$. В этом опыте тензор напряжений имеет вид $\boldsymbol{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right)$, а измеряемые компоненты тензора деформаций вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered}\overline{\varepsilon}_{11} = -\overline{\varepsilon}_{22} = t_4(C_{1111} - C_{1122}), \qquad \overline{\varepsilon}_{33} = \overline{\varepsilon}_{12} = 0, \\ \overline{\varepsilon}_{13} = 2t_4 C_{1123}\sin 3\varphi, \qquad \overline{\varepsilon}_{23} = 2t_4 C_{1123}\cos 3\varphi.\end{gathered} \tag{6}$$

Из выражений (6) следует формула для угла φ в тригональном материале:

$$\varphi^{(mp)} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\overline{\varepsilon}_{13}}{\overline{\varepsilon}_{23}}. \tag{7}$$

Определение угла φ, характерного для тетрагонального материала, требует проведения двух экспериментов: на растяжение–сжатие вдоль векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ и на сдвиг в плоскости этих векторов, который осуществляется при выполнении растяжения–сжатия под углом $45°$ к направлениям $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$. В первом из этих экспериментов тензор напряжений составляет $\boldsymbol{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right)$, а измеряемые компоненты тензора деформаций равняются

$$\begin{gathered}\bar{\varepsilon}_{11}=-\bar{\varepsilon}_{22}=t_4\left((C_{1111}-C_{1122})\cos^2 2\varphi+2C_{1212}\sin^2 2\varphi\right),\\ \bar{\varepsilon}_{12}=t_4\left(2C_{1212}-(C_{1111}-C_{1122})\right)\sin 2\varphi\cos 2\varphi,\\ \bar{\varepsilon}_{13}=\bar{\varepsilon}_{23}=\bar{\varepsilon}_{33}=0.\end{gathered}\tag{8}$$

Во втором опыте тензор напряжений имеет вид $\boldsymbol{S}_5=t_5\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right)$, а измеряемые деформации находятся как

$$\begin{gathered}\bar{\bar{\varepsilon}}_{11}=-\bar{\bar{\varepsilon}}_{22}=t_5\left(2C_{1212}-(C_{1111}-C_{1122})\right)\sin 2\varphi\cos 2\varphi,\\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{12}=t_5\left((C_{1111}-C_{1122})\sin^2 2\varphi+2C_{1212}\cos^2 2\varphi\right),\\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{13}=\bar{\bar{\varepsilon}}_{23}=\bar{\bar{\varepsilon}}_{33}=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Из (8), (9) получаются следующие формулы для угла φ в случае тетрагонального материала:

$$\varphi^{(m)}=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\bar{\varepsilon}_{12}t_5}{\bar{\varepsilon}_{11}t_5-\bar{\bar{\varepsilon}}_{12}t_4}\quad\text{или}\quad\varphi^{(m)}=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\bar{\bar{\varepsilon}}_{11}t_4}{\bar{\varepsilon}_{11}t_5-\bar{\bar{\varepsilon}}_{12}t_4}\,.\tag{10}$$

Ориентация канонических осей анизотропии относительно лабораторной системы координат определяется по углу φ (см. формулы (7) и (10)) для тригонального и тетрагонального материалов, соответственно, из соотношений:

$$\boldsymbol{k}^1=\boldsymbol{a}^1\cos\varphi-\boldsymbol{a}^2\sin\varphi\,,\quad \boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{a}^1\sin\varphi+\boldsymbol{a}^2\cos\varphi\,,\quad \boldsymbol{k}^3=\boldsymbol{a}^3\,.$$

Упругие свойства гексагонального материала инвариантны относительно любых поворотов вокруг вектора $\boldsymbol{k}^3=\boldsymbol{a}^3$ [2]. В гексагональном материале измеряемые компоненты тензора деформаций составляют: $\bar{\varepsilon}_{11}=-\bar{\varepsilon}_{22}=t_4(C_{1111}-C_{1122})$, $\bar{\varepsilon}_{12}=\bar{\varepsilon}_{13}=\bar{\varepsilon}_{23}=\bar{\varepsilon}_{33}=0$ (так как для такого материала $C_{1212}=(C_{1111}-C_{1122})/2$) при действии напряжений $\boldsymbol{S}_4=t_4\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right)$ [3]; $\bar{\bar{\varepsilon}}_{12}=t_5(C_{1111}-C_{1122})$, $\bar{\bar{\varepsilon}}_{11}=\bar{\bar{\varepsilon}}_{22}=\bar{\bar{\varepsilon}}_{13}=\bar{\bar{\varepsilon}}_{23}=\bar{\bar{\varepsilon}}_{33}=0$ — при $\boldsymbol{S}_5=t_5\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right)$.

Если в результате эксперимента по установлению главных осей анизотропии по В.В. Новожилову получается, что главные значения тензора деформаций (4) одинаковы ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3$), то в качестве главных осей анизотропии $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ следует рассматривать оси лабораторной системы координат, в которой проводился эксперимент. Такой выбор векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ позволяет использовать данные экспериментов на одноосное сжатие для нахождения канонических осей анизотропии $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$, $\boldsymbol{k}^3$ в кубическом материале.

Взаимная ориентация векторных базисов $\boldsymbol{a}^i$ и $\boldsymbol{k}^i$ задается ортогональным тензором поворота $\boldsymbol{Q}=q_{ij}\boldsymbol{k}^i\boldsymbol{k}^j$: $\boldsymbol{a}^i=\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{Q}$ ($i=1,2,3$). Для компонент тензора $\boldsymbol{Q}$ выполняются тождества:

$$\begin{gathered}q_{11}^2+q_{21}^2+q_{31}^2=1,\qquad q_{12}^2+q_{22}^2+q_{32}^2=1,\qquad q_{13}^2+q_{23}^2+q_{33}^2=1,\\ q_{11}q_{12}+q_{21}q_{22}+q_{31}q_{32}=0,\quad q_{11}q_{13}+q_{21}q_{23}+q_{31}q_{33}=0,\quad q_{12}q_{13}+q_{22}q_{23}+q_{32}q_{33}=0.\end{gathered}\tag{11}$$

Покажем, что для определения положения канонических осей анизотропии $\boldsymbol{k}^i$ относительно осей лабораторной системы $\boldsymbol{a}^i$ достаточно использовать результаты двух экспериментов на одноосное сжатие (3) в лабораторной системе координат.

В первом эксперименте $\boldsymbol{S}_1=-t\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1$. Измеряемые деформации выражаются через константы податливости и компоненты тензора $\boldsymbol{Q}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\bar{\varepsilon}_{11}=-t\left[Q_1\left(C_{1111}-(C_{1122}+2C_{1212})\right)+C_{1122}+2C_{1212}\right], &&\bar{\varepsilon}_{22}=-t\left[Q_4\left(C_{1111}-(C_{1122}+2C_{1212})\right)+C_{1122}\right],\\ &\bar{\varepsilon}_{33}=-t\left[Q_5\left(C_{1111}-(C_{1122}+2C_{1212})\right)+C_{1122}\right], &&\bar{\varepsilon}_{12}=-t\left[Q_7\left(C_{1111}-(C_{1122}+2C_{1212})\right)\right],\\ &\bar{\varepsilon}_{13}=-t\left[Q_8\left(C_{1111}-(C_{1122}+2C_{1212})\right)\right], &&\bar{\varepsilon}_{23}=-t\left[Q_9\left(C_{1111}-(C_{1122}+2C_{1212})\right)\right],\end{aligned}\tag{12}$$

где обозначено $Q_1=q_{11}^4+q_{12}^4+q_{13}^4$, $Q_4=q_{11}^2q_{21}^2+q_{12}^2q_{22}^2+q_{13}^2q_{23}^2$, $Q_5=q_{11}^2q_{31}^2+q_{12}^2q_{32}^2+q_{13}^2q_{33}^2$, $Q_7=q_{21}q_{11}^3+q_{22}q_{12}^3+q_{23}q_{13}^3$, $Q_8=q_{31}q_{11}^3+q_{32}q_{12}^3+q_{33}q_{13}^3$, $Q_9=q_{21}q_{31}q_{11}^2+q_{22}q_{32}q_{12}^2+q_{23}q_{33}q_{13}^2$.

Во втором эксперименте $\boldsymbol{S}_2 = -t\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2$, и измеряемые компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ связываются с компонентами тензора $\boldsymbol{Q}$ через константы податливости формулами вида:

$$\begin{gathered}
\overline{\overline{\varepsilon}}_{11} = -t\left[Q_4\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right) + C_{1122} + 2C_{1212}\right], \quad \overline{\overline{\varepsilon}}_{22} = -t\left[Q_2\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right) + C_{1122}\right], \\
\overline{\overline{\varepsilon}}_{33} = -t\left[Q_6\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right) + C_{1122}\right], \quad \overline{\overline{\varepsilon}}_{12} = -t\left[Q_{10}\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right], \\
\overline{\overline{\varepsilon}}_{23} = -t\left[Q_{11}\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right], \quad \overline{\overline{\varepsilon}}_{13} = -t\left[Q_{12}\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right].
\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $Q_2 = q_{21}^4 + q_{22}^4 + q_{23}^4$, $Q_6 = q_{21}^2 q_{31}^2 + q_{22}^2 q_{32}^2 + q_{23}^2 q_{33}^2$, $Q_{10} = q_{11}q_{21}^3 + q_{12}q_{22}^3 + q_{13}q_{23}^3$, $Q_{11} = q_{31}q_{21}^3 + q_{32}q_{22}^3 + q_{33}q_{23}^3$, $Q_{12} = q_{11}q_{31}q_{21}^2 + q_{12}q_{32}q_{22}^2 + q_{13}q_{33}q_{23}^2$.

Для отыскания девяти компонент тензора $\boldsymbol{Q}$ используем шесть соотношений (11) и четыре независимых соотношения из (12), (13):

$$\begin{gathered}
-t\left[Q_7\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right] = \overline{\varepsilon}_{12}, \qquad -t\left[Q_8\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right] = \overline{\varepsilon}_{13}, \\
-t\left[Q_9\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right] = \overline{\varepsilon}_{23}, \qquad -t\left[Q_{10}\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)\right] = \overline{\overline{\varepsilon}}_{12}.
\end{gathered}$$

Исключая из них множитель $\left(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})\right)$, получаем три уравнения относительно компонент тензора $\boldsymbol{Q}$:

$$\begin{gathered}
q_{31}q_{11}^3 + q_{32}q_{12}^3 + q_{33}q_{13}^3 = \frac{\overline{\varepsilon}_{13}}{\overline{\varepsilon}_{12}}\left(q_{21}q_{11}^3 + q_{22}q_{12}^3 + q_{23}q_{13}^3\right), \\
q_{21}q_{31}q_{11}^2 + q_{22}q_{32}q_{12}^2 + q_{23}q_{33}q_{13}^2 = \frac{\overline{\varepsilon}_{23}}{\overline{\varepsilon}_{12}}\left(q_{21}q_{11}^3 + q_{22}q_{12}^3 + q_{23}q_{13}^3\right), \\
q_{11}q_{21}^3 + q_{12}q_{22}^3 + q_{13}q_{23}^3 = \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}_{12}}{\overline{\varepsilon}_{12}}\left(q_{21}q_{11}^3 + q_{22}q_{12}^3 + q_{23}q_{13}^3\right).
\end{gathered} \tag{14}$$

Численное решение системы уравнений (11), (14) позволяет найти компоненты тензора $\boldsymbol{Q}$, то есть установить ориентацию канонической системы координат в кубическом материале относительно лабораторной системы координат по измеряемым в опытах деформациям.

Таким образом, разработана система механических экспериментов, с помощью которых можно в однородном кубическом образце определять направления канонических осей анизотропии, связанных с элементами симметрии свойств материала. Положение этих осей относительно лабораторной системы координат представляется для одноосных кристаллов соотношениями (5), (7), (10), для кубического материала — соотношениями (11), (14). При этом сначала распознаются тригональный, тетрагональный и кубический материалы. Осуществляется это по характерным для каждого типа материала ненулевым компонентам тензора деформаций, измеряемым в экспериментах, и выражениям (6), (8), (9), (12), (13). В случае совпадения канонических осей анизотропии с осями лабораторной системы координат для конкретизации типа анизотропии в материале требуется проведение дополнительных экспериментов.

3. Программа экспериментальной идентификации изотропного и кубического материалов

Пусть в опытах на одноосное сжатие в лабораторной системе координат достоверно находятся сдвиговые деформации, например, $\overline{\varepsilon}_{12}$, $\overline{\overline{\varepsilon}}_{12}$, тогда материал является кубическим, а ориентация его канонических осей анизотропии определяется соотношениями (11), (14). Если же измеряемые сдвиговые деформации не превышают погрешности измерений и можно считать, что $\overline{\varepsilon}_{ij} = \overline{\overline{\varepsilon}}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, то, как показано выше, канонические оси анизотропии $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$, $\boldsymbol{k}^3$ совпадают с главными осями $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ и осями лабораторной системы координат. В этом случае, для того чтобы отличить изотропный материал от кубического, требуется провести эксперимент на двухосное растяжение–сжатие по направлениям векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ с тензором напряжений $\boldsymbol{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right)$ и эксперимент на сдвиг с тензором напряжений $\boldsymbol{S}_5 = t_5\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right)$ в плоскости этих векторов.

В качестве реакции на напряжения $\boldsymbol{S}_4$ и в изотропном, и в кубическом материалах, в соответствии с представлениями их тензоров податливостей $\boldsymbol{C}$ [3], возникают деформации:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4^{(из)} = \boldsymbol{\varepsilon}_4^{(к)} = t_4 (C_{1111} - C_{1122})\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right) = (C_{1111} - C_{1122})\boldsymbol{S}_4 , \tag{15}$$

где C_{ijkl} — компоненты тензора упругих податливостей.

В опыте на сдвиг при напряжениях $\boldsymbol{S}_5$ в изотропном материале деформации составляют:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(из)} = 2t_5 C_{1212}\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) = t_5 (C_{1111} - C_{1122})\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) = (C_{1111} - C_{1122})\boldsymbol{S}_5 .$$

Тогда

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(4)}}{t_4} = \frac{\varepsilon_{12}^{(5)}}{t_5} , \tag{16}$$

так как для изотропного материала $C_{1212} = C_{2323} = C_{1313} = (C_{1111} - C_{1122})/2$ [3].

В кубическом материале при сдвиге с $\boldsymbol{S}_5$ в плоскости векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ появляются деформации, описываемые тензором:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(к)} = 2t_5 C_{1212}\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) = 2C_{1212}\boldsymbol{S}_5 . \tag{17}$$

Для компонент тензора упругих податливостей кубического материала $C_{1212} = C_{2323} = C_{1313} \neq$ $\neq (C_{1111} - C_{1122})/2$ [3], поэтому

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(к)} = 2C_{1212}\boldsymbol{S}_5 \neq (C_{1111} - C_{1122})\boldsymbol{S}_5 . \tag{18}$$

Из выражений (15), (17), (18) следует, что для кубического материала имеет место неравенство:

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(4)}}{t_4} \neq \frac{\varepsilon_{12}^{(5)}}{t_5} . \tag{19}$$

Итак, если в опытах на двухосное растяжение–сжатие и сдвиг в плоскости векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ выполняется равенство (16), то материал изотропный, если справедливо неравенство (19), то материал кубический. В двух указанных экспериментах компоненты тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\varepsilon}_5$ выражаются через измеряемые геометрические параметры деформированных образцов [15].

4. Программа экспериментальной идентификации одноосных кристаллов

Под одноосными кристаллами [2] будем понимать кристаллы, имеющие главную поворотную ось третьего, четвёртого или шестого порядков, то есть относящиеся к тригональной, тетрагональной или гексагональной кристаллографическим системам. Для материалов с такими типами анизотропии канонические оси определены в разделе 2. При канонических осях анизотропии $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$, не совпадающих с главными осями анизотропии $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, тригональный материал можно отличить от тетрагонального и гексагонального по наличию в измерениях при двухосном растяжении–сжатии ненулевых компонент деформаций $\overline{\varepsilon}_{13}$ и $\overline{\varepsilon}_{23}$. У гексагонального материала в эксперименте на растяжение–сжатие вдоль векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ с тензором напряжений $\boldsymbol{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right)$ измеряемые компоненты тензора деформаций имеют вид:

$$\overline{\varepsilon}_{11} = -\overline{\varepsilon}_{22} = t_4 (C_{1111} - C_{1122}) , \qquad \overline{\varepsilon}_{12} = \overline{\varepsilon}_{13} = \overline{\varepsilon}_{23} = \overline{\varepsilon}_{33} = 0 . \tag{20}$$

Гексагональный материал отличается от тетрагонального тем, что в указанном опыте ему соответствует $\overline{\varepsilon}_{12} = 0$, в то время как у тетрагонального деформация $\overline{\varepsilon}_{12} \neq 0$ и вычисляется согласно выражению (8).

Рассмотрим случай, когда главные оси анизотропии, установленные экспериментально, совпадают с каноническими осями анизотропии одноосных кристаллов, то есть $\varphi = 0$. В этом случае в эксперименте на растяжение–сжатие вдоль векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ с тензором напряжений $\boldsymbol{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right)$ тензоры деформаций, в соответствии с представлениями их тензоров податливостей $\boldsymbol{C}$ [3], составляют:

– для тригонального материала

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4^{(mp)} = t_4(C_{1111} - C_{1122})\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right) + 2t_4C_{1123}\left(\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{a}^3\boldsymbol{a}^2\right); \tag{21}$$

– для тетрагонального и гексагонального материалов

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4^{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon}_4^{(г)} = t_4(C_{1111} - C_{1122})\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2\right) = (C_{1111} - C_{1122})\boldsymbol{S}_4 . \tag{22}$$

В опыте на сдвиг при нагружении с $\boldsymbol{S}_5 = t_5\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right)$ возникают деформации:
– в тригональном материале

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(mp)} = t_5(C_{1111} - C_{1122})\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) + 2t_5C_{1123}\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{a}^3\boldsymbol{a}^1\right),$$

– в тетрагональном материале

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(m)} = 2t_5C_{1212}\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) = 2C_{1212}\boldsymbol{S}_5 . \tag{23}$$

В гексагональном материале при напряжениях $\boldsymbol{S}_5$ в плоскости векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ деформациям отвечает тензор

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(г)} = 2t_5C_{1212}\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) = t_5(C_{1111} - C_{1122})\left(\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^1\right) = (C_{1111} - C_{1122})\boldsymbol{S}_5 , \tag{24}$$

так как для гексагонального материала $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$ [3].

Если канонические оси анизотропии $\boldsymbol{k}^i$ совпадают с главными осями анизотропии $\boldsymbol{a}^i$, то в эксперименте на двухосное растяжение–сжатие тригональный материал отличим от тетрагонального и гексагонального по наличию ненулевых компонент деформаций $\overline{\varepsilon}_{23}$ (см. выражения (21), (22)).

В соответствии с (22)–(24) распознание тетрагонального и гексагонального материалов в канонических осях анизотропии можно выполнить по аналогии с кубическим и изотропным материалами, то есть использовать соотношения, похожие на (16), (19):
– если

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(4)}}{t_4} = \frac{\varepsilon_{12}^{(5)}}{t_5}, \tag{25}$$

то $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$, и материал гексагональный;
– если

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(4)}}{t_4} \neq \frac{\varepsilon_{12}^{(5)}}{t_5}, \tag{26}$$

то $C_{1212} \neq (C_{1111} - C_{1122})/2$, и материал тетрагональный.

Таким образом, если два из трёх собственных значений тензора деформаций, возникающих при всестороннем сжатии, совпадают и при двухосном растяжении–сжатии в плоскости собственных векторов, соответствующих равным собственным значениям, возникают сдвиговые деформации в перпендикулярной плоскости векторов $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$, то материал тригональный. Полученные условия (21), (25) и (26) по данным двух экспериментов на двухосное растяжение–сжатие позволяют узнать, каким является исследуемый материал — тригональным, тетрагональным или гексагональным.

Анализ влияния погрешности измерений на точность выполнения критериев идентификации проведён в статьях [20, 21]. Показано, что при значениях погрешностей экспериментальных измерений, характерных для современной испытательной техники, отклонения от точных равенств в предложенных критериях (16), (25) составляют не более 5%.

5. Моделирование задач, аналогичных экспериментам по определению типа анизотропного материала

Для компьютерного моделирования задач, соответствующих описанным экспериментам, разработан программный продукт [22], который осуществляет расчёт и визуализацию деформаций материального образца при различных видах нагружений, предусмотренных предложенными программами экспериментов. Ориентация канонических осей анизотропии относительно лабораторной системы координат и компоненты тензора упругих податливостей для анизотропных материалов различных типов в программе задаются, но считаются «неизвестными» для экспериментатора (пользователя). Результатом работы программы является тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, который определяется из закона Гука (1) по заданным напряжениям на гранях куба. Программа предусматривает, что приложенные нагрузки и вызванные ими деформации измеряются с некоторой погрешностью, максимальная величина которой оговаривается изначально.

Приведём примеры моделирования экспериментов по распознанию типа начальной упругой анизотропии материала.

5.1. Моделирование базового эксперимента

Рассматривается кубический образец, рёбра которого направлены вдоль лабораторной системы координат с базисом $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$. Проводятся три опыта на одноосное сжатие образца по программе базового эксперимента (2). Деформации измеряются с погрешностью $\Delta\varepsilon = 0,01\cdot10^{-4}$. Результаты представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Опыты на одноосное сжатие – 1-й уровень номинальных напряжений

<u>*Опыт*</u>	Направление сжатия	Вид тензора напряжений	Ненулевая компонента напряжений: Обозначение	Ненулевая компонента напряжений: Номинальное значение, Па	Заданные напряжения с учетом погрешности измерений, Па	Измеренные деформации
1	Вдоль оси $\boldsymbol{e}^1$	$\boldsymbol{S}_1 = S_{11}^{(1)}\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^1$	$S_{11}^{(1)}$	-10^7	$S_{11}^{(1)} = -0,9918\cdot10^7$	$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58 & 0 \\ 0 & 0 & 0,58 \end{pmatrix}\cdot10^{-4}$
2	Вдоль оси $\boldsymbol{e}^2$	$\boldsymbol{S}_2 = S_{22}^{(2)}\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^2$	$S_{22}^{(2)}$		$S_{22}^{(2)} = -1,0056\cdot10^7$	$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & -1,60 & 0 \\ 0 & 0 & 0,59 \end{pmatrix}\cdot10^{-4}$
3	Вдоль оси $\boldsymbol{e}^3$	$\boldsymbol{S}_3 = S_{33}^{(3)}\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^3$	$S_{33}^{(3)}$		$S_{33}^{(3)} = -0,9957\cdot10^7$	$\varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,58 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58 & 0 \\ 0 & 0 & -1,59 \end{pmatrix}\cdot10^{-4}$

Компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$ являются откликом материала на всестороннее сжатие:

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,42 & 0 & 0 \\ 0 & -0,44 & 0 \\ 0 & 0 & -0,42 \end{pmatrix}\cdot10^{-4}. \tag{27}$$

Согласно (27) главные значения тензора деформаций составляют: $\varepsilon_1 = -0,42\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -0,44\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_3 = -0,42\cdot10^{-4}$. С точностью до 5% их можно считать равными друг другу. Тогда исследуемый материал следует отнести к кубическому или изотропному. При этом главные оси анизотропии с достаточной степенью точности совпадают с лабораторными осями координат. При сжатии одинаковыми напряжениями вдоль различных лабораторных осей осевые, а также поперечные деформации одинаковы с точностью до погрешности измерений, а сдвиговые деформации меньше $\Delta\varepsilon$. В этом случае, как показано в Разделе 2, канонические оси анизотропии материала совпадают с главными осями анизотропии и с лабораторными осями координат.

Для определения типа материала в соответствии с критериями (16), (19) проведём эксперименты: в направлении канонических осей анизотропии $\boldsymbol{k}^1 = \boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{e}^2$ — на двухосное растяжение–сжатие; в проходящей через них плоскости — на сдвиг, который реализуем как растяжение–сжатие под углом $45°$ к ней.

<u>*Опыт 4*</u> — растяжение–сжатие вдоль осей $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$. Номинальный тензор напряжений имеет вид: $\boldsymbol{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^1 - \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^2\right)$, где $t_4 = 10^7$ Па. Измеренные напряжения и деформации, соответственно, составляют:

$$S_{11}^{(4)} = 1,0061\cdot10^7\ \text{Па}, \qquad S_{22}^{(4)} = -0,9996\cdot10^7\ \text{Па}, \qquad \varepsilon_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 2,20 & 0 & 0 \\ 0 & -2,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot10^{-4}.$$

<u>*Опыт 5*</u> — сдвиг в плоскости осей $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$. Номинальный тензор напряжений представляется как $\boldsymbol{S}_5 = t_5\left(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^1\right)$, где $t_5 = 10^7$ Па. Измеренные напряжения и деформации равняются:

$$S_{12}^{(5)} = 0,9997\cdot 10^7 \text{ Па}, \qquad \varepsilon_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,70 & 0 \\ 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}.$$

В соответствии с критерием (19) $\dfrac{2,20\cdot 10^{-4}}{1,0061\cdot 10^7} \neq \dfrac{0,70\cdot 10^{-4}}{0,9997\cdot 10^7}$, поэтому исследуемый материал является кубическим.

5.2. Моделирование базового эксперимента с другими номинальными значениями напряжений

Как и в предыдущем примере, проводятся три опыта на одноосное сжатие образца по программе базового эксперимента (2) с номинальными значениями напряжений $S_{11}^{(1)} = S_{22}^{(2)} = S_{33}^{(3)} = -10^6$ Па. Погрешность измерения деформаций та же: $\Delta\varepsilon = 0,01\cdot 10^{-4}$.

Таблица 2. Опыты на одноосное сжатие – 2-й уровень номинальных напряжений

<u>*Опыт*</u>	Направление сжатия	Вид тензора напряжений	Ненулевая компонента напряжений		Заданные напряжения с учетом погрешности измерений, Па	Измеренные деформации
			Обозначение	Номинальное значение, Па		
1	Вдоль оси $\boldsymbol{e}^1$	$\boldsymbol{S}_1 = S_{11}^{(1)}\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^1$	$S_{11}^{(1)}$	-10^6	$S_{11}^{(1)} = -1,0058\cdot 10^6$	$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1,42 & 0,09 & 0 \\ 0,09 & 0,40 & 0 \\ 0 & 0 & 0,91 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}$
2	Вдоль оси $\boldsymbol{e}^2$	$\boldsymbol{S}_2 = S_{22}^{(2)}\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^2$	$S_{22}^{(2)}$		$S_{22}^{(2)} = -1,0063\cdot 10^6$	$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,41 & -0,09 & 0 \\ -0,09 & -1,41 & 0 \\ 0 & 0 & 0,91 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}$
3	Вдоль оси $\boldsymbol{e}^3$	$\boldsymbol{S}_3 = S_{33}^{(3)}\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^3$	$S_{33}^{(3)}$		$S_{33}^{(3)} = -0,9974\cdot 10^6$	$\varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,91 & 0 & 0 \\ 0 & 0,91 & 0 \\ 0 & 0 & -1,87 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}$

Компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$, которые являются откликом материала на всестороннее сжатие, в этом случае составляют:

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,05 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}. \qquad (28)$$

Главные значения тензора деформаций найдем из (28): $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -10^{-5}$, $\varepsilon_3 = -0,5\cdot 10^{-5}$. При этом главные оси тензора деформаций совпадают с лабораторными осями координат. Такой материал может быть тригональным, тетрагональным или гексагональным, поскольку все они имеют главную ось анизотропии, соответствующую однократному главному значению ε_3, совпадающую с поворотной осью симметрии и, следовательно, с канонической осью $\boldsymbol{k}^3$.

Для определения угла поворота φ канонических осей анизотропии $\boldsymbol{k}^1$, $\boldsymbol{k}^2$ относительно лабораторных осей $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ выполним эксперименты на двухосное растяжение–сжатие вдоль осей $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ и на сдвиг в плоскости этих осей.

<u>*Опыт 4*</u> — двухосное растяжение–сжатие вдоль осей $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$. Номинальный тензор напряжений записывается как $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^1 - \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^2\right)$, где $t_4 = 10^6$ Па. Измеренные напряжения и деформации равняются:

$$S_{11}^{(4)} = 1,0058\cdot 10^6 \text{ Па}, \quad S_{22}^{(4)} = -1,0063\cdot 10^6 \text{ Па}, \qquad \varepsilon_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1,83 & -0,18 & 0 \\ -0,18 & -1,81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}.$$

<u>*Опыт 5*</u> — сдвиг в плоскости осей $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$. Номинальный тензор напряжений представляется как $\mathbf{S}_5 = t_5\left(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^1\right)$, где $t_5 = 10^6$ Па. Измеренные напряжения и деформации, соответственно, имеют вид:

$$S_{12}^{(5)} = 1{,}0074 \cdot 10^6 \text{ Па}, \qquad \varepsilon_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 1{,}83 & 0 \\ 1{,}83 & -0{,}18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Так как в опыте 4 считаем, что не возникают сдвиговые деформации ε_{13} и ε_{23} (их значения меньше погрешности измерения деформаций и поэтому не фиксируются), исследуемый материал не является тригональным.

Далее, определим угол φ по формуле (10): $\varphi \approx -0{,}391$рад. Погрешность найденного значения угла φ по сравнению со значением, заданным изначально в программе, составляет 2,3%. Угол φ отличен от нуля, поэтому исследуемый материал является тетрагональным.

Таким образом, численное моделирование экспериментов по идентификации типа начальной упругой анизотропии материала показывает, что разработанные программы экспериментов, при доступной точности измерений, способны правильно устанавливать тип анизотропного материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-97501-р_центр_а, 14-01-31138-мол_а, 15-01-01875-а) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 467).

Литература

1. *Грин А.Е., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – Т. 7. – 248 с.
3. *Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В.* Процессы упругопластического конечного деформирования. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. – 374 с.
4. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики: учеб. пособие. – М.: Наука, 1979. – 640 с.
5. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
6. *Остросаблин Н.И.* Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды. – 2002. – № 120. – С. 149-160.
7. *Цвелодуб И.Ю.* К определению упругих характеристик однородных анизотропных тел // ПМТФ. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 145-149.
8. *Hayes M.* A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media // J. Mater. Sci. – 1969. – Vol. 4, no. 1. – P. 10-14. DOI
9. *Jarić J.P.* On the conditions for the existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic material // Mech. Res. Commun. – 1994. – Vol. 21, no. 2. – P. 153-174. DOI
10. *Norris A.N.* On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // Q. J. Mechanics Appl. Math. – 1989. – Vol. 42, no. 3. – P. 413-426. DOI
11. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Определение типа исходной анизотропии и распространение частного постулата Ильюшина на начально анизотропные материалы // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сб. науч. тр. – Тверь: Изд-во ТвГТУ, 2000. – Вып. 2. – С. 66-71.
12. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханические модели обратимого конечного деформирования. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. – 268 с.
13. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
14. *Соколова М.Ю., Христич Д.В., Генералова Е.М.* К вопросу об определении главных осей анизотропии // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Международной научной конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. – С. 300-301.
15. *Христич Д.В, Каюмов Р.А., Мухамедова И.З.* Программа экспериментов по определению главных осей анизотропии материала // Известия КазГАСУ. – 2012. – № 3. – С. 216-224.
16. *Ньюнхем Р.Э.* Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 652 с.
17. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
18. *Христич Д.В.* К вопросу об определении главных осей анизотропии материала // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – № 2. – С. 203-213.
19. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации ромбического, моноклинного и триклинного материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2013. – № 3. – С. 166-178.
20. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации гексагонального, тригонального и тетрагонального материалов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. – № 2-1. – С. 67-72.
21. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации изотропного и кубического материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2012. – № 3. – С. 110-118.
22. *Христич Д.В.* Компьютерное моделирование экспериментов по определению типа начальной анизотропии упругих материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – № 4. – С. 110-119.

References

1. Green A.E., Adkins J.E. *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford: Clarendon Press, 1970. 324 p.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. *Theory of elasticity*. Course of theoretical physics, vol. 7. Elsevier, 1986. 187 p.

3. Markin A.A., Sokolova M.Yu., Khristich D.V. *Protsessy uprugoplasticheskogo konechnogo deformirovaniya* [Processes of elastoplastic finite deformation]. Tula: Tula State University, 2011. 374 p.
4. Sirotin Yu.I., Shaskolskaya M.P. *Fundamentals of crystal physics*. Chicago: Imported Publications, 1983. 654 p.
5. Chernykh K.F. *An introduction to modern anisotropic elasticity*. New York: Begell Publishing House, 1998. 282 p.
6. Ostrosablin N.I. Linejnye invariantnye neprivodimye razlozheniya tenzora chetvertogo ranga modulej uprugosti [Linear invariant irreducible decompositions of the fourth-order tensor of elastic moduli]. *Dinamika sploshnoj sredy – Dynamics of continuous medium*, 2002, no. 120, pp. 149-160.
7. Tsvelodub I.Yu. K opredeleniyu uprugikh kharakteristik odnorodnykh anizotropnykh tel [Determining the elastic characteristics of homogeneous anisotropic bodies]. *J. Appl. Mech. Tech. Phy*., 1994, vol. 4, no. 3, pp. 455-458.
8. Hayes M. A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media. *J. Mater. Sci*., 1969, vol. 4, no. 1, pp. 10-14. DOI
9. Jarić J.P. On the conditions for the existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic material. *Mech. Res. Commun*., 1994, vol. 21, no. 2, pp. 153-174. DOI
10. Norris A.N. On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes. *Q. J. Mechanics Appl. Math*., 1989, vol. 42, no. 3, pp. 413-426. DOI
11. Markin A.A., Sokolova M.Yu. Opredelenie tipa iskhodnoj anizotropii i rasprostranenie chastnogo postulata Il'yushina na nachal'no anizotropnye materialy [Determination of initial anisotropy type and extension of Il'yushin's partial postulate to initially anisotropic materials]. *Ustojchivost', plastichnost', polzuchest' pri slozhnom nagruzhenii* [Stability, plasticity and creep at complicated loading]. Tver: Tver State Technical University, 2000, no. 2, pp. 66-71.
12. Markin A.A., Sokolova M.Yu. *Termomekhanicheskie modeli obratimogo konechnogo deformirovaniya* [Thermomechanical models of reversible finite deformation]. Tula: Tula State University, 2010. 268 p.
13. Novozhilov V.V. *Theory of elasticity*. Elsevier, 1961. 460 p.
14. Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Generalova E.M. K voprosu ob opredelenii glavnykh osej anizotropii [On the problem of identification of main anisotropy axes]. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki* [Modern problems of mathematics, mechanics, informatics]. Tula: Tula State University, 2008, pp. 300-301.
15. Khristich D.V., Kayumov R.A., Muhamedova I.Z. A program of experiments for material anisotropy main axes determination]. *Izvestiya KazGASU – News of the KSUAE*, 2012, no. 3, pp. 216-224.
16. Newnham R.E. *Properties of materials. Anisotropy, symmetry, structure*. Oxford University Press, 2004, 392 p.
17. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1984. 336 p.
18. Khristich D.V. K voprosu ob opredelenii glavnykh osej anizotropii materiala [On the problem of identification of the main anisotropy axes of the material]. *Proceedings of the Tula State University. Natural Sciences*, 2014, no. 2, pp. 203-213.
19. Khristich D.V. Kriterij experimental'noj identifikatsii rombicheskogo, monoklinnogo i triklinnogo materialov [A criterion for experimental identification of rhombic, monoclinic and triclinic materials]. *Proceedings of the Tula State University. Natural Sciences*, 2013, no. 3, pp. 166-178.
20. Khristich D.V. Kriterij experimental'noj identifikatsii geksagonal'nogo, trigonal'nogo i tetragonal'nogo materialov [A criterion for experimental identification of hexagonal, trigonal and tetragonal materials]. *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva – Bulletin of Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev*, 2013, no. 2, pp. 67-72.
21. Khristich D.V. Kriterij experimental'noj identifikatsii izotropnogo i kubicheskogo materialov [A criterion for experimental identification of isotropic and cubic materials]. *Proceedings of the Tula State University. Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 110-118.
22. Khristich D.V. Komp'yuternoe modelirovanie experimentov po opredeleniyu tipa nachal'noj anizotropii uprugikh materialov [Computer modelling of experiments by detecting the type of initial anisotropy of elastic materials]. *Proceedings of the Tula State University. Natural Sciences*, 2014, no. 4, pp. 110-119.

Поступила в редакцию 22.05.2015; опубликована в электронном виде 30.12.2015

Сведения об авторах

Астапов Юрий Владимирович, студ., Тульский государственный университет (ТулГУ), 300012, Тула, просп. Ленина, д. 92; e-mail: ast3x3@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович, кфмн, доц., ТулГУ; e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru