

DOI: [10.7242/1999-6691/2015.8.4.31](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.31)
УДК 532.5

К ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГЛАДКИХ ТРУБАХ

А.П. Лепихин

Горный институт УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Выполнен сопоставительный анализ наиболее распространённых аналитических соотношений, по которым находится коэффициент гидравлического сопротивления в гладких трубах. Предложена новая простая формула, содержащая минимальное число эмпирических параметров и позволяющая в явном виде рассчитывать данный коэффициент. Проведена оценка эффективности предложенного выражения и осуществлено сравнение результатов вычислений на его основе с имеющимися в литературе данными, следующими из материалов детальных экспериментов, выполненных в Принстонском и Орегонском университетах и опубликованных в 2004 году. Расчётные и экспериментальные величины анализировались на основе средних, медианных и максимальных абсолютных значений их относительных отклонений. Осуществлённые расчёты показали, что, несмотря на близкие между собой результаты, которые дают указанные эксперименты, построенные исходя из них расчётные соотношения существенно различаются. Так, если рассматривать в качестве критерия эффективности расчётных соотношений средние арифметические значения или медианы относительных отклонений, то наилучшее совпадение с экспериментальными данными Орегонского эксперимента обеспечивает представление, предложенное Г. Баренблаттом. Предлагаемое же в настоящей работе соотношение для оценки коэффициента даёт несколько большие отклонения от этих результатов. Но, в то же время, при сопоставлении с Принстонским экспериментом вводимая формула обеспечивает наименьшие отклонения как по средним и медианным, так и по максимальным значениям абсолютных отклонений среди всех протестированных расчётных соотношений.

Ключевые слова: коэффициент гидравлического сопротивления, гладкие трубы

ESTIMATION OF HYDRAULIC RESISTANCE COEFFICIENT IN SMOOTH PIPES

A.P. Lepikhin

Mining Institute UB RAS, Perm, Russian Federation

A comparative analysis of the most widespread analytical relations used for estimation of hydraulic resistance coefficient in smooth pipes is made. A new simple relation that contains a minimum number of empirical parameters and allows evaluation of the hydraulic resistance coefficient in an explicit form is proposed. The effectiveness of the relation has been verified, and the obtained data have been compared with the results of experiments performed at Princeton and Oregon universities and published in 2004. The compatibility between the calculated and experimental results is analyzed in terms of average, median and maximum absolute values of their relative deflections. Simulations have shown that in spite of the fact that the data obtained during these experiments are close, the difference between the relations constructed using these results is significant. So, if the arithmetic means or medians of relative deflections are taken as the efficiency factor of these relations, the best coincidence with the experimental results from the Oregon experiment is ensured by the relation proposed by G. Barenblatt. Our relation gives slightly larger deflections. At the same time, a comparison with the results from the Princeton experiment indicates that it provides the lowest deflections for both the average and median values and the maximum values of absolute deviations among all the considered relations.

Key words: hydraulic resistance coefficient, smooth pipes

При решении широкого круга задач вычислительной гидродинамики принципиальное значение имеет корректность введения в постановку задач коэффициентов гидравлического сопротивления [1]. Соотношения для их расчёта должны, с одной стороны, обеспечивать минимальность отклонений от экспериментальных данных в максимально широком диапазоне значений числа Рейнольдса, а с другой стороны, — использовать минимум вычислительных ресурсов. В связи с этим актуальным является получение новых простых соотношений, удовлетворяющих указанным требованиям.

Исследование коэффициента гидравлического сопротивления имеет длительную историю [2, 3]. Обычно он задаётся следующим образом:

$$\lambda = -D \cdot (dP/dx) / ((1/2) \cdot \rho \cdot V^2),$$

где D — диаметр трубы; dP/dx — перепад давления на единицу длины трубы; ρ — плотность жидкости; V — осреднённая по сечению трубы скорость течения.

Как правило, коэффициент гидравлического сопротивления рассматривается в виде функции числа Рейнольдса. Существенные трудности при его определении возникают даже в случае гидравлически гладких труб. Если для ламинарных потоков в гладких трубах из зависимости Гагена–Пуазейля формально следует, что

$$\lambda_{\text{дам}}(\text{Re}) = 64/\text{Re}, \quad (1)$$

где Re — глобальное число Рейнольдса, то для турбулентных потоков ситуация значительно сложнее. Первое наиболее известное соотношение для нахождения коэффициента гидравлического сопротивления (коэффициента Дарси) при турбулентных течениях в гладких трубах было предложено Блазиусом [4] еще в 1913 году:

$$\lambda_{\text{Bl}}(\text{Re}) = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}. \quad (2)$$

В работе [5] сделана попытка обоснования данного соотношения, исходя из схемы Колмогорова диссипации турбулентной энергии.

Выполненные Никурадзе под руководством Прандтля классические эксперименты по изучению динамики потоков в трубах позволили получить более точные оценки для большего диапазона чисел Re [6]:

$$\lambda_{\text{Pr}}(\text{Re}) = \frac{1}{\left(1,95 \cdot \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{Pr}}}) - 0,55\right)^2}. \quad (3)$$

Формула (3) весьма близка к представлению, предложенному Кольбруком [7]:

$$\lambda_{\text{C}}(\text{Re}) = 1,3225 \left/ \left(\ln \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{C}}}} \right) \right)^2 \right. . \quad (4)$$

В то же время, согласно уточнённому в [8] соотношению, ориентированному на большие значения числа Re , имеем

$$\lambda_{\text{Z}}(\text{Re}) = \left[0,813 \cdot \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{Z}}}) - 0,241 - \frac{233}{(\text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{Z}}})^{0,9}} \right]^{-2}. \quad (5)$$

На сегодняшний день наиболее полными и детально проработанными оценками коэффициента гидравлического сопротивления считаются те [9], что получены в ходе экспериментов, выполненных в Орегоне и Принстоне [10, 11]. Несмотря на принципиальное различие экспериментальных установок, значения коэффициента в зонах перекрывающихся значений числа Рейнольдса оказались весьма близки друг к другу (Рис. 1).

Согласно полуэмпирическим оценкам на основе экспериментов [10, 11], осуществлённым в [11], функциональная зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса выглядит как

$$\lambda_{\text{McK}}(\text{Re}) = \left[0,839 \cdot \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{McK}}}) - 0,537 \right]^{-2}. \quad (6)$$

Исследовательской группой Баренблатта [12] было получено следующее соотношение для определения коэффициента в виде функции числа Рейнольдса:

$$\lambda_{\text{B}}(\text{Re}) = \frac{8}{\psi(\text{Re})^{2/(1+\alpha(\text{Re}))}}, \quad (7)$$

где $\psi(\text{Re}) = \frac{e^{3/2} (\sqrt{3} + \alpha(\text{Re}))}{2^{\alpha(\text{Re})} \alpha(\text{Re}) (1 + \alpha(\text{Re})) (2 + \alpha(\text{Re}))}$, $\alpha = (3/2) \frac{1}{\ln(\text{Re})}$, e — основание натурального логарифма.

Калибровка коэффициентов данной модели выполнялась на основе экспериментальных данных [6].

В то же время анализ доступных материалов упомянутых экспериментов дал основание предложить весьма простое соотношение, позволяющее в явном виде находить величину коэффициента гидравлического сопротивления и обеспечивающее хорошее согласование его расчётных и опытных значений:

$$\lambda_L(\text{Re}) = \frac{2 \cdot e}{(\ln(\text{Re}))^{\sqrt{2 \cdot e}}} \quad (8)$$

Зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса, как экспериментальные [10, 11], так и расчётные, получающиеся из аналитических выражений (2)–(6), (8), представлены на рисунке 1 и в таблицах 1 и 2. Все вычисления производились с использованием математического пакета Mathcad 15.

Как видно из рисунка 1, соотношения (2)–(6), (8) обеспечивают хорошее соответствие экспериментальным данным [8, 9]; исключение составляет выражение (2) — модель Блазиуса, при $\text{Re} > 10^5$. Она корректна лишь при $\text{Re} < 8 \cdot 10^4$, что отмечалось еще Прандтлем [4].

Выполненные автором настоящей работы вычисления показали, что значения, найденные по формуле (3), хорошо согласуются со значениями, установленными по (4); так же соотносятся между собой результаты вычислений по (5) и (6). Расчёты и эксперименты можно сопоставить более детально, если обратиться к таблицам 1–4.

Мерой различия наблюдаемых в эксперименте и расчётных значений служили относительные отклонения: $\Delta\lambda_i = |\lambda_{\text{эксп}} - \lambda_{i \text{ расч}}| / \lambda_{\text{эксп}}$. В таблицах 3 и 4 представлены их значения $\Delta\lambda_i$, соответствующие коэффициенту гидравлического сопротивления λ_i , найденному по соотношениям (4), (5), (7), (8); при оценке используются материалы экспериментов в Орегоне (Табл. 3) и Принстоне (Табл. 4).

Если в качестве показателя эффективности рассматриваемых расчётных соотношений принять средние арифметические значения или медианы абсолютных значений относительных отклонений $\Delta\lambda_i$, то наилучшую согласованность с экспериментальными данными, принадлежащими группе из Орегона, обеспечивает соотношение (7), предложенное Баренблаттом [12], при этом среднее значение равняется $\Delta\lambda_B = 2,2040 \cdot 10^{-2}$, а значение медианы — 1,904. Соотношение же (8) характеризуется средним отклонением $\Delta\lambda_L = 2,5268 \cdot 10^{-2}$, а медиана, соответственно, составляет 2,214. Однако (7) даёт большее по сравнению с (8) максимальное значение: $\max|\Delta\lambda_B| = 6,903$.

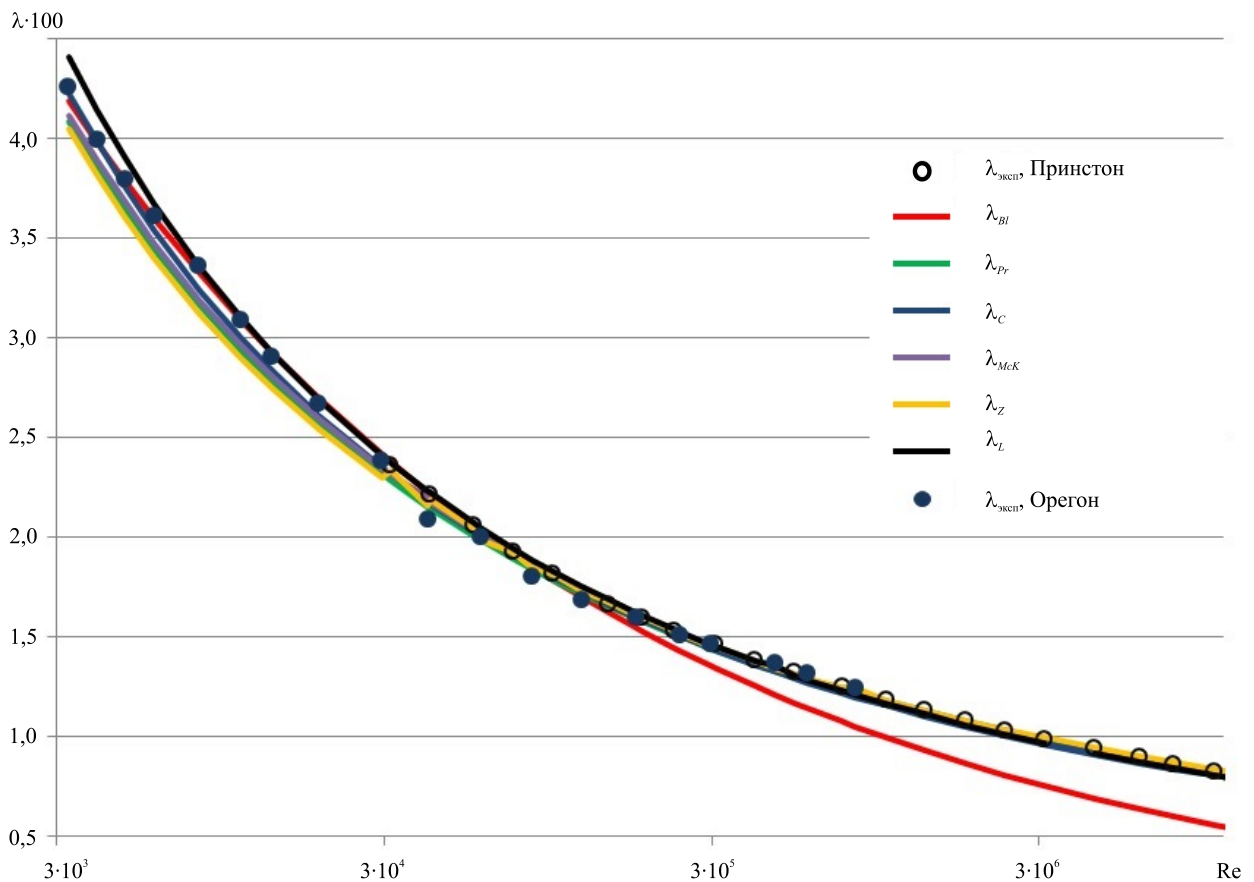


Рис. 1. Зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса (Re), согласующиеся с аналитическими соотношениями (2)–(6), (8) и данными экспериментов [8, 9]

Таблица 1. Данные для сопоставления значений коэффициента гидравлического сопротивления; экспериментальные данные принадлежат группе из Орегона [8, 9], расчётные данные получены с помощью соотношений (4), (5), (7), (8) для диапазона $3.08 \cdot 10^3 < Re < 1.05 \cdot 10^6$ (все значения, кроме числа Re , увеличены в 100 раз)

№ п/п	Re	$\lambda_{\text{экс}}$	λ_C	$\frac{(\lambda_{\text{экс}} - \lambda_C)}{\lambda_{\text{экс}}}$	$\lambda_{\text{МБК}}$	$\frac{(\lambda_{\text{экс}} - \lambda_{\text{МБК}})}{\lambda_{\text{экс}}}$	λ_B	$\frac{(\lambda_{\text{экс}} - \lambda_B)}{\lambda_{\text{экс}}}$	λ_L	$\frac{(\lambda_{\text{экс}} - \lambda_L)}{\lambda_{\text{экс}}}$
1	3264	4,260	4,085	4,108	4,140	2,817	4,140	2,817	4,407	-3,451
2	3980	3,995	3,858	3,429	3,910	2,128	3,910	2,128	4,145	-3,755
3	4835	3,797	3,652	3,819	3,700	2,555	3,700	2,555	3,909	-2,950
4	5959	3,610	3,448	4,488	3,490	3,324	3,512	2,715	3,676	-1,828
5	8162	3,364	3,170	5,767	3,210	4,578	3,220	4,281	3,361	0,089
6	10900	3,088	2,940	4,793	2,980	3,497	2,980	3,497	3,105	-0,551
7	13650	2,903	2,780	4,237	2,820	2,859	2,840	2,170	2,924	-0,723
8	18990	2,670	2,566	3,895	2,603	2,509	2,600	2,622	2,686	-0,599
9	29430	2,386	2,320	2,766	2,305	1,509	2,350	1,509	2,410	-1,006
10	40850	2,086	2,152	-3,164	2,186	-4,794	2,220	-6,424	2,230	-6,903
11	59220	2,000	1,986	0,700	2,015	-0,750	2,033	-1,650	2,048	-2,400
12	84760	1,805	1,842	-2,050	1,807	-3,601	1,890	-4,709	1,890	-4,709
13	120000	1,686	1,716	-1,779	1,742	-3,321	1,758	-4,270	1,757	-4,211
14	176000	1,594	1,590	0,251	1,610	-1,004	1,630	-2,258	1,623	-1,819
15	239700	1,511	1,510	0,066	1,520	-0,596	1,540	-1,919	1,526	-0,993
16	298200	1,462	1,440	1,505	1,463	-0,068	1,470	-0,547	1,462	0,000
17	467800	1,365	1,330	2,564	1,350	1,099	1,350	1,099	1,360	0,366
18	587500	1,313	1,280	2,513	1,290	1,752	1,300	0,990	1,287	1,980
19	105000	1,198	1,156	3,506	1,174	2,003	1,183	1,252	1,161	3,088
20	824200	1,244	1,204	3,215	1,220	1,929	1,230	1,125	1,211	2,653

Таблица 2. Данные для сопоставления значений коэффициента гидравлического сопротивления; экспериментальные значения принадлежат группе из Принстона [9].
 расчётные данные получены с помощью соотношений (4), (5), (7), (8) для чисел Рейнольдса из диапазона $3,08 \cdot 10^3 < Re < 1,05 \cdot 10^6$
 (все значения, кроме числа Re , увеличены в 100 раз)

№ п/п	Re	$\lambda_{\text{эксп}}$	λ_C	$\frac{(\lambda_{\text{эксп}} - \lambda_C)}{\lambda_{\text{эксп}}}$	$\lambda_{\text{МКК}}$	$\frac{(\lambda_{\text{эксп}} - \lambda_{\text{МКК}})}{\lambda_{\text{эксп}}}$	λ_B	$\frac{(\lambda_{\text{эксп}} - \lambda_B)}{\lambda_{\text{эксп}}}$	λ_L	$\frac{(\lambda_{\text{эксп}} - \lambda_L)}{\lambda_{\text{эксп}}}$
1	31310	2,364	2,284	3,384	2,318	1,946	2,371	-0,296	2,337	1,142
2	41440	2,216	2,145	3,204	2,177	1,760	2,222	-0,271	2,196	0,903
3	56360	2,061	2,007	2,620	2,036	1,213	2,071	-0,485	2,055	0,291
4	73970	1,929	1,895	1,763	1,923	0,311	1,949	-1,037	1,940	-0,570
5	98460	1,815	1,786	1,598	1,813	0,110	1,830	-0,826	1,830	-0,826
6	145600	1,666	1,652	0,840	1,677	-0,660	1,687	-1,261	1,692	-1,561
7	184800	1,594	1,577	1,066	1,601	-0,439	1,607	-0,816	1,616	-1,380
8	229600	1,529	1,513	1,046	1,536	-0,458	1,539	-0,654	1,550	-1,373
9	308500	1,461	1,432	1,985	1,454	0,479	1,453	0,548	1,467	-0,411
10	408100	1,384	1,361	1,662	1,382	0,145	1,377	0,506	1,394	-0,723
11	537800	1,324	1,296	2,115	1,316	0,604	1,308	1,208	1,327	-0,227
12	750700	1,249	1,223	2,082	1,242	0,560	1,231	1,441	1,252	-0,240
13	1024000	1,183	1,160	1,944	1,179	0,338	1,166	1,437	1,188	-0,423
14	1342000	1,131	1,111	1,768	1,127	0,354	1,112	1,680	1,135	-0,354
15	1791000	1,079	1,059	1,854	1,076	0,278	1,059	1,854	1,083	-0,371
16	2352000	1,028	1,014	1,362	1,030	-0,195	1,013	1,459	1,030	-0,195
17	3109000	0,989	0,971	1,820	0,986	0,303	0,968	2,123	0,992	-0,303
18	4438000	0,941	0,922	2,019	0,935	0,638	0,915	2,763	0,939	0,213
19	6103000	0,897	0,877	2,230	0,891	0,669	0,871	2,899	0,895	0,223
20	7757000	0,862	0,847	1,740	0,861	0,116	0,841	2,436	0,864	-0,232
21	10310000	0,825	0,813	1,455	0,826	-0,121	0,805	2,424	0,829	-0,485
22	13680000	0,798	0,782	2,005	0,794	0,501	0,772	3,258	0,796	0,251
23	18300000	0,767	0,751	2,086	0,763	0,522	0,741	3,390	0,764	0,391
24	24130000	0,740	0,723	2,297	0,735	0,676	0,712	3,784	0,735	0,676
25	30150000	0,720	0,702	2,500	0,714	0,833	0,691	4,028	0,713	0,972
26	35540000	0,708	0,687	2,966	0,698	1,412	0,675	4,661	0,698	1,412

Таблица 3. Характерные значения относительных отклонений $\Delta\lambda_i$, вычисленные по различным соотношениям для коэффициента гидравлического сопротивления и данным Орегонского эксперимента для диапазона $3,26 \cdot 10^3 < Re < 10^6$ (все значения увеличены в 100 раз)

Расчётные соотношения, используемые для оценки $\Delta\lambda_i$		Среднеарифметическое значение $\Delta\lambda_i$	Медиана $\Delta\lambda_i$	Среднеквадратическое значение $\sigma_{\Delta\lambda_i}$	$\max \Delta\lambda_i $
Обозначение	Номер формулы				
λ_C	(4)	2,9310	3,189	1,5260	5,767
$\lambda_{МсК}$	(5)	2,3340	2,318	1,2953	4,794
λ_B	(7)	2,2040	1,904	1,7970	6,903
λ_L	(8)	2,5268	2,214	1,4792	6,420

Таблица 4. Характерные значения относительных отклонений $\Delta\lambda_i$, вычисленные по различным соотношениям для коэффициента гидравлического сопротивления и данным Принстонского эксперимента для диапазона $3,13 \cdot 10^4 < Re < 3,5 \cdot 10^7$ (все значения увеличены в 100 раз)

Расчётные соотношения, используемые для оценки $\Delta\lambda_i$		Среднеарифметическое значение $\Delta\lambda_i$	Медиана $\Delta\lambda_i$	Среднеквадратическое значение $\sigma_{\Delta\lambda_i}$	$\max \Delta\lambda_i $
Обозначение	Номер формулы				
λ_C	(4)	1,9780	1,964	0,6762	3,384
$\lambda_{МсК}$	(5)	0,6016	0,490	0,4825	1,946
λ_B	(7)	1,8280	1,450	1,2510	4,661
λ_L	(8)	0,6210	0,417	0,4370	1,561

При сопоставлении результатов вычислений по авторской формуле с материалами Принстонского эксперимента оказывается, что среди всех рассмотренных расчётных формул предлагаемое в настоящей работе соотношение (8) обеспечивает наиболее низкие значения как медианных величин ($\Delta\lambda_L \sim 0,417 \cdot 10^{-2}$), так и показателя максимальных значений отклонений — $\max|\Delta\lambda_L| \sim 1,561 \cdot 10^{-2}$. Минимальные среднеарифметические значения $\Delta\lambda_i$ имеют место при использовании соотношения (5), введённого в [9], но показатель максимального отклонения получается при этом следующим: $\max|\Delta\lambda_z| = 1,946 \cdot 10^{-2}$. Если оценивать эффективность рассматриваемых расчётных соотношений по показателю $\max|\Delta\lambda_i|$, то в сопоставлении с экспериментальными данными из Принстона наибольшие отклонения даёт соотношение (7): $\max|\Delta\lambda_B| = 4,661 \cdot 10^{-2}$. Следует заметить, что (7) приводит к самым максимальным отклонениям также и при сравнении с экспериментальными данными, полученными в Орегоне.

Выводы

Предложено новое простое аналитическое соотношение, позволяющее в явном виде рассчитывать коэффициент гидравлического сопротивления для турбулентных течений вблизи гидравлически гладких поверхностей. Проведено сопоставление значений, полученных на основе формулы, введённой автором настоящей работы, со значениями, найденными по известным из литературных источников соотношениям для этого коэффициента, а также с данными Орегонского и Принстонского экспериментов, опубликованными в 2004 году. Показано, что хотя при описании результатов Орегонского эксперимента новое выражение несколько уступает некоторым из всех рассмотренных аналитических выражений по величине показателя $\max|\Delta\lambda_L|$, однако среди всех оно наилучшим образом согласуется с данными Принстонского эксперимента.

Литература

1. Козелков А.С., Курулин В.В., Пучкова О.Л., Лашкин С.В. Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 40-51. DOI
2. Бисвас А.К. Человек и вода. – Л.: Гидрометеоздат, 1975. – 288 с.
3. Форхгеймер Ф. Гидравлика. – М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1935. – 616 с.
4. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 574 с.

5. Gioia G., Bombardelli F.A. Scaling and similarity in rough channel flows // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 88, no. 1. – 014501. DOI
6. Nikuradze J. Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren // *VDI. Forschungsheft.* – 1932. – No. 356; Рус. пер. в сб.: Проблемы турбулентности / под. ред. М.А. Великанова, Н.Т. Швейковского. – М.-Л.: ОНТИМ. – 1936. – С. 75-150.
7. Colebrook C.F. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe lows // *J. of the ICE.* – 1939. – Vol. 11, no. 4. – P. 133-156. DOI
8. Zagarola M.V., Smits A.J. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* – 1998. – Vol. 373. – P. 33-79. DOI
9. Высоцкий Л.И. Рекомендации по использованию формул для коэффициента Дарси при расчете распределения осредненных скоростей // *Научный журнал РосНИИПМ.* – 2014. – № 4 (16). – С. 204-212.
10. Swanson C.J., Julian B., Ihas G.G., Donnelly R.J. Pipe flow measurements over a wide range of Reynolds numbers using liquid helium and various gases // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 461. – P. 51-60. DOI
11. McKeon B.J., Swanson C.J., Zagarola M.V., Donnelly R.J., Smits A.J. Friction factors for smooth pipe flow // *J. Fluid Mech.* – 2004. – Vol. 511. – P. 41-44. DOI
12. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг: Учеб. пособие. – Долгопрудный МО: Издательский Дом Интеллект, 2009. – 216 с.

References

1. Kozelkov A.S., Kurulin V.V., Puchkova O.L., Lashkin S.V. Simulation of turbulent flows using an algebraic Reynolds stress model with universal wall functions. *Vysisl. meh. splos. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 40-51. DOI
2. Biswas A.K. *History of hydrology*. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1970.
3. Forchheimer P. *Hydraulik* [Hydraulic]. Berlin-Leipzig: Teubner, 1914.
4. Prandtl L. *Führer durch die Strömungslehre*. Braunschweig: Vieweg, 1942; English translation of 3rd edition (1949): *Essentials of fluid dynamics: with applications to hydraulics, meteorology and other subjects*. London, UK: Blackie, 1952.
5. Gioia G., Bombardelli F.A. Scaling and similarity in rough channel flows. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, no. 1, 014501. DOI
6. Nikuradze J. Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren [Laws governing turbulent flow in smooth pipes]. *VDI. Forschungsheft*, 1932, no. 356.
7. Colebrook C.F. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe lows. *J. of the ICE*, 1939, vol. 11, no. 4, pp. 133-156. DOI
8. Zagarola M.V., Smits A.J. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 373, pp. 33-79. DOI
9. Vysotskiy L.I. Guidance for the use of formulas for Darcy coefficient calculating the distribution of averaged velocities. *Nauchnyj zhurnal Rossijskogo NII problem melioratsii – Scientific Journal of Russian Research Institute of Land Improvement Problems*, 2014, no. 4 (16), pp. 204-212.
10. Swanson C.J., Julian B., Ihas G.G., Donnelly R.J. Pipe flow measurements over a wide range of Reynolds numbers using liquid helium and various gases. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 461, pp 51-60. DOI
11. McKeon B.J., Swanson C.J., Zagarola M.V., Donnelly R.J., Smits A.J. Friction factors for smooth pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 511, pp. 41-44. DOI
12. Barenblatt G.I. *Scaling*. Cambridge University Press, 2003. 171 p.

Поступила в редакцию 05.03.2015; опубликована в электронном виде 30.12.2015