

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕСТНЫХ И ОБЩИХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Д.А. Баранова, В.В. Карпов, А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Устойчивость тонкостенных оболочечных конструкций исследуется в рамках геометрически нелинейной теории оболочек. При этом процесс деформирования оболочки удается проследить при различных уровнях нагрузки. По изменению формы изогнутой поверхности оболочки до и после критических нагрузок можно определить местные и общие формы потери устойчивости. Предполагается, что материал оболочки может быть как изотропным, так и ортотропным, но в процессе деформирования он сохраняет линейно-упругие свойства. Математическая модель деформирования оболочки представляет собой функционал ее полной потенциальной энергии деформации. Для минимизации функционала применяются две методики. Одна из них основывается на методе L-BFGS при дискретной аппроксимации искомым функций NURBS-поверхностями (это дает возможность учитывать различные формы закрепления контура оболочки и сложный вид этого контура), другая – на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру при непрерывной аппроксимации искомым функций перемещений и углов поворота нормали (с помощью этой методики находят верхние и нижние значения критических нагрузок и положения точек бифуркации). Совместное использование методик позволяет исследовать как докритическое, так и закритическое поведение конструкции и установить ее местные и общие формы потери устойчивости и их взаимосвязь. Представлены графики зависимости «нагрузка q – прогиб W », отображающей равновесное состояние оболочки, на которых видны все моменты потери ею устойчивости вследствие «прохлопывания» какой-то ее части. При этом каждая потеря устойчивости вызывает существенную деформацию изогнутой поверхности. Показаны формы оболочки на докритической и закритической стадиях, для наглядности откладываемые от ее трехмерной недеформированной поверхности. После общей потери устойчивости оболочка в ответ на нагрузку деформируется уже без существенного изменения формы поверхности, то есть ведет себя подобно плите.

Ключевые слова: оболочки, геометрическая нелинейность, устойчивость, местная потеря устойчивости, градиентный метод, ортотропия, метод продолжения решения по наилучшему параметру

COMPUTER SIMULATION OF LOCAL AND GLOBAL BUCKLING OF THIN-WALLED SHELLS

D.A. Baranova, V.V. Karpov and A.A. Semenov

Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russian Federation

Stability of thin-walled structures is investigated on the basis of the geometrically nonlinear theory of shells. This allows us to monitor a series of shell deformation processes under different load changes. The local and general loss of stability can be determined by observing changes in the shape of the shell curved surface before and after critical loads. The shell material can be isotropic or orthotropic, but linear-elastic. A mathematical model of deformation of a shell is the functional of total potential energy of deformation of the shell. Two methods are applied to minimize the total energy functional of deformation of the shell. One is based on the method of L-BFGS with discrete approximation of the unknown functions by NURBS-surfaces. This enables taking into account various forms of fixing of the shell contour and the complex shape of this circuit. The other employs the Ritz method and the best parameter continuation method in the continuous approximation of the unknown displacement functions and the angles of rotation of the normal. This technique allows us to find the upper and lower critical loads and the bifurcation point. A combination of these techniques makes it possible to study both the subcritical and supercritical behavior of the structure and to identify the local and global buckling of the shell and their relationship. On the curve of equilibrium states versus “load q – deflection W ” one can see all moments of buckling of the shell caused by “swatting” of some part of it. Thus, after each buckling a significant change in the shape of the curved surface is observed. For illustration purposes the changes in the shell shape at subcritical and supercritical stages are plotted against its three-dimensional surface. After the general loss of stability the shell deforms under loading without any significant change in its shape, i.e. it behaves as a plate.

Key words: shell, geometric nonlinearity, stability, local buckling, gradient method, orthotropy, best parameter continuation method

1. Введение

В современном строительстве, машиностроении, судо-, авиастроении и других областях широко применяются элементы в виде оболочек [1–3], и при эксплуатации остро встают вопросы их устойчивости. Устойчивости оболочек посвящено большое число публикаций [4–22 и другие], имеются целые обзоры [23–25], однако в основном исследуются изотропные оболочки, а из нагрузок находятся первые критические, то есть не рассматривается закритическое поведение конструкций. К настоящему времени появились композитные материалы (углепластики, стеклопластики, боропластики и другие), обладающие высокой прочностью, огнеупорностью, химической и коррозионной стойкостью, легкостью, и их использование в практических целях заслуживает особого внимания [26–29]. Так как при изготовлении армирующие элементы в материале часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат, то такие изделия можно считать ортотропными [30].

Вопросам локальной потери устойчивости посвящены работы [31–33]. Изучение связанных форм выпучивания изотропных оболочек составляет содержание работ [34–36]. Так, А.И. Маневичем [34]

получена система уравнений главного нелинейного приближения для задачи потери устойчивости подкрепленной тонкостенной конструкции при конечных перемещениях с учетом существования множества местных форм с близкими критическими нагрузками. Предполагается, что спектр собственных значений для общих форм не настолько плотен, чтобы можно было ограничиться рассмотрением одной формы с наименьшим собственным значением. В работе П.Е. Товстика [35] форма потери устойчивости установлена путем решения задач на собственные значения. В [9] Н.В. Валишвили в осесимметричной постановке исследована устойчивость оболочек вращения с учетом геометрической нелинейности. Затем по характеру кривой «нагрузка – прогиб» определены формы потери устойчивости. В более общем виде взаимосвязь общих и местных форм потери устойчивости для ребристых пологих оболочек рассмотрена в работе В.П. Ильина и В.В. Карпова [36], где из решения геометрически нелинейных уравнений отыскиваются критические нагрузки. Но в большинстве процитированных выше публикаций применяется подход, согласно которому за нахождением спектра критических нагрузок не следует их анализ с целью выявления взаимосвязи с формами потери устойчивости как местными, так и общими.

Данная публикация является продолжением работы [36]; для некоторых вариантов тонкостенных оболочечных конструкций (не только изотропных, но и ортотропных) на основе двух алгоритмов прослеживается взаимосвязь местных и общих форм потери устойчивости с учетом закритического поведения. Используемая методика позволяет достаточно просто отделить местные и общие формы потери устойчивости и изучить последовательность их возникновения по изменению формы изогнутой поверхности оболочки до и после потери устойчивости. Кроме того, вычисление критических нагрузок осуществляется с достаточно высокой точностью [20], иначе погрешность в значениях нагрузок может составлять от 20% до 100%.

Возобновление в последние годы интереса к оболочечным конструкциям обусловлено не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, совершенствованием и развитием вычислительной техники. Теперь появилась возможность по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек.

2. Постановка и описание исследования

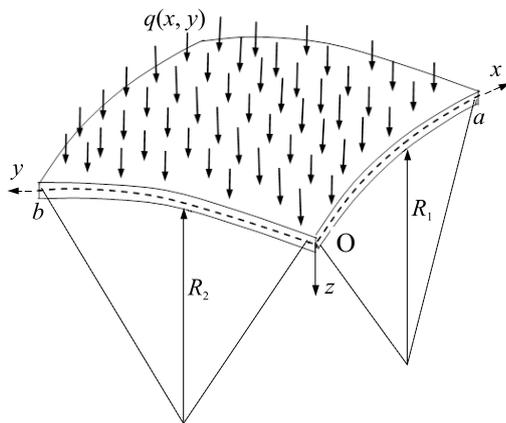


Рис. 1. Общий вид тонкостенной оболочки с осями локальной системы координат

x, y, z соответственно; $\Psi_x = \Psi_x(x, y)$, $\Psi_y = \Psi_y(x, y)$ — функции углов поворота нормалей к срединной поверхности в плоскостях Oxz , Oyz .

Геометрические соотношения для срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности записываются как [37]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \\ \theta_1 &= -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right),\end{aligned}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — деформации удлинения вдоль осей координат x, y ; γ_{xy} — деформация сдвига

Будем рассматривать тонкостенные оболочки, схематичное изображение которых с осями локальной криволинейной системы координат представлено на рисунке 1. Срединную поверхность (показана штриховыми линиями) примем за координатную поверхность.

Применяя гипотезы тонкостенности и учитывая поперечные сдвиги, сведем деформирование трехмерного тела к деформированию двумерного тела. При этом перемещения в слое, отстоящем на расстоянии z от срединной поверхности, примут вид

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W,$$

где $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$, $W = W(x, y)$ — функции перемещений точек срединной поверхности вдоль осей

в плоскости Oxy ; k_x, k_y — главные кривизны оболочки вдоль осей x и y ; A, B — параметры Ламе, характеризующие геометрию оболочки.

Для связи деформаций и напряжений используем физические соотношения, которые строятся на основе обобщенного закона Гука. Выразив напряжения через деформации, для тонкостенной ортотропной оболочки при линейно-упругом деформировании получим [38]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right], \quad \tau_{xz} = G_{13} k f(z) (\Psi_x - \theta_1), \quad \tau_{yz} = G_{23} k f(z) (\Psi_y - \theta_2),\end{aligned}$$

где $f(z) = 6(1/4 - z^2/h^2)$ — функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине оболочки h ; k — числовой коэффициент, $k = 5/6$ [39]; E_1, E_2 — модули упругости в направлениях x, y ; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига в плоскостях Oxy, Oxz, Oyz соответственно; μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты Пуассона; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ — функции изменения кривизн и функция кручения:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) \right).\end{aligned}$$

Уравнения равновесия и статические граничные условия найдем из соотношения для вариации полной энергии деформации оболочки

$$\delta(\Pi - A) = 0,$$

где Π — потенциальная энергия деформации оболочки, A — работа внешних нагрузок, имеющие вид:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + \right. \\ &\quad \left. + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) \right\} AB dx dy, \\ A &= \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \{ qW \} AB dx dy.\end{aligned}$$

Здесь N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} — нормальные усилия вдоль осей x и y и сдвиговые усилия в плоскости Oxy ; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} — изгибающие моменты в направлении Ox и Oy и крутящие моменты; Q_x, Q_y — поперечные (перерезывающие) силы в плоскостях Oxz и Oyz ; $q(x, y)$ — распределенная внешняя нагрузка.

Однако искомые функции перемещений $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$, $W = W(x, y)$ и функции углов поворота нормалей $\Psi_x = \Psi_x(x, y)$, $\Psi_y = \Psi_y(x, y)$ можно найти из условий минимума функционала $\Theta = \Pi - A$, применив метод Ритца. Этот функционал после некоторых преобразований принимает вид [40]:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{E_1}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ h\varepsilon_x^2 + \bar{G}_2 h\varepsilon_y^2 + 2h\mu_{21}\varepsilon_x\varepsilon_y + \bar{G}_{12} h\gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13} kh(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23} kh(\Psi_y - \theta_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{12} \chi_1^2 + \frac{h^3}{12} \bar{G}_2 \chi_2^2 + \frac{h^3}{6} \mu_{21} \chi_1 \chi_2 + \frac{h^3}{3} \bar{G}_{12} \chi_{12}^2 - 2 \frac{q(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1} W \right\} AB dx dy.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\bar{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}$, $\bar{G}_{12} = \frac{G_{12}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}$, $\bar{G}_{13} = \frac{G_{13}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}$, $\bar{G}_{23} = \frac{G_{23}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}$. В этом функционале

комплексно учитываются такие факторы, как ортотропия материала, геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги.

При установлении местных и общих форм потери устойчивости оболочек необходимо использовать методики, позволяющие исследовать как докритическое, так и закритическое поведение конструкций. С этой целью рассмотрим два алгоритма.

2.1. Градиентный метод — методика L-BFGS

Первый алгоритм основан на аппроксимации искомым функций неоднородными рациональными B-сплайнами (NURBS-поверхностями — Non-Uniform Rational Bezier Spline) и на определении неизвестных параметров задачи градиентным методом нахождения минимума функционала (при помощи алгоритма L-BFGS — Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno). Подробно первый алгоритм представлен в работе [41]. Он позволяет отыскивать и местные, и общие формы потери устойчивости оболочек, но не способен вычислять уровень нижних критических нагрузок и местоположение точек бифуркации.

Итак, пусть дан функционал полной энергии деформации оболочки $\mathcal{E}(U, V, W, \Psi_x, \Psi_y, q)$. Неизвестные функции представим в виде следующих поверхностей NURBS:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y) U_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y)}, & V(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y) V_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y)}, \\
 W(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y) W_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y)}, & \Psi_x(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y) PS_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y)}, \\
 & & \Psi_y(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y) PN_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(x) N_{j,q}(y)},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $N_{i,p}(x)$, $N_{j,q}(y)$ — базисные функции (многочлены, степени которых p , q могут быть любыми); $U_{i,j}$, $V_{i,j}$, $W_{i,j}$, $PS_{i,j}$, $PN_{i,j}$ — контрольные точки сплайнов (являются неизвестными числовыми параметрами); n и m — количество членов разложения в направлении осей Ox , Oy соответственно.

Подставив (2) в функционал (1), получим функцию, зависящую от искомым числовых параметров. Для нахождения минимума функции используем метод L-BFGS. Начальное приближение выберем нулевым, последующие приближения вычислим по формулам:

$$\begin{aligned}
 U_{k+1} &= U_k - G^{-1}(U) \frac{\partial \mathcal{E}(X_k)}{\partial U}, & V_{k+1} &= V_k - G^{-1}(V) \frac{\partial \mathcal{E}(X_k)}{\partial V}, & W_{k+1} &= W_k - G^{-1}(W) \frac{\partial \mathcal{E}(X_k)}{\partial W}, \\
 PS_{k+1} &= PS_k - G^{-1}(PS) \frac{\partial \mathcal{E}(X_k)}{\partial PS}, & PN_{k+1} &= PN_k - G^{-1}(PN) \frac{\partial \mathcal{E}(X_k)}{\partial PN}.
 \end{aligned}$$

Здесь $U_k, V_k, W_k, PS_k, PN_k$ — матрицы коэффициентов $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, PS_{ij}, PN_{ij}$ из (2), отвечающие k -й итерации; $X_k = (U_k, V_k, W_k, PS_k, PN_k)^T$; U принимает значения $\{U_{lp}\}$ ($l = 0, \dots, m; p = 0, \dots, n$), аналогичный смысл имеют V, W, PS, PN ; G^{-1} — обратные гессианы, где гессиан, например для U_k , выглядит как

$$G(U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{1,1}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{1,1} U_{1,2}} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{1,1} U_{n,m}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{1,2} U_{1,1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{1,2}^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{1,2} U_{n,m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{n,m} U_{1,1}} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{n,m} U_{1,2}} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial U_{n,m}^2} \end{bmatrix}.$$

Для нахождения критической нагрузки задача считается при нагрузках от начальной (q_0) до конечной (q_n) с небольшим шагом. При нагрузке q_0 первое приближение берется нулевым, а при следующих нагрузках за начальное приближение принимается решение, полученное при предыдущей нагрузке. Таким образом находится напряженно-деформированное состояние оболочки при возрастании значения параметра нагрузки.

По данной методике составлена программа ShellCalc (Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2011613073).

2.2. Метод Рунца и метод продолжения решения по наилучшему параметру — методика МПРНП

Во втором алгоритме при исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки решается вариационная задача отыскания минимума функционала (1). Сначала в функционале перейдем к безразмерным параметрам $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, $\bar{U} = \frac{aUA}{h^2}$, $\bar{V} = \frac{bVB}{h^2}$, $\bar{W} = \frac{W}{h}$, $\bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}$, $\bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h}$, $k_\eta = hk_y$, $k_\xi = hk_x$, $\bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}$. После этого применим метод Рунца. Тогда неизвестные безразмерные функции представляются в виде

$$\begin{aligned}\bar{U}(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^N U(I)Z1(I); & \bar{V}(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^N V(I)Z2(I); & \bar{W}(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^N W(I)Z3(I); \\ \bar{\Psi}_x(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^N PS(I)Z4(I); & \bar{\Psi}_y(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^N PN(I)Z5(I),\end{aligned}\quad (3)$$

где $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$ — неизвестные безразмерные числовые коэффициенты, а $Z1(I), \dots, Z5(I)$ — известные аппроксимирующие функции аргументов ξ и η (безразмерных координат конструкции), удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки; N — количество членов разложения.

Подставим (3) в (1), найдем производные от функционала по неизвестным числовым параметрам и приравняем их к нулю. В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Для ее разрешения прибегнем к методу продолжения решения по параметру, который позволяет свести нелинейную систему к последовательности систем линейных алгебраических уравнений. Существует модификация рассматриваемого алгоритма, основанная на выборе наилучшего параметра продолжения (МПРНП) [42], где в качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги λ кривой множества решений, и, в отличие от классического варианта метода, здесь параметр нагрузки \bar{P} является равноправным с остальными неизвестными, поэтому приходится решать задачу в безразмерных параметрах. Метод продолжения решения по наилучшему параметру при условии адаптивного выбора сетки позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации [43], так как при обходе особых точек значение параметра нагрузки может уменьшаться.

Итак, система нелинейных алгебраических уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\sum_{I=1}^N [U(I)C1(I,l) + V(I)C2(I,l) + W(I)C3(I,l) + PS(I)C4(I,l) + PN(I)C5(I,l)] + A_1(l) &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C6(I,l) + V(I)C7(I,l) + W(I)C8(I,l) + PS(I)C9(I,l) + PN(I)C10(I,l)] + A_2(l) &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C11(I,l) + V(I)C12(I,l) + W(I)C13(I,l) + PS(I)C14(I,l) + PN(I)C15(I,l)] + A_3(l) - CP(l)\bar{P} &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C16(I,l) + V(I)C17(I,l) + W(I)C18(I,l) + PS(I)C19(I,l) + PN(I)C20(I,l)] + A_4(l) &= 0, \\ \sum_{I=1}^N [U(I)C21(I,l) + V(I)C22(I,l) + W(I)C23(I,l) + PS(I)C24(I,l) + PN(I)C25(I,l)] + A_5(l) &= 0, \\ (l = 1, 2, \dots, N),\end{aligned}\quad (4)$$

где коэффициенты представляют собой двойные интегралы от комбинаций входных параметров и аппроксимирующих функций; $A_1(l), \dots, A_5(l)$ — нелинейные члены.

Запишем полученную систему в векторной форме:

$$F(\tilde{X}) = 0,$$

$$\tilde{X} = (X, \bar{P})^T = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I), \bar{P})^T \quad (I = 1..N),$$

где вектор X — вектор неизвестных числовых параметров, \bar{P} — параметр нагрузки.

Известно, что у оболочки в ненагруженном состоянии значения перемещений и углов поворота нормали равны нулю, то есть

$$F(X^0, \bar{P}^0) = 0, \quad X^0 = 0, \quad \bar{P}^0 = 0.$$

Следует заметить, что параметр длины дуги λ не входит явно в систему уравнений и определяется по формуле:

$$(d\lambda)^2 = \sum_{I=1}^N [(dU(I))^2 + (dV(I))^2 + (dW(I))^2 + (dPS(I))^2 + (dPN(I))^2] + (d\bar{P})^2.$$

Продифференцировав (4) по параметру λ и считая, что переменные вектора \tilde{X} зависят от него, получим систему дифференциальных уравнений

$$\bar{J} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = 0 \quad (5)$$

с начальным условием

$$\tilde{X}(\lambda_0) = 0, \quad \lambda_0 = 0. \quad (6)$$

Здесь $\bar{J} = \frac{\partial F(\tilde{X})}{\partial \tilde{X}}$ — расширенная матрица Якоби, а J — матрица Якоби вектор-функции F , имеющая определитель $\det(J)$. Точки, в которых выполняется условие $\det(J) \neq 0$, называются регулярными, а точки, в которых $\det(J) = 0$, — особыми. Особые точки соответствуют или критическим нагрузкам, или точкам бифуркации.

Процесс продолжения решения по наилучшему параметру системы нелинейных уравнений (4) на каждом шаге сводится к решению задачи Коши (5), (6). Применение для ее реализации метода Эйлера приводит к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений относительно приращений искомых числовых параметров на каждом этапе продолжения решения по параметру.

С учетом данной методики была модернизирована программа OrthShell: Strength and Stability of Orthotropic Shells (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014614627), предназначенная для проведения расчетов в безразмерных параметрах.

3. Верификация представленных алгоритмов

Для проверки достоверности работы алгоритмов, отвечающих методикам L-BFGS и МПРНП, проведем с их помощью расчеты конструкций, которые рассматривались в [44, 45]. Параметры всех использованных материалов приводятся в таблице 1; материалы из работ [44, 45] обозначены как Материал 1

Таблица 1. Механические характеристики материалов в тестовых задачах

Характеристика	Материалы				
	Изотропные		Ортотропные		
	Сталь	Материал 1	Углепластики		Материал 2
ЛУ-П/ЭНФБ			М60J/Ероху		
E_1 , МПа	$2,1 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$	$3,3 \cdot 10^5$	$0,2 \cdot 10^5$
μ_{12}	0,3	0,3	0,3	0,32	0,1
E_2 , МПа	$2,1 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^5$	$0,97 \cdot 10^4$	$0,59 \cdot 10^4$	$0,4 \cdot 10^5$
G_{12} , МПа	$0,807 \cdot 10^5$	$1,154 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$
G_{13} , МПа	$0,807 \cdot 10^5$	$1,154 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$
G_{23} , МПа	$0,807 \cdot 10^5$	$1,154 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$
Плотность, кг/м ³	7800	–	1500	1500	–

и Материал 2. Во всех исследованных случаях оси ортотропии считаются совпадающими с локальной системой координат оболочки, при этом направление оси ортотропии 1 совпадает с направлением оси x (и безразмерной оси ξ).

В работе [44] исследовались изотропные и ортотропные пологие оболочки двойкой кривизны, квадратные в плане и шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру, в алгоритме использовался метод DQM (Differential Quadrature Method). После приведения входных данных к обозначениям, принятым в данной работе, получим следующие характеристики конструкций:

Тест 1. Линейные размеры $a = b = 0,2$ м, толщина $h = 0,00022$ м, радиусы главных кривизн $R_1 = R_2 = 7,2727$ м, Материал 1, изотропный.

Тест 2. Линейные размеры $a = b = 0,2$ м, толщина $h = 0,00022$ м, радиусы главных кривизн $R_1 = 5$ м, $R_2 = 3,33$ м, Материал 2, ортотропный.

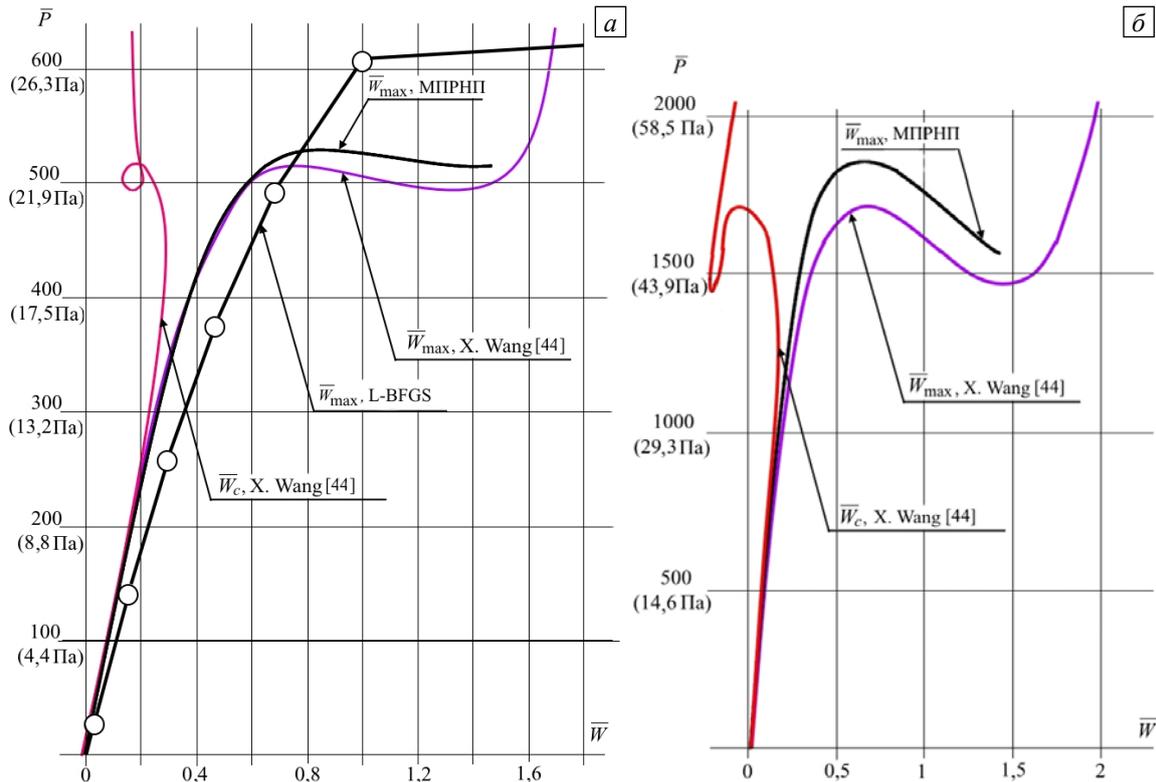


Рис. 2. Графики «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » для тестовых задач 1 (а) и 2 (б), полученные в [44] и в данной работе (методики L-BFGS и МПРПИ); \bar{W}_c – прогиб в центре конструкции, \bar{W}_{max} – максимальный прогиб

Следует отметить, что в предлагаемой здесь модели, в отличие от модели из работы [44], учитывается влияние поперечных сдвигов.

На рисунке 2 для сравнения показаны графики «нагрузка – прогиб» (после перехода к размерным параметрам и сопоставления координатных осей), отвечающие решениям тестовых задач 1 и 2. Также приводятся данные из статьи [44], найденные методом DQM. Автор сопоставляет полученные им значения критических нагрузок с результатами расчета в ПК NASTRAN (FEM) и работы [45] (в которой в основе алгоритма лежат методы Partitioned Solution Method (PSM) и Adjacent Equilibrium Method (AEM)). В [44] отмечается, что в случае несимметричной ортотропной оболочки имеет место расхождение результатов в несколько раз большее, чем для оболочки симметричной изотропной. Значения критических нагрузок, вычисленные авторами настоящей работы и авторами [44, 45], содержит таблица 2.

Таблица 2. Значения критических нагрузок

Тестовая задача	q_{cr} , МПа					
	D.H. van Campen и др. [45]		X. Wang [44]		Авторские результаты	
	PSM	AEM	DQM	FEM	L-BFGS	МПРПИ
1	25,14	31,92	22,74	22,63	27,09	23,22
2	57,86	76,71	50,76	52,89	–	54,35

На рисунке 3 показаны поля прогибов, полученные в [44] и в данной работе для тестовой задачи 2. Для удобства сопоставления результатов приняты коэффициенты масштабирования прогиба 5 и 10 соответственно. Как видно из рисунка, распределение прогибов по полю оболочки имеет схожий характер, что говорит о хорошей согласованности результатов, принадлежащих разным авторам.

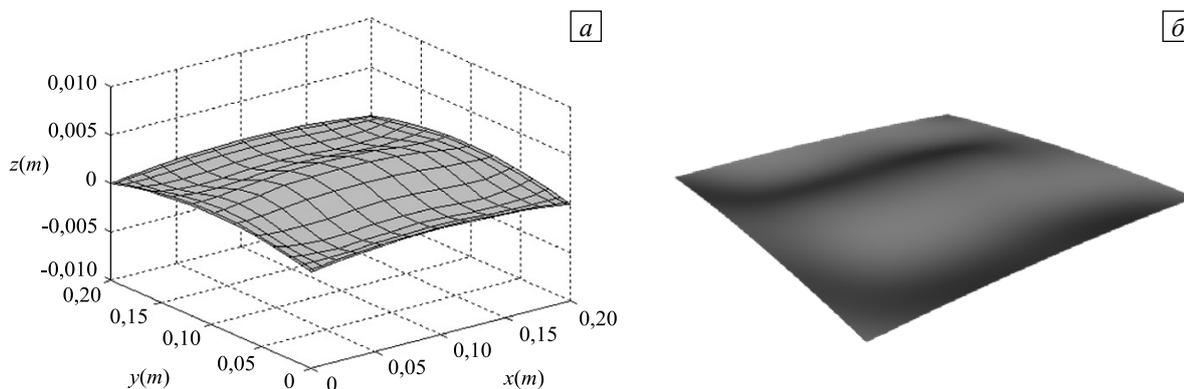


Рис. 3. Прогибы срединной поверхности оболочки в момент потери устойчивости в тестовой задаче 2: по данным из [44] (а); авторские результаты по методике МПРНП (б)

4. Полученные результаты

Рассмотрим тонкостенные оболочки, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру (при $x = a_1$, $x = a$ $U = V = W = M_x = \Psi_y = 0$; при $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $U = V = W = M_y = \Psi_x = 0$), находящиеся под действием равномерно распределенной нагрузки и выполненные из материалов, механические характеристики которых приведены в таблице 1.

Стальная цилиндрическая панель с радиусом кривизны $r = 5,4$ м и толщиной $h = 0,01$ м, размерами $a = 20$ м вдоль оси x (образующей) и углом разворота $y_k = 1,57$ рад вдоль оси y (направляющей). Используем алгоритм, основанный на градиентном методе (методика L-BFGS). В разложении искомых функций (2) $n = m = 22$, так как дальнейшее увеличение n и m практически не влияет на результаты решения [20].

На рисунке 4 представлены графики «нагрузка q – прогиб W » в характерных точках панели (в ее центре — W_c , в точке, отстоящей по осям x и y на четверть линейного размера от начала локальной системы координат — W_4 , и наибольший прогиб, вычисляемый по расчетной области — W_{\max}).

Как видно из рисунка 4, происходит несколько перескоков в новое равновесное состояние (несколько потерь устойчивости): первая потеря устойчивости является местной, при этом в центре конструкция выгибается в обратную сторону. При следующей (уже общей) потере устойчивости все части оболочки прогибаются в одну сторону, после чего прогибы во всех рассматриваемых точках начинают монотонно возрастать.

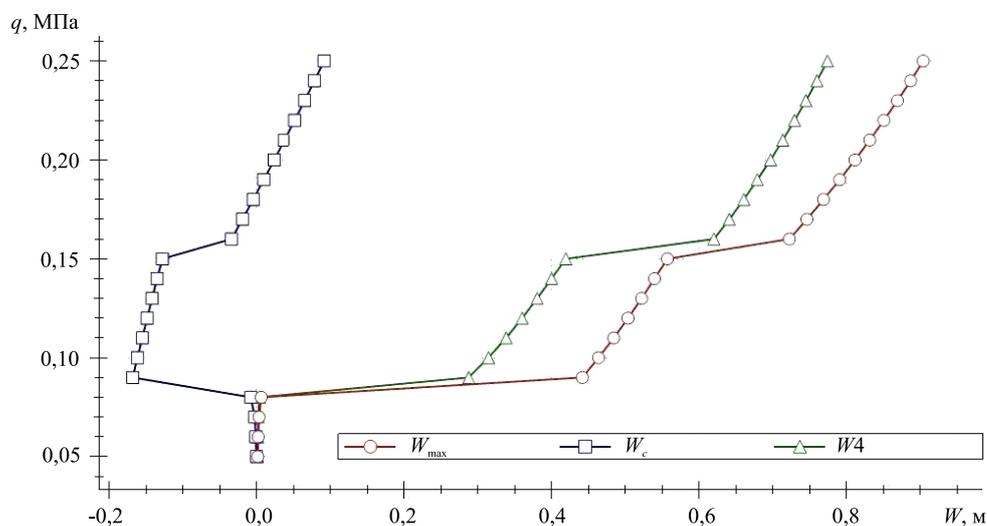


Рис. 4. График «нагрузка q – прогиб W » для рассматриваемой цилиндрической панели

Каждому переходу в новое равновесное состояние соответствует значение верхней критической нагрузки. Так как значения, получаемые данным методом, в соответствии с нагрузкой всегда только возрастают, вычислить значения нижних критических нагрузок здесь невозможно.

На рисунках 5а и 5б показаны формы прогиба панели до и после потери устойчивости.

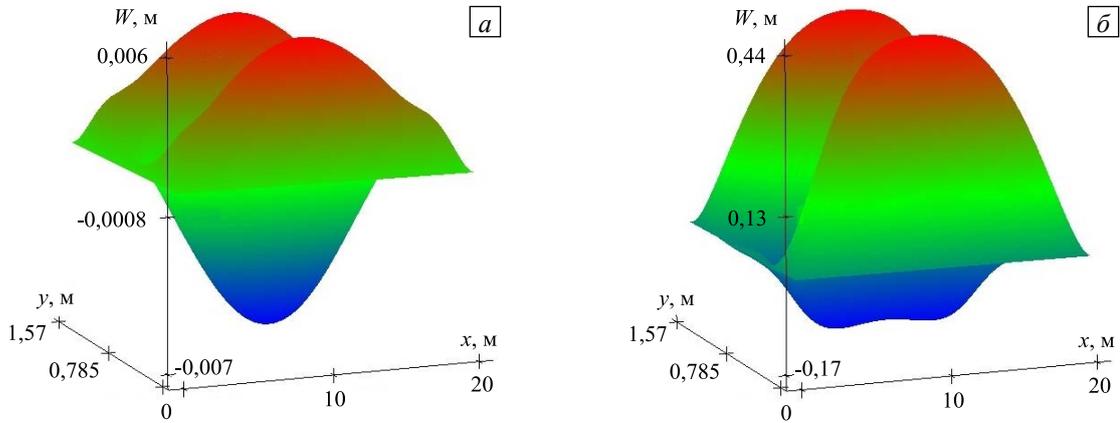


Рис. 5. Форма прогиба стальной цилиндрической панели до потери устойчивости (а), после потери устойчивости (б)

Таким образом, алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска, позволяет исследовать и закритическое состояние оболочки, но найти нижние критические нагрузки не представляется возможным, так как они находятся на ветви кривой равновесных состояний, физически не реализующихся.

Теперь изучим цилиндрическую панель, совпадающую по геометрии с рассмотренной ранее, но выполненную из ортотропного материала (углепластика ЛУ-П/ЭНФБ). Применим алгоритм МПРНП. В разложении искомых функций (3) примем $N = 16$, так как дальнейшее увеличение числа N практически не изменяет результатов решения [20].

На рисунке 6 приведен график «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » для обсуждаемой конструкции в характерных точках: в центре (кривая \bar{W}_c); в точке, отстоящей по осям x и y на четверть линейного размера от начала локальной системы координат (кривая \bar{W}_4); в точке, отстоящей на одну восьмую часть, (кривая \bar{W}_8), и наибольший прогиб (кривая \bar{W}_{max}). В обозначенных на нем точках A, \dots, F покажем

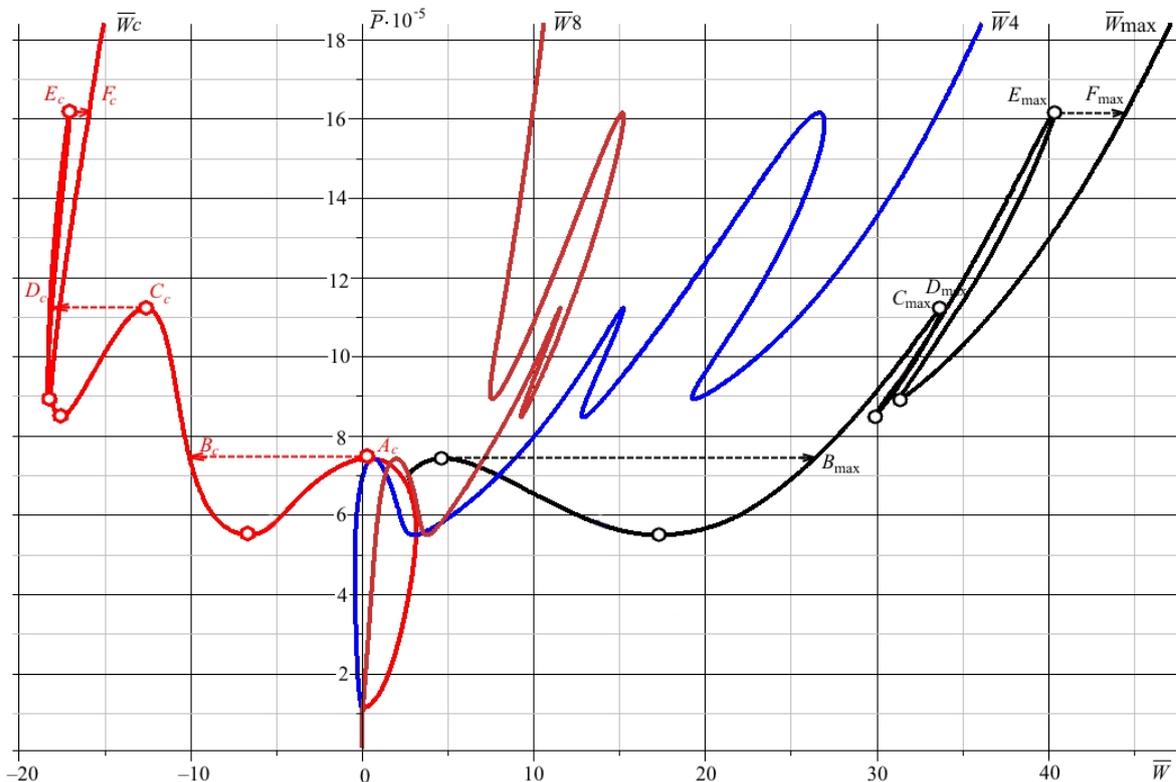


Рис. 6. График «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » для цилиндрической оболочки из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ

соответствующие поля прогибов конструкции (Рис. 7), причем отложенные не только от плоскости, как это осуществляется в программном пакете компьютерной алгебры Maple, но и от поверхности оболочки. Это делается в связи с тем, что поле прогибов, отсчитываемое в системе Oxy , недостаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, прогиб масштабируется с коэффициентом $k_m = 2$.

При нагружении оболочки процесс потери устойчивости происходит следующим образом: сначала достигается нагрузка $\bar{P} = 7,42 \cdot 10^5$ (точка A , размерное значение нагрузки $q = 0,0065$ МПа), совершается переход в новое равновесное состояние (точка B). На рисунках $7a, 7б$ представлены поля прогибов до потери устойчивости, а на рисунках $7в, 7г$ — после потери устойчивости. Как видно, в этот момент центр оболочки выгибается в обратную сторону, а в четвертях прогиб резко увеличивается. Далее следуют небольшое увеличение нагрузки до $\bar{P} = 11,2 \cdot 10^5$ (точка C , $q = 0,0098$ МПа) и переход в новое равновесное состояние (точка D). На рисунках $7д, 7е$ изображены поля прогибов до потери устойчивости, а на $7ж, 7з$ — после потери устойчивости. Ситуация аналогична при достижении точки E с переходом в точку F . На рисунках $7и-7м$ показаны соответствующие поля прогибов. Если же конструкция разгружается, то переходы в новые равновесные состояния происходят через нижние критические нагрузки (см. кривую «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} »).

Из рисунка 6 видно, что после последней потери устойчивости оболочка деформируется как плита, следовательно, потерь устойчивости больше не будет наблюдаться.

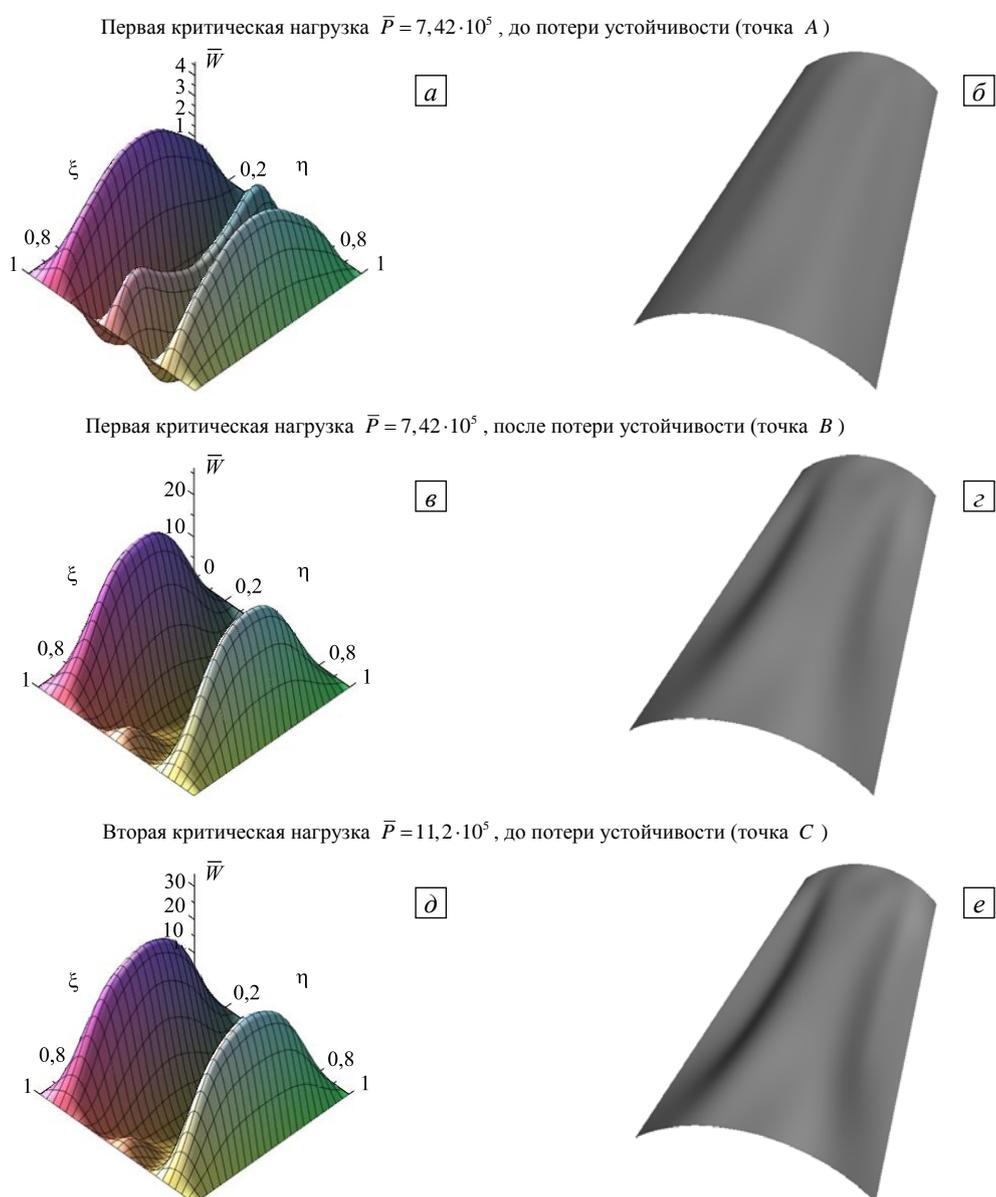


Рис. 7. Картины полей прогибов до и после локальных потерь устойчивости

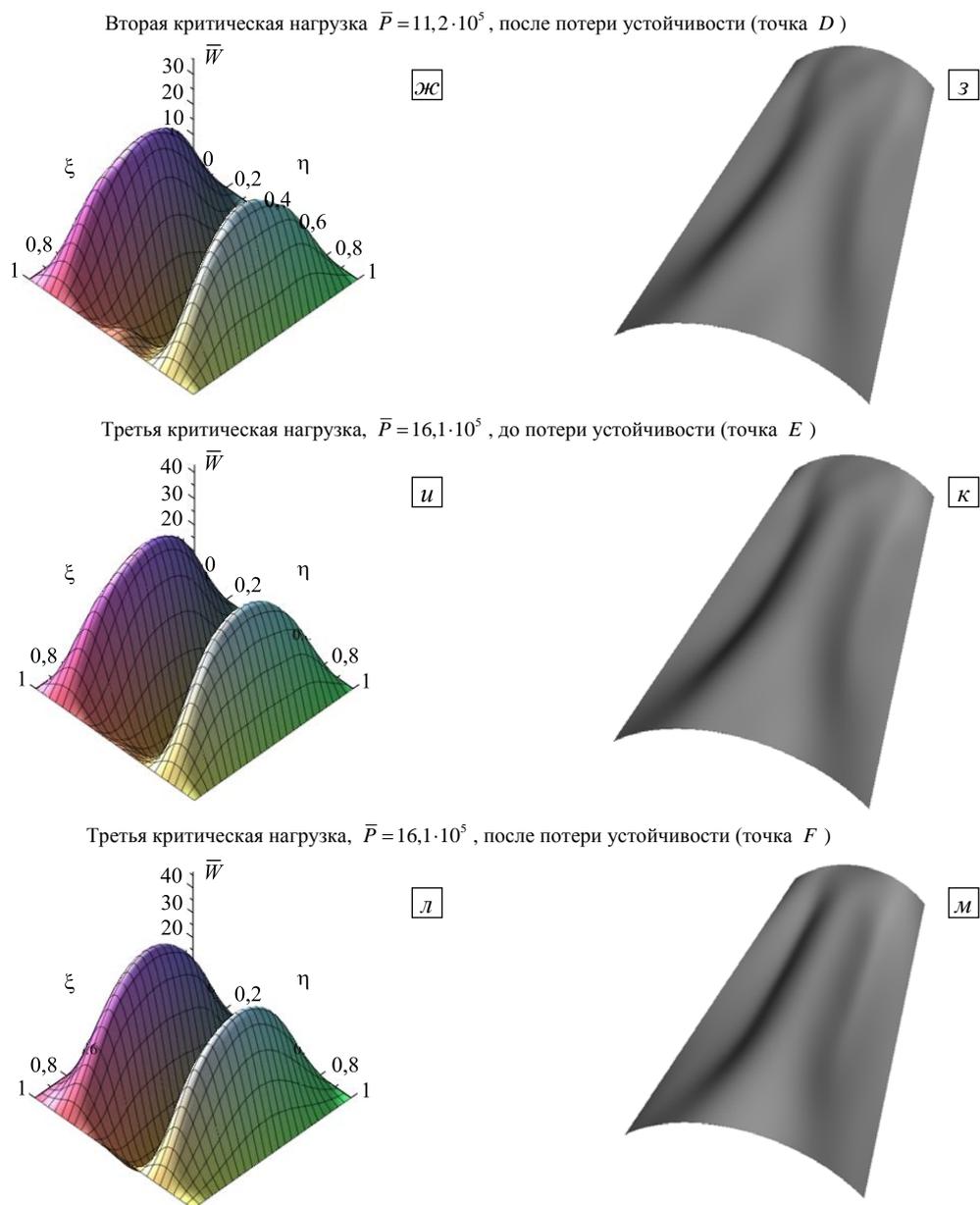


Рис. 7. Продолжение

Далее рассмотрим пологую оболочку из углепластика М60J, имеющую линейные размеры $a = b = 600h$, радиусы главных кривизн $R_1 = R_2 = 1510h$ и толщину $h = 0,09$ м. На рисунке 8 приведен график «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » для данной оболочки. Первая критическая нагрузка имеет значение $\bar{P} = 5334,6$, на графике — это точка A (ей соответствует размерное значение нагрузки $q = 0,0136$ МПа). В этот момент происходит переход в новое равновесное состояние — в точку B (показано пунктиром). Таким образом, оболочка теряет устойчивость посредством «хлопка». Небольшой «хлопок» наблюдается и при переходе из точки C в точку D . При нагрузке $\bar{P} = 8683$ (точка E , $q = 0,022$ МПа) имеет место следующий небольшой «хлопок», в основном это заметно на расстоянии четверти и восьмой части от края конструкции.

На рисунке 9 показаны поля прогибов оболочки до и после действия первой критической нагрузки. Для лучшей визуализации изменений поверхности взят коэффициент масштабирования прогиба $k_m = 5$.

Когда оболочечная конструкция имеет большие размеры и при этом достаточно тонкая, она редко теряет устойчивость сразу, то есть одним большим хлопком. Происходят локальные (местные) скачкообразные деформации в различных частях конструкции — так называемые локальные потери устойчивости. Поверхность оболочки несколько раз выгибается то в одну, то в другую сторону, прежде чем происходит один большой хлопок. Этот процесс можно отследить, наблюдая за кривыми «нагрузка – прогиб» в разных характерных точках оболочки (например, в центре и точках, на четверть ее линейного

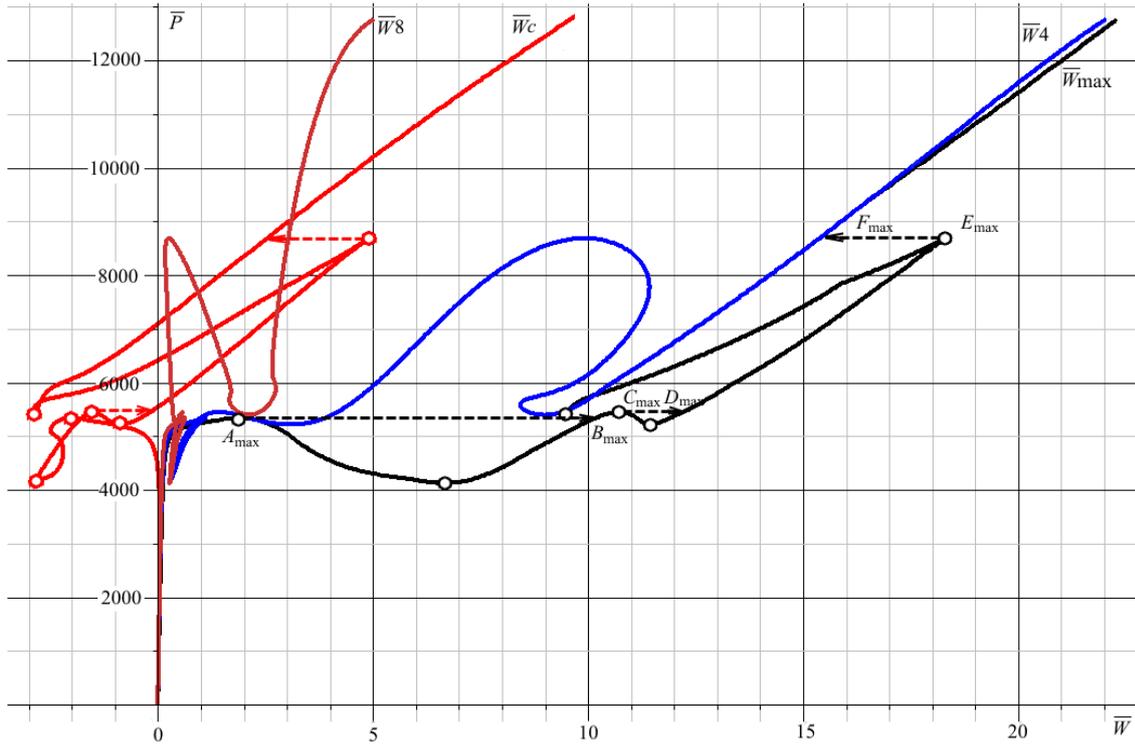


Рис. 8. График «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » для полой оболочки из углепластика М60J

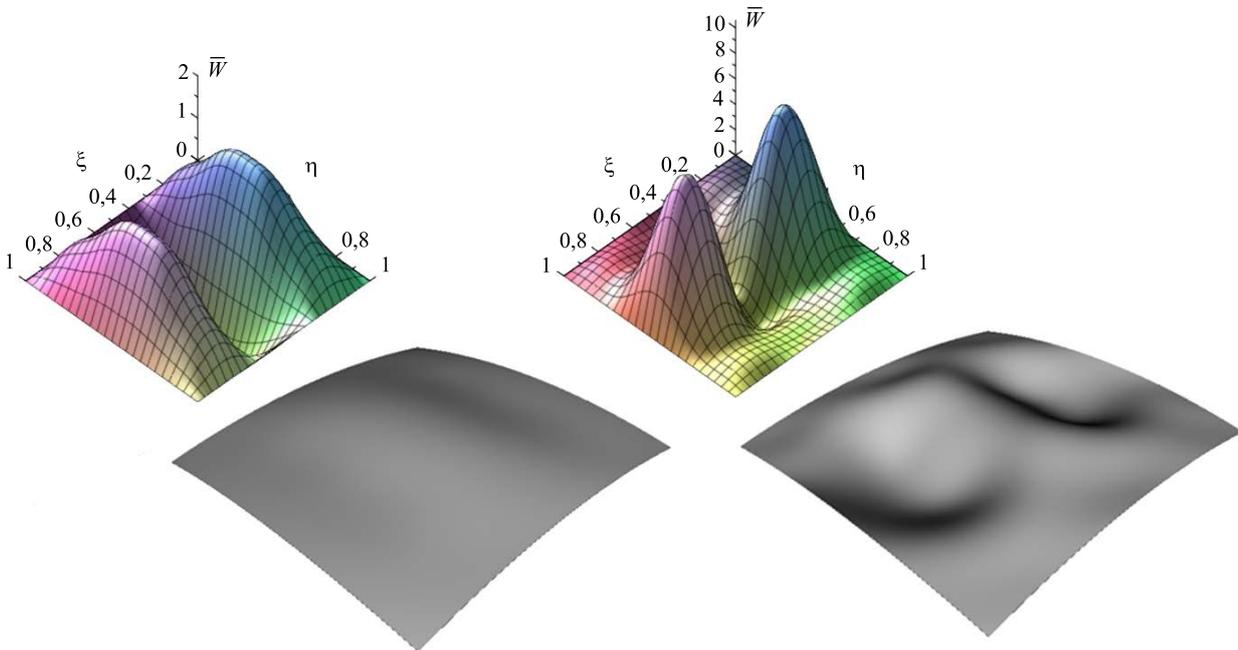


Рис. 9. Поля прогибов полой оболочки из углепластика М60J до и после действия первой критической нагрузки

размера отстоящих от края, кривые могут вести себя противоположно). Особый интерес представляет случай, когда в процессе нагружения несколько небольших локальных потерь устойчивости следуют друг за другом (на рисунках 6, 8 изображены пунктирными линиями).

Как показали расчеты, для ортотропных оболочек при условии, что деформирование осуществляется несимметрично и имеет сложный характер, потеря устойчивости выглядит как образование последовательных местных вмятин вплоть до полной потери устойчивости.

5. Заключение

Опробованы две методики изучения потери устойчивости оболочечных конструкций. Обе они дают возможность рассматривать и за критическое поведение оболочек, поэтому с некоторыми ограничениями

пригодны для анализа местных и общих форм потери устойчивости. Так, методика, основанная на методе Рунге и методе продолжения решения по наилучшему параметру (МПРНП), удобна при непрерывной аппроксимации искомых функций, поэтому ее целесообразно применять при тех граничных условиях, для которых можно подобрать аппроксимирующие функции. Методика на базе градиентного метода с дискретной аппроксимацией искомых функций (L-BFGS), здесь впервые примененная для исследования устойчивости оболочек, может работать практически при самых разных способах закрепления краев оболочки, однако с ее помощью невозможно найти значения нижних критических нагрузок.

Разработанное математическое и программное обеспечение для расчетов устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций на основе нелинейных соотношений позволяет отслеживать процесс потери устойчивости (местной и общей) путем «прохлопывания» части оболочки. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что тонкие оболочки (толщиной h порядка 0,001 ее размера в плане) могут терять устойчивость многократно и с различным характером вмятин на криволинейной поверхности. По этой причине необходимо проводить анализ форм потери устойчивости для отделения местных от общих.

Сравнение результатов решения тестовых задач с данными других авторов и найденных с помощью других алгоритмов показало их хорошую согласованность, что говорит о достоверности проведенного исследования.

По обеим методикам созданы программные продукты, предназначенные как для расчетов при проектировании разного рода оболочечных конструкций, так и для научных и учебных целей.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 3801.

Литература

1. *Кривошапко С.Н.* О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 1. – С. 51-56.
2. *Ventsel E., Krauthammer T.* Thin plates and shells: Theory, analysis and applications. – New York: Dekker, 2001. – 666 p.
3. *Сухинин С.Н.* Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. – М.: Физматлит, 2010. – 248 с.
4. *Пиккуль В.В.* Современное состояние теории устойчивости оболочек // Вестник ДВО РАН. – 2008. – № 3. – С. 3-9.
5. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука, 2004. – 276 с.
6. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC Press, Boca Raton, FL, 2004. – 856 p.
7. *Артемяева А.А., Баженов В.Г., Кибец А.И., Лантев П.В., Шошин Д.В.* Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 5-14. DOI
8. *Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
9. *Вашишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
10. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
11. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.
12. *Trach V.M.* Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, no. 6. – P. 662-669. DOI
13. *Ahmed M.K.* Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads // Math. Probl. Eng. – 2009. – 829703. DOI
14. *Jabareen M., Sheinman I.* Effect of the nonlinear pre-buckling state on the bifurcation point of conical shells // Int. J. Solids Struct. – 2006. – Vol. 43, no. 7-8. – P. 2146-2159. DOI
15. *Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M.* Buckling of conical composite shells // Compos. Struct. – 2012. – Vol. 94, no. 2. – P. 787-792. DOI
16. *Трещев А.А., Шерешевский М.Б.* Исследование НДС прямоугольной в плане оболочки положительной гауссовой кривизны из ортотропных материалов с учетом свойств разносопротивляемости // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архит. – 2013. – № 31-2 (50). – С. 414-421.
17. *Блинов А.Н.* О нижней критической нагрузке упругой цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Вестник Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2012. – № 5 (3). – С. 359-362.
18. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории гладких ортотропных оболочек переменной толщины // Доклады национальной академии наук Армении. – 2011. – № 2. – С. 148-156.
19. *Трушин С.И., Иванов С.А.* Численное исследование устойчивости пологой цилиндрической оболочки с учетом физической и геометрической нелинейностей при различных граничных условиях // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 5. – С. 43-46.
20. *Карпов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2-х частях. – М.: Физматлит, 2011. – Ч. 2. – 248 с.
21. *Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю.* Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.

22. Карпов В.В., Волюнин А.Л., Мухин Д.Е. Несимметричные формы потери устойчивости пологих ребристых оболочек при линейно и нелинейно-упругом деформировании // Успехи строительной механики и теории сооружений. – Саратов: СГТУ, 2010. – С. 105-112.
23. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000-2010 // Open Journal of Composite Materials. – 2012. – Vol. 2. – P. 61-86. DOI
24. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 // Int. J. Nonlinear Mech. – 2014. – Vol. 58. – P. 233-257. DOI
25. MacKay J.R., van Keulen F. A review of external pressure testing techniques for shells including a novel volume-control method // Exp. Mech. – 2010. – Vol. 50, no. 6. – P. 753-772. DOI
26. Зиновьев П.А., Смердов А.А. Оптимальное проектирование композитных материалов: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – Ч. 2. – 103 с.
27. Соломатов В.И., Бобрышев А.Н., Химмлер К.Г. Полимерные композиционные материалы в строительстве. – М.: Стройиздат, 1988. – 312 с.
28. Тышкевич В.Н. Выбор критерия прочности для труб из армированных пластиков // Известия ВолгГТУ. – 2011. – № 5 (78). – С. 76-79.
29. Янковский А.П. Расчет напряженно-деформированного состояния сложно армированных металлокомпозитных оболочек в условиях установившейся ползучести // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 109-123. DOI
30. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 613-687. DOI
31. Golovanov A.I., Ivanov V.A., Paimushin V.N. Numerical analysis method for studying local forms of stability loss of bearing layers of three-layered shells using mixed forms // Mech. Compos. Mater. – 1995. – Vol. 31, no. 1. – P. 69-79. DOI
32. Смердов А.А. Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2014. – № 10. – С. 70-79.
33. Wang X.-T., Qin Z.-B., Gao L.-Z., Liang X.-X. The effect of frame torsion on the local stability of a ring-stiffened cylindrical shell // Journal of Marine Science and Application. – 2004. – Vol. 3, no. 2. – P. 12-16. DOI
34. Маневич А.И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // ПИММ. – 1982. – Т. 42, № 2. – С. 337-345.
35. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. – М: Наука, Физматлит, 1995. – 320 с.
36. Ильин В.П., Карпов В.В. Связанность форм потери устойчивости ребристых оболочек // Труды XIV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. – Кутаиси: Мецниерба 1987. – С. 615-619.
37. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
38. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматлит, 1961. – 384 с.
39. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
40. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 5. – С. 100-106. DOI
41. Баранова Д.А. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек вращения на основе метода L-BFGS // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – № 3. – С. 58-59.
42. Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
43. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 1. – С. 49-63.
44. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method // Comput. Method. Appl. M. – 2007. – Vol. 196, no. 17-20. – P. 2242-2251. DOI
45. Van Campen D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., Ter Weeme B.J.W. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions // Int. J. Nonlinear Mech. – 2002. – Vol. 37, no. 4-5. – P. 659-667. DOI

References

1. Krivoshapko S.N. On opportunity of shell structures in modern architecture and building. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzhenij – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2013, no. 1, pp. 51-56.
2. Ventsel E., Krauthammer T. *Thin plates and shells: Theory, analysis and applications*. New York: Dekker, 2001. 666 p.
3. Sukhinin S.N. *Prikladnye zadachi ustojchivosti mnogosloynnykh kompozitnykh obolochek* [Applied problems of stability of multilayer composite shells]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 248 p.
4. Pikul' V.V. *Sovremennoe sostoyanie teorii ustojchivosti obolochek* [The state of the art of the theory of shell stability]. *Vestnik DVO RAN – Bulletin of the Far Eastern Branch RAS*, 2008, no. 3, pp. 3-9.
5. Yakushev V.L. *Nelinejnye deformatsii i ustojchivost' tonkikh obolochek* [Nonlinear deformation and stability of thin shells]. Moscow: Nauka, 2004. 276 p.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2004. 856 p.
7. Artemjeva A.A., Bazhenov V.G., Kibetz A.I., Laptev P.V., Shoshin D.V. Verification of the finite-element solution of 3D non-stationary problems of elasto-plastic deformation, stability and supercritical behavior of shells. *Vycisl. meh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 5-14. DOI

8. Andreev L.V., Obodan N.I., Lebedev A.G. *Ustojchivost' obolochek pri neosesimmetrichnoj deformatsii* [Stability of shells under non-axisymmetrical deformations]. Moscow: Nauka, 1988. 208 p.
9. Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETSVM* [Methods of calculation of shells of rotation on a digital computer]. Moscow: Mashinostroenie, 1976. 278 p.
10. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustojchivost' obolochek* [Stability of shells]. Moscow: Nauka, 1978. 360 p.
11. Petrov V.V. *Metod posledovatel'nykh nagruzhenij v nelinejnoj teorii plastinok i obolochek* [The method of successive loading in the nonlinear theory of plates and shells]. Saratov: Saratov State University, 1975. 119 p.
12. Trach V.M. Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry. *Int. Appl. Mech.*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 662-669. DOI
13. Ahmed M.K. Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads. *Math. Probl. Eng.*, 2009, 829703. DOI
14. Jabareen M., Sheinman I. Effect of the nonlinear pre-buckling state on the bifurcation point of conical shells. *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, no. 7-8, pp. 2146-2159. DOI
15. Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 2, pp. 787-792. DOI
16. Treshchev A.A., Shereshevskiy M.B. Investigation of strain-stress state of rectangular in plan shell with positive Gauss curvature made of orthotropic material taking into account different resistant properties. *Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture*, 2013, no. 31-2 (50), pp. 414-421.
17. Blinov A.N. On the lower critical load of the elastic cylindrical shell with axial compression. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 359-362.
18. Kirakosyan R.M. Ob odnoj utochnennoj teorii gladkikh ortotropnykh obolochek peremennoj tolshchiny [On a refined theory of smooth orthotropic shells of variable thickness]. *Reports of the NAS RA*, 2011, no. 2, pp. 148-156.
19. Trushin S.I., Ivanov S.A. Chislennoe issledovanie ustojchivosti pologoj tsilindricheskoj obolochki s uchedom fizicheskoy i geometricheskoj nelinejnostej pri razlichnykh granichnykh usloviyakh [Numerical study of the stability of shallow cylindrical shell taking into account physical and geometrical nonlinearities under various boundary conditions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij – Structural mechanics and analysis of structures*, 2011, no. 5, pp. 43-46.
20. Karpov V.V. *Prochnost' i ustojchivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [The strength and stability of reinforced shells of revolution]. Moscow: Fizmatlit, 2011. Part 2, 248 p.
21. Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Sal'nikov A.Yu. *Nelinejnye matematicheskie modeli deformirovaniya obolochek peremennoj tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniya* [Non-linear mathematical models of deformation of shells of varying thickness and algorithms for their study]. Moscow: ASV; St. Petersburg: Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 2002. 420 p.
22. Karpov V.V., Volynin A.L., Mukhin D.E. Nesimmetrichnye formy poteri ustojchivosti pologikh rebristykh obolochek pri lineino i nelineino-uprugom deformirovanii [Non-symmetric shapes of the loss of stability for depressed ribbed shells under linear and non-linear elastic deformation]. *Uspekhi stroitel'noj mekhaniki i teorii sooruzhenij – Advances in structural mechanics and the theory of structures*. Saratov: Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 2010, pp. 105-112.
23. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000-2010. *Open Journal of Composite Materials*, 2012, vol. 2, pp: 61-86. DOI
24. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2014, vol. 58, pp. 233-257. DOI
25. MacKay J.R., van Keulen F. A review of external pressure testing techniques for shells including a novel volume-control method. *Exp. Mech.*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 753-772. DOI
26. Zinov'ev P.A., Smerdov A.A. *Optimal'noe proektirovanie kompozitnykh materialov* [Optimal design of composite materials]. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2006. Part 2, 103 p.
27. Solomatov V.I., Bobryshev A.N., Khimmler K.G. *Polimernye kompozitsionnye materialy v stroitel'stve* [Polymer composite materials in the construction]. Moscow: Strojizdat, 1988. 312 p.
28. Tyshkevich V.N. Vybor kriteriya prochnosti dlya trub iz armirovannykh plastikov [Choice of strength criterion for reinforced plastic pipes]. *Izvestiya VolGTU – Proceedings of the Volgograd State Technical University*, 2011, no. 5 (78), pp. 76-79.
29. Yankovskii A.P. Calculation of the stress-strain state of complex reinforced metal-composite shells under steady-state creep conditions. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 109-123. DOI
30. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *Int. Appl. Mech.*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 613-687. DOI
31. Golovanov A.I., Ivanov V.A., Paimushin V.N. Numerical analysis method for studying local forms of stability loss of bearing layers of three-layered shells using mixed forms. *Mech. Compos. Mater.*, 1995, vol. 31, no. 1, pp. 69-79. DOI
32. Smerdov A.A. Possibilities of improving the local stability of stiffened and integral composite structures. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Mashinostroenie – Izvestiya VUZov. Mechanical Engineering*, 2014, no. 10, pp. 70-79.
33. Wang X.-T., Qin Z.-B., Gao L.-Z., Liang X.-X. The effect of frame torsion on the local stability of a ring-stiffened cylindrical shell. *Journal of Marine Science and Application*, 2004, vol. 3, no. 2, pp. 12-16. DOI
34. Manevich A.I. K teorii svyazanoi poteri ustojchivosti podkreplennykh tonkostennykh konstruksij [On the theory of loss of bound stability for supported thin-walled structures]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 42, no. 2, pp. 337-345.
35. Tovstik P.E. *Ustojchivost' tonkikh obolochek* [Thin shell buckling. Asymptotic methods]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1995. 320 p.

36. Il'in V.P., Karpov V.V. *Trudy XIV Vsesoyuznoj konferentsii po teorii plastin i obolochek – Proceedings of the XIV National Conference on the theory of plates and shells*. Kutaisi: Metsnierba, 1987. Pp. 615-619.
37. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [The theory of thin shells]. Leningrad: Sudpromizdat, 1962. 431 p.
38. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh obolochek* [The theory of anisotropic shells]. Moscow: Fizmatlit, 1961. 384 p.
39. Volmir A.S. *Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1972. 432 p.
40. Karpov V.V., Semenov A.A. Mathematical model of deformation of orthotropic reinforced shells of revolution. *Magazine of Civil Engineering*, 2013, no. 5, pp. 100-106. [DOI](#)
41. Baranova D.A. Algorithm for analysis of stability of stiffened shells of rotation on the basis of L-BFGS method. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and Civil Engineering*, 2012, no. 3, pp. 58-59.
42. Kuznetsov E.B. *Metod prodolzheniya resheniya i nailuchshaya parametrizatsiya* [A method of continuation of solution and the best parameterization]. Moscow: MAI-PRINT, 2010. 160 p.
43. Semenov A.A. Algorithms for the research of strength and stability of reinforced orthotropic shells. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksij i sooruzhenij – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2014, no. 1, pp. 49-63.
44. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method. *Comput. Method. Appl. M.*, 2007, vol. 196, no. 17-20, pp. 2242-2251. [DOI](#)
45. Van Campen D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., Ter Weeme B.J.W. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2002, vol. 37, no. 4-5, pp. 659-667. [DOI](#)

Поступила в редакцию 20.03.2015; опубликована в электронном виде 30.09.2015

Сведения об авторах

Баранова Дарья Александровна, ктн, нс, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ), 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4; e-mail: insya@ya.ru
Карпов Владимир Васильевич, проф., дтн, СПбГАСУ; e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru
Семенов Алексей Александрович, ктн, ст. преп., СПбГАСУ; e-mail: sw.semenov@gmail.com