

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.17

УДК 532.6

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО СЛОЯ ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЛСТЫМИ СЛОЯМИ ЖИДКОСТЕЙ

А.В. Пименова¹, Д.С. Голдобин^{1,2}¹*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*²*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

Рассматривается задача гравитационной неустойчивости (неустойчивости Рэлея–Тейлора) тонкого горизонтального парового слоя, заключенного между двумя полупространствами, заполненными жидкостями (или толстыми слоями жидкостей), причем сверху находится легкая жидкость. Актуальность вопроса обусловлена проблемой поверхностного кипения при прямом контакте двух несмешивающихся жидкостей. При этом представляет интерес скорость «срыва», растущего на поверхности контакта жидкостей парового слоя. Срыв происходит именно в связи с развитием неустойчивости Рэлея–Тейлора на верхней границе раздела жидкость–газ. Задача решена аналитически в приближении невязких жидкостей и вязкого невесомого пара, что хорошо согласуется с параметрами процессов в реальных системах, например таких, как поверхностное кипение в системе вода–*n*-гептан. Для верификации результата рассмотрены предельные размеры слоя пара: бесконечно тонкий и бесконечно толстый, для которых результат очевидно следует из решения классической задачи неустойчивости Рэлея–Тейлора. Показано, что эти предельные случаи полностью соответствуют наличию возмущений в виде неплохо изученных гравитационно-капиллярных волн на границах раздела жидкость–жидкость и жидкость–газ. Продемонстрировано, что система, достаточно протяженная в горизонтальном направлении, всегда находится в неустойчивом состоянии, волновое число возмущений не ограничено снизу. Найдена длина волны наиболее быстро растущих возмущений и скорость их роста как функция толщины парового слоя. Оказалось, что зависимость показателя экспоненциального роста возмущений от толщины парового слоя имеет кубический характер.

Ключевые слова: неустойчивость Рэлея–Тейлора, трехслойная система, тонкий паровой слой

GRAVITATIONAL INSTABILITY OF THIN GAS LAYER BETWEEN TWO THICK LIQUID LAYERS

A. V. Pimenova¹ and D. S. Goldobin^{1,2}¹*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*²*Perm State University, Perm, Russian Federation*

We consider the problem of gravitational instability (Rayleigh–Taylor instability) of a horizontal thin gas layer between two liquid half-spaces (or thick layers), where the light liquid overlies the heavy one. This study is motivated by the phenomenon of boiling at the surface of direct contact between two immiscible liquids, where the rate of the “break-away” of the vapour layer growing at the contact interface due to development of the Rayleigh–Taylor instability on the upper liquid–gas interface is of interest. The problem is solved analytically under the assumptions of inviscid liquids and viscous weightless vapour. These assumptions correspond well to the processes in real systems, e.g., they are relevant for the case of interfacial boiling in the system water–*n*-heptane. In order to verify the results, the limiting cases of infinitely thin and infinitely thick gas layers were considered, for which the results can be obviously deduced from the classical problem of the Rayleigh–Taylor instability. These limiting cases are completely identical to the well-studied cases of gravity waves at the liquid–liquid and liquid–gas interfaces. When the horizontal extent of the system is long enough, the wavenumber of perturbations is not limited from below, and the system is always unstable. The wavelength of the most dangerous perturbations and the rate of their exponential growth are derived as a function of the layer thickness. The dependence of the exponential growth rate on the gas layer thickness is cubic.

Key words: Rayleigh–Taylor instability, three layer system, thin gas layer

1. Введение

Гравитационная неустойчивость системы двух несмешивающихся жидкостей при условии, когда тяжелая жидкость налита поверх легкой, или неустойчивость Рэлея–Тейлора, довольно полно изучена и описана в литературе [1–3]. Неисследованным, однако, остается более сложный случай — задача гравитационной неустойчивости системы, в которой между двумя устойчиво стратифицированными слоями жидкостей заключен тонкий слой пара (Рис. 1). Ее актуальность связана с проблемой поверхностного кипения на границе двух несмешивающихся жидкостей при температуре, которая ниже температур объемного кипения каждой из компонент [4, 5]. При этом срыв парового слоя обусловлен именно волновой неустойчивостью Рэлея–Тейлора [1, 2] на верхней границе раздела жидкость–пар, на которой относительно тяжелая жидкость находится поверх практически невесомого слоя пара. Рассматриваемая в настоящей работе ситуация является достаточно специфической: в сущности процесс парообразования на границе двух жидкостей представляет собой единственный стабильный механизм возникновения и поддержания в реальной системе весьма тонкой паровой прослойки между двумя толстыми слоями жидкостей. Насколько известно авторам представляемой работы, данная проблема в настоящий момент в литературе не рассматривалась.

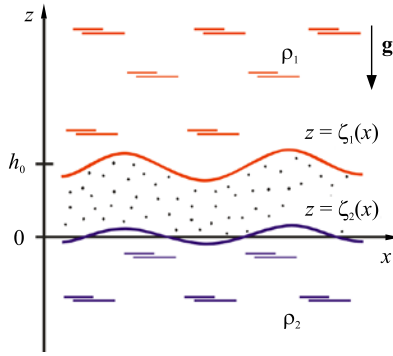


Рис. 1. Система двух жидкостей с плотностями ρ_1 и $\rho_2 > \rho_1$, разделенных слоем пара

На рисунке 2 приведены фотографии процесса горения слоя *n*-гептана, налитого поверх толстого слоя воды; данный процесс и демонстрационные эксперименты с ним обсуждаются в работе [5]. При таком горении наблюдалось кипение на границе раздела вода–*n*-гептан в отсутствие объемного кипения компонент. В ходе эксперимента оценивался характерный средний диаметр пузырька пара, срывающегося с границы раздела — $d_b \sim 1$ мм; цепочки пузырьков находились друг от друга на характерном расстоянии примерно 1 см, то есть каждый пузырек формировался из пара, сорвавшегося с участка площадью $S_{vl} \sim 1$ см². Объем пузырька $V_b = (\pi/6)d_b^3$ равнялся объему соответствующего участка парового слоя $h_{vl}S_{vl}$; таким образом, характерная толщина срывающегося парового слоя составила $h_{vl} = V_b/S_{vl} \sim 10^{-5}$ м.

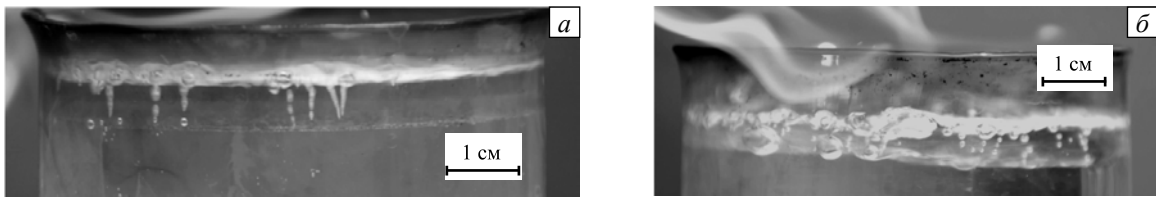


Рис. 2. Процесс кипения на границе контакта в системе вода–*n*-гептан: начальная стадия кипения (а) – с поверхности контакта срываються отдельные цепочки пузырьков пара, их количество еще сопоставимо с количеством центров парообразования на стенках стакана, которые несколько сильнее прогреваются пламенем, чем находящаяся на том же расстоянии от горячей поверхности жидкость (срывающиеся цепочки можно отличить от центров парообразования на стенках стакана по наличию их отражения в зеркале границы раздела); более поздняя стадия кипения (б) – процесс парообразования происходит в интенсивном режиме, почти все центры парообразования находятся на поверхности контакта жидкостей

2. Динамика тонкого парового слоя, заключенного между двумя полупространствами жидкостей

Рассмотрим гравитационно-капиллярные волны и неустойчивость системы, вследствие которой эти волны могут нарастать. Для линейного анализа неустойчивости системы достаточно решить двумерную задачу в (x, z) -геометрии, где z — это вертикальная координата, а x — координата, сонаправленная с волновым вектором возмущений (см. Рис. 1). Положим, что слои жидкости достаточно толстые по сравнению с характерной длиной волны на границе раздела жидкость–пар; в этом случае можно считать, что жидкости, находясь в невозмущенном состоянии, занимают полупространства $z > h_0$ и $z < 0$. Плотности верхней и нижней жидкостей, соответственно, составляют ρ_1 и ρ_2 при этом $\rho_2 > \rho_1$; пар будем считать невесомым. Границами раздела являются поверхности $z = \zeta_1(x, t)$ и $z = \zeta_2(x, t)$ (Рис. 1); для невозмущенного состояния $\zeta_1 = h_0$ и $\zeta_2 = 0$, где h_0 — толщина невозмущенного слоя пара.

Классическая задача неустойчивости Рэлея–Тейлора решается в приближении невязких жидкостей. Такой подход оказывается физически обоснованным для обсуждаемых процессов в случае таких жидкостей, как вода при малой характерной толщине вязких пограничных слоев. Толщина вязкого пограничного слоя при заданной скорости набегающего на поверхность жидкости потока пара может быть достоверно оценена на основе более поздней, чем труды лорда Рэлея, работы [6]. И поскольку вязкие пограничные слои в жидкостях также остаются тонкими, для осуществления линейного анализа неустойчивости системы достаточно рассмотреть невязкие жидкости.

С одной стороны, плотность пара существенно меньше плотностей жидкостей, она практически равняется нулю, и течение пара можно считать безынерционным. С другой стороны, разница скоростей $\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2 = \dot{h}$ вызывает перераспределение пара, и тем самым в тонкой паровой прослойке создается поток, который в отсутствие инерции сдерживается только вязкостью. Отсюда следует, что при изучении динамики слоя пара необходимо учитывать вязкость. Характерные неоднородности давления, связанные с гидростатическим и гидродинамическим градиентами давления в системе, малы по сравнению с атмосферным давлением, поэтому пар можно считать несжимаемым. Обобщая вышеизложенное, в рассматриваемой системе течение жидкости можно считать невязким, тогда как течение пара является вязким и несжимаемым, при этом скорость течения внутри паровой прослойки значительно выше, чем скорость внутри жидкостей.

Рассмотрим течение пара. Толщина его слоя $h = \zeta_1 - \zeta_2$ существенно меньше характерного горизонтального масштаба профиля волны на границах раздела, поэтому течение пара практически параллельно срединной поверхности слоя, а давление внутри слоя почти постоянно: $p_g(x, z) = p_g(x)$. Так как пар течет значительно быстрее жидкостей, положим, что скорость на границе раздела жидкость–газ равняется нулю. Таким образом, течение пара можно представить как вязкое течение вдоль тонкого зазора между двумя плоскостями:

$$v(x, z) = v_m(x) \left(1 - \frac{4(z - \zeta_m)^2}{h^2} \right), \quad (1)$$

где v — это скорость пара, направленная по касательной к срединной поверхности слоя; $\zeta_m = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$ — z -координата срединной поверхности слоя, v_m — скорость пара на поверхности ζ_m .

Из уравнения Навье–Стокса для практически невесомого пара получается следующее соотношение между скоростью потока и градиентом давления:

$$\frac{\partial}{\partial x} p_g(x, t) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{8\eta}{h^2} v_m(x, t). \quad (2)$$

Здесь p_g — это давление внутри слоя пара, η — динамическая вязкость пара. Скорость изменения толщины слоя \dot{h} зависит от $Q = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} v dz = (2/3)v_m h$ — потока пара через поперечное сечение слоя:

$\dot{h} = -(\partial/\partial x)Q$. Используя соотношение между скоростью v_m и градиентом давления (2), получаем:

$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p_g}{\partial x} \right)$. При рассмотрении бесконечно малых возмущений можно ограничиться учетом только

линейных по малым параметрам вкладов $(p_g - p_{g0})$ и $(h - h_0)$:

$$\dot{h} = \frac{h_0^3}{12\eta} \frac{\partial^2 p_g}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим механику жидкостей. Если считать жидкости невязкими, то можно ввести скалярные потенциалы течения Φ_j ; тогда скорость j -й жидкости составит $\mathbf{v}_j = \nabla \Phi_j$. Условие несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$ накладывает на Φ_j ограничение вида:

$$\Delta \Phi_j(x, z, t) = 0, \quad (4)$$

то есть компоненты Φ_j должны быть гармоническими функциями пространственных координат.

Уравнение Эйлера в терминах потенциалов имеет вид:

$$\rho_j \nabla \left(\dot{\Phi}_j + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_j)^2 \right) = -\nabla (p_j + \rho_j g z),$$

где p_j — давление в j -й жидкости, g — ускорение свободного падения. Таким образом, можно вычислить поле давления для данного течения:

$$p_j = p_{j,0} - \rho_j \dot{\Phi}_j - \rho_j g z. \quad (5)$$

Заметим, что в этом уравнении опущены квадратичные слагаемые, так как рассматриваются бесконечно малые возмущения.

Условие баланса напряжений на поверхностях жидкостей устанавливает связь скачка давления на границах раздела с капиллярным давлением:

$$(p_1 - p_g) \Big|_{z=\zeta_1} = \sigma_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}, \quad (6)$$

$$(p_2 - p_g) \Big|_{z=\zeta_2} = -\sigma_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где σ_j — коэффициент поверхностного натяжения j -й жидкости.

Так как в данной работе интерес представляет устойчивость горизонтально-стратифицированного состояния, а рассмотрение ограничивается малыми возмущениями, удобнее формулировать уравнения не в областях $z < \zeta_2$ и $z > \zeta_1$, а в областях $z < 0$ и $z > h_0$. Следовательно, граничные условия необходимо перенести с $z = \zeta_2$ и $z = \zeta_1$, соответственно, на $z = 0$ и $z = h_0$. Для этого (6), (7) подставим в уравнение (5):

$$-\rho_1 \dot{\Phi}_1 \Big|_{z=h_0} - p_g - \rho_1 g (\zeta_1 - h_0) = \sigma_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$-\rho_2 \dot{\Phi}_2 \Big|_{z=0} - p_g - \rho_2 g \zeta_2 = -\sigma_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Также учтем кинематические граничные условия. Поскольку течение жидкости смещает границу раздела, то $\dot{\zeta}_j$ определяется z -компонентой скорости j -й жидкости на ее границе; что в терминах потенциалов выглядит как

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_0}, \quad (10)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (11)$$

Подставляя $\dot{h} = \dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2$ в уравнение (3), находим

$$\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2 = \frac{h_0^3}{12\eta} \frac{\partial^2 p_g}{\partial x^2}. \quad (12)$$

3. Линейная неустойчивость состояния со строго горизонтальными границами раздела

Уравнения (4), (8)–(12) представляют собой полную систему дифференциальных уравнений для определения полей $\Phi_j(x, z, t)$, $\zeta_j(x, t)$ и $p_g(x, t)$. Так как уравнения для возмущений однородны по x -координате и времени, решение может быть представлено в экспоненциальной форме $\sim e^{\lambda t + ikx}$. Для $\Phi_j \sim e^{ikx}$ уравнение (4) дает $\Phi_1 \sim e^{-kz + ikx}$ и $\Phi_2 \sim e^{kz + ikx}$. Таким образом, из уравнений (10) и (11) следует: $\Phi_1 \Big|_{z=h_0} = -k^{-1} \dot{\zeta}_1$ и $\Phi_2 \Big|_{z=0} = k^{-1} \dot{\zeta}_2$. Подставляя Φ_j и возмущения в экспоненциальной форме $\{\zeta_1, \zeta_2 - h_0, p_g\} = \{\xi_1, \xi_2, P\} e^{\lambda t + ikx}$ в уравнения (8), (9), (12), получаем систему уравнений для нахождения амплитуд ξ_1, ξ_2, P :

$$\left(\rho_1 \frac{\lambda^2}{k} - \rho_1 g + \sigma_1 k^2 \right) \xi_1 - P = 0, \quad (13)$$

$$\left(-\rho_2 \frac{\lambda^2}{k} - \rho_2 g - \sigma_2 k^2 \right) \xi_2 - P = 0, \quad (14)$$

$$\lambda \xi_1 - \lambda \xi_2 + \frac{h_0^3}{12\eta} k^2 P = 0. \quad (15)$$

Соответствующее характеристическое уравнение для скорости экспоненциального нарастания возмущений λ имеет вид

$$\lambda \left(\lambda^2 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} g k + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_2 + \rho_1} k^3 \right) + A k \left(\lambda^2 - g k + \frac{\sigma_1}{\rho_1} k^3 \right) \left(\lambda^2 + g k + \frac{\sigma_2}{\rho_2} k^3 \right) = 0, \quad (16)$$

где $A = \frac{h_0^3}{12\eta} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ — это параметр, характеризующий толщину паровой прослойки.

3.1. Предельные случаи

Рассмотрим два предельных случая: бесконечно тонкий ($h_0 \rightarrow 0$) и бесконечно толстый ($h_0 \rightarrow \infty$) слои. Для тонкого слоя второе слагаемое в уравнении (16) пренебрежимо мало, и уравнение распадается на два независимых уравнения:

$$\lambda = 0, \quad (17)$$

$$\lambda^2 = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_2 + \rho_1} k^3. \quad (18)$$

Выражение (18) в точности соответствует наличию гравитационно-капиллярных волн в системе двух жидкостей в отсутствие газового слоя между ними (но с поверхностным натяжением, равным сумме поверхностных натяжений обеих жидкостей: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$). Эта задача хорошо изучена и широко освещена в литературе (см., например, [3]). Так как правая часть уравнения строго неположительна, все λ являются мнимыми, то есть неустойчивость отсутствует. Уравнение (17) показывает, что при $h_0 \rightarrow 0$ неоднородности давления сглаживаются бесконечно медленно вследствие уменьшения вязкого течения внутри слоя. Возмущения p_g формируют нейтральную моду с $\lambda \rightarrow 0$ при $h_0 \rightarrow 0$.

В другом предельном случае, когда толщина h_0 и параметр A являются достаточно большими, первое слагаемое в уравнении (16) становится пренебрежимо малым, и характеристическое уравнение имеет две независимые пары решений:

$$\lambda_{1,2}^2 = kg - \frac{\sigma_1}{\rho_1} k^3, \quad (19)$$

$$\lambda_{3,4}^2 = -kg - \frac{\sigma_2}{\rho_2} k^3. \quad (20)$$

Эти решения уравнения (18) соответствуют существованию обычных гравитационно-капиллярных волн на поверхности раздела жидкость–газ: уравнение (19) — для неустойчивого состояния жидкости, размещающейся поверх газа, уравнение (20) — для устойчивого состояния газа поверх жидкости. В этом случае слой пара оказывается достаточно толстым для того, чтобы границы раздела жидкость–газ были не чувствительны к движению друг друга. Уравнение (20) имеет только мнимые решения, тогда как уравнение (19) обладает парой вещественных корней при $k < k_1$, где $k_1 = \sqrt{\rho_1 g / \sigma_1}$. Возмущения с положительным λ растут экспоненциально, то есть система становится неустойчивой.

Для дальнейшего анализа удобно ввести соответствующие значения волновых чисел:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 g}{\sigma_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\rho_2 g}{\sigma_2}}, \quad k_{12} = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\sigma_1 + \sigma_2}}. \quad (21)$$

Важно, что при $h_0 \rightarrow 0$ в пределе информация о паровом слое теряется. Учет наличия слоя при малом, но ненулевом h_0 требует более аккуратного рассмотрения, чем при $h_0 = 0$. Именно этому случаю и посвящен следующий раздел.

3.2. Случай малого ненулевого h_0

Решение уравнения (16) для случая малого, но не равного нулю h_0 , может не соответствовать решению (17) для $h_0 = 0$, так как способно отклоняться от нуля и менять знак даже при сравнительно малых изменениях h_0 . Найдем отвечающие ему значения λ , A и k , а именно λ_* , A_* и k_* . Заметим, что при подстановке $\lambda = 0$ уравнение (16) разрешается при $k = k_1$ вне зависимости от значения A , то есть k_1 — единственное ненулевое значение k , которое удовлетворяет уравнению при $\lambda = 0$. Выберем $k_* = k_1$.

В уравнении (16) при условии $k = k_*$ в заключенном в скобки множителе первого слагаемого второй и третий члены имеют порядок gk_* , поэтому удобно ввести обозначение:

$$\lambda_* = \sqrt{gk_*}.$$

Первое и второе слагаемые уравнения (16) для $k = k_*$ и $\lambda = \lambda_*$ становятся соизмеримыми при следующем A :

$$A_* = \frac{1}{k_* \lambda_*} = g^{-1/2} k_*^{-3/2} = \left(\frac{\sigma_1}{\rho_1} \right)^{3/4} g^{-5/4},$$

которому отвечает значение h_0

$$h_{0*} = \left(\frac{12\eta \rho_1 + \rho_2}{g^{5/4} \rho_1 \rho_2} \right)^{1/3} \left(\frac{\sigma_1}{\rho_1} \right)^{1/4}. \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрим систему вода–*n*-гептан, имеющую характеристики (значения взяты из таблицы 1 работы [5]): $\rho_1 = 638 \text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = 973 \text{ кг/м}^3$; $\sigma_1 = 1,440 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$; $\sigma_2 = 6,293 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$; $\eta = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$; $k_1 = 659 \text{ м}^{-1}$; соответствующая длина волны $2\pi/k_1 = 1,0 \text{ см}$; $A_* = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}\cdot\text{с}$; $h_{0*} = 0,15 \text{ мм}$; $k_2 = 389 \text{ м}^{-1}$; $k_{12} = 206 \text{ м}^{-1}$. Данная во введении оценка толщины слоя (толщина составила $h_{vl} \sim 0,01 \text{ мм}$), при которой происходит срыв пузырьков пара, наблюдаемый в экспериментальной демонстрации в работе [5], в 15 раз меньше чем h_{0*} . Это означает, что решение можно считать применимым и при $h_0 \ll h_{0*}$.

Для ветви решения $\lambda = 0$, уточненной для ненулевого $A \ll A_*$ (обозначим ее $\lambda_1(k)$), справедливо условие непрерывности: $|\lambda_1| \ll \lambda_*$. В результате уравнение (16) принимает вид:

$$\lambda_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_2 + \rho_1} k(k^2 + k_{12}^2) + Ak^3 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\rho_1 \rho_2} (k^2 - k_1^2)(k^2 + k_2^2) = 0,$$

откуда следует:

$$\lambda_1 = \frac{h_0^3}{12\eta} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{k^2(k_1^2 - k^2)(k_2^2 + k^2)}{k^2 + k_{12}^2}. \quad (23)$$

На рисунке 3 уравнению (23) соответствует сплошная линия. Видно, что это решение хорошо ложится на точное решение даже при немалых значениях отношения A/A_* . Несмотря на то, что функция $\lambda_1(k)$ имеет только один максимум, являющийся единственным положительным корнем уравнения

$$\frac{d\lambda_1}{d(k^2)} = 0 = 2k^6 + (3k_{12}^2 - k_1^2 + k_2^2)k^4 - 2(k_1^2 - k_2^2)k_{12}^2 k^2 - k_1^2 k_2^2 k_{12}^2,$$

аналитическое нахождение этого максимума является достаточно громоздким, но в то же время может быть получено тривиальным способом. Подставим значение k_{\max} , характерное для системы вода–*n*-гептан $k_{\max}^{nC_7H_{16}-H_2O} = 429 \text{ м}^{-1}$, в уравнение (23). Получим

$$\lambda_{\max}^{nC_7H_{16}-H_2O} = 1,07 \cdot 10^{13} \cdot h_0^3, \text{ м}^{-3}\text{с}^{-1}. \quad (24)$$

В приближенных вычислениях вместо k_{\max} можно использовать значение $k_{1\max} = k_1/\sqrt{3}$, которое соответствует точке максимума выражения (19) ($k_{1\max}$ всегда близко к k_{\max}). Аналитическая оценка показателя экспоненциального роста возмущений в этом случае имеет вид:

$$\lambda_1(k_{1\max}) = \frac{h_0^3}{54\eta} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{k_1^4 (k_2^2 + k_1^2/3)}{k_{12}^2 + k_1^2/3}. \quad (25)$$

Для системы вода–*n*-гептан последняя формула дает $1,10 \cdot 10^{13} \times h_0^3 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$, что всего на 3% больше, чем точный результат (24), и поэтому полученная величина может считаться в достаточной степени достоверной.

На рисунке 3 показан спектр показателя скорости экспоненциального роста возмущений $\lambda(k)$. Спектр имеет 4 ветви, полученные из уравнения (16). Пара ветвей, обозначенная штрихпунктирными линиями, отвечает паре комплексно-сопряженных решений характеристического уравнения с отрицательной мнимой частью при любом k . Вторая пара ветвей, представленная штриховыми линиями, изображает пару комплексно-сопряженных значений λ в области, где их мнимая часть $\text{Im}(\lambda)$ не равна нулю, а в остальной области она отвечает паре вещественных решений, одно из которых может принимать положительные значения, и всегда пересекает ось абсцисс в точке $k = k_1$. Сплошной линией представлена аппроксимация (23) для единственной ветви λ , имеющей неотрицательную действительную часть.

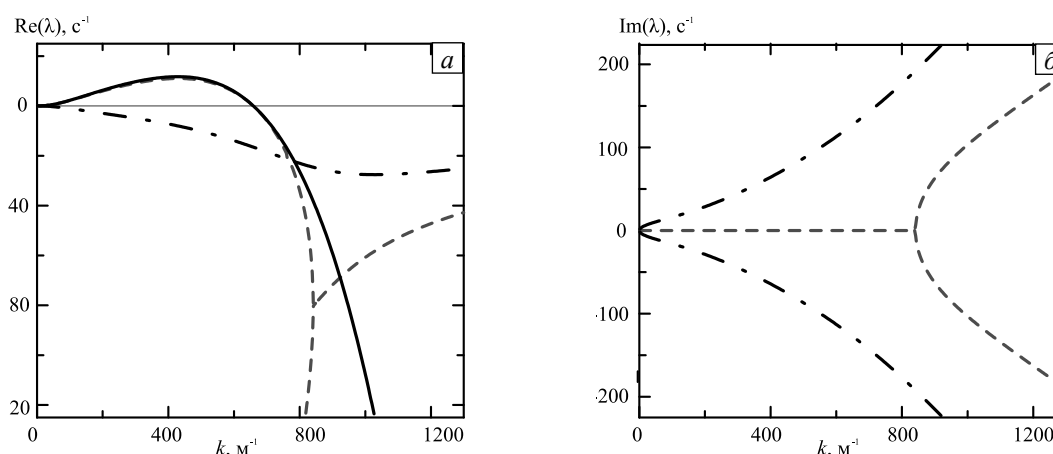


Рис. 3. Спектр показателя скорости экспоненциального роста возмущений $\lambda(k)$; представлены вещественная (а) и мнимая (б) части для системы вода–*n*-гептан при $A = 0,3A$

4. Заключение

В работе рассмотрена задача гравитационной неустойчивости тонкого слоя пара, заключенного между двумя устойчиво стратифицированными слоями жидкостей. Когда система является бесконечно протяженной в горизонтальном направлении (что на практике соответствует системам с горизонтальными размерами более нескольких сантиметров), волновое число возмущений не ограничено снизу, и система всегда находится в неустойчивом состоянии.

Вычислены длина волны наиболее опасной неустойчивости и скорость ее экспоненциального нарастания, которые хорошо согласуются с данными эксперимента [5]. Так как возмущенное течение экспоненциально затухает по мере удаления от парового слоя ($\sim e^{-k|z|} e^{ikx}$) и уменьшается в $e^{2\pi} \approx 540$ раз на расстоянии, равном длине волны, слои жидкости толщиной, составляющей половину длины волны, могут с хорошей точностью рассматриваться как полупространства, то есть для таких систем полученные результаты можно считать достаточно надежными. Для типичных жидкостей необходимая толщина слоя составляет около 0,5 см.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-04842) и Министерства образования и науки Пермского края (соглашение № С-26/212).

Литература

1. Lord Rayleigh (Strutt J.W.) Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. London Math. Soc. – 1882. – Vol. s1-14. – P. 170-177. DOI
2. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1950. – Vol. 201, no. 1065. – P. 192-196. DOI
3. Sharp D.H. An overview of Rayleigh–Taylor instability // Physica D. – 1984. – Vol. 12, no. 1-3. – P. 3-18. DOI
4. Пименова А.В., Голдобин Д.С. Кипение на границе двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент // ЖЭТФ. – 2014. – Vol. 146, no. 1. – С. 105-115. (English version DOI).
5. Pimenova A.V., Goldobin D.S. Boiling of the interface between two immiscible liquids below the bulk boiling temperatures of both components // Eur. Phys. J. E. – 2014. – Vol. 37, no. 11. – P. 108. DOI

6. Wang C.Y. The three-dimensional flow due to a stretching flat surface // *Phys. Fluids*. – 1984. – Vol. 27. – P. 1915-1917. [DOI](#)

References

1. Lord Rayleigh (Strutt J.W.). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. London Math. Soc.*, 1882, vol. s1-14, pp. 170-177. [DOI](#)
2. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1950, vol. 201, no. 1065, pp. 192-196. [DOI](#)
3. Sharp D.H. An overview of Rayleigh–Taylor instability. *Physica D*, 1984, vol. 12, no. 1-3, pp. 3-18. [DOI](#)
4. Pimenova A.V., Goldobin D.S. Boiling at the boundary of two immiscible liquids below the bulk boiling temperature of each component. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2014, vol. 119, no. 1, pp. 91-100. [DOI](#)
5. Pimenova A.V., Goldobin D.S. Boiling of the interface between two immiscible liquids below the bulk boiling temperatures of both components. *Eur. Phys. J. E*, 2014, vol. 37, no. 11, pp. 108. [DOI](#)
6. Wang C.Y. The three-dimensional flow due to a stretching flat surface. *Phys. Fluids*, 1984, vol. 27, pp. 1915-1917. [DOI](#)

Поступила в редакцию 18.02.2015; опубликована в электронном виде 30.06.2015

Сведения об авторах

Пименова Анастасия Владимировна, асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: anastasiya.pimenova@gmail.com

Голдобин Денис Сергеевич, кфмн, снс, рук. гр., ИМСС УрО РАН; e-mail: denis.goldobin@gmail.com