

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.16

УДК 534.1:519.63:624.042

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СИСТЕМ ПРОФИЛИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Ю.В. Немировский¹, А.В. Мищенко²¹*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*²*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Российская Федерация*

Излагается общий подход к построению решения прямой динамической задачи расчета напряженно-деформированного состояния композитных стержней, составляющих основу стержневых систем произвольного вида. Решение находится при учете широкого разнообразия материалов и динамических режимов нагружения. Приняты во внимание сдвиговые эффекты и взаимодействие между элементами конструкции и опорными средами. Предложенные неоднородные стержни, как элементы стержневых систем, характеризуются высокими показателями прочности и жесткости в сочетании с пониженными по сравнению с однородными элементами затратами на их изготовление. В уравнения движения и физические соотношения введены четыре жесткостные, четыре вязкостные и три массовые функциональные характеристики, эквивалентно отражающие в рамках одномерной модели динамическое деформирование композитного стержня. С использованием тригонометрических рядов Фурье динамические нагрузки и перемещения представляются в виде произведений функций, зависящих от координаты и времени. Решение однородной задачи выражается через матрицант системы уравнений первого порядка. Частные решения для нагрузок различных типов найдены на основе аппроксимации их и искомым перемещений в виде тригонометрических рядов. Исследованы воздействия различных видов нагрузок (общего типа, мгновенно приложенных, «взрывных», гармонических). Описаны частные случаи расчетных схем стержня с упрощением основных соотношений, а также результаты, получающиеся при пренебрежении рядом слагаемых в физических уравнениях и уравнениях движения. В качестве примера решена задача неустановившихся колебаний металло-кирпичной дымовой трубы при динамическом ветровом воздействии. Оценено и показано существенное влияние параметров неустановившегося движения конструкции на ее прочность и жесткость, а также на функциональные динамические коэффициенты.

Ключевые слова: композитный слоистый стержень, динамическая нагрузка, вязкоупругое деформирование, жесткостные, вязкостные и массовые характеристики, динамический коэффициент

DYNAMIC ANALYSIS OF COMPOSITE RODS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

Yu.V. Nemirovsky¹ and A.V. Mishchenko²¹*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation*²*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation*

A general approach to the direct dynamic problem of calculation of the stress-strain state in composite rods is developed. These rods are elements of the system of plane arbitrary composite rods tested for a variety of materials and dynamic loading modes. The proposed computational model takes into account average shear deformations and visco-elastic medium interactions. Being the elements of rod systems such heterogeneous rods are characterized by high strength and rigidity ratios and, at the same time, by lower production cost in comparison with homogeneous rods. The equations of motion and physical relations include several functional characteristics, namely 4ch of rigidity, 4ch of viscosity, 3ch of mass, in order to represent correctly the dynamic deformation of heterogeneous elements in terms of one-dimensional model. Dynamic loads and displacement are products of separate functions of space and time. The time function is represented as a trigonometric Fourier series. Solution to the homogeneous problem is obtained using a matrizant for first-order equations. For different loading modes, partial solutions are found using an approximation of these loads and desired displacements as trigonometrical series. Generally, momentary explosive, blasting and harmonic loads are investigated. Special cases of the design scheme of rods along with simplification of basic relations are described, and the results obtained under the assumption that a number of terms in physical and motion equations are ignored are given. The example problem of metal-brick smoke-stack unsteady oscillations is solved. The smoke-stack was exposed to the dynamic wind load. It is shown that the unsteady dynamic motion parameters have a significant effect on the strength and rigidity of the structure, as well as on the functional dynamic factors.

Key words: composite layered rod, dynamic load, visco-elastic deformation, rigid, viscous and mass characteristics, dynamic factor

1. Введение

Современные технологии позволяют создавать разнообразные конструкции из практически любых наборов материалов. Однако наряду с широким распространением композитов в технике в целом следует отметить их явно недостаточное применение в стержневых системах, в частности, в рамно-балочных. В настоящее время в сооружениях с разделенными несущими и ограждающими функциями конструкций актуальным является использование многослойных структур, выполненных из набора конструкционных материалов.

Полученные таким образом проекты неоднородных стержневых систем со структурой, адаптированной к напряженно-деформированному состоянию, могут, при сохранении показателей прочности и жесткости, иметь на 30–40% меньшую стоимость и материалоемкость, чего в настоящее время уже не удастся достичь в однородных системах [1].

В настоящее время работы, посвященные динамике неоднородных конструкций, довольно малочисленны. Задачи колебаний многослойных стержней обсуждались В.Н. Бакулиным, В.В. Васильевым,

Э.Ю. Григолоком, Г.Л. Горыниным, А.В. Крысько, В.Г. Пискуновым, И.Т. Селезовым, А.А. Трещевым, В.А. Фирсовым и другими. В большинстве из них фигурируют различные подходы и варианты неклассических теорий стержней [2], позволяющие выполнить расчет напряженно-деформированного состояния в уточненной постановке. Но в силу значительной трудоемкости применяемых расчетных моделей решение наиболее важных и актуальных классов задач — оптимизационных, динамических, реологических — для произвольных композитных стержневых систем становится весьма затруднительным.

Авторы данной статьи прибегают в своих работах к подходу, основанному на классических теориях стержней (Бернулли и Тимошенко), с введением определенных ограничений на геометрические и физические параметры композитной системы. В результате появляется возможность выполнить решение основных классов задач механики композитных стержневых систем (в том числе и обратных задач) с включением в разрешающие уравнения нелинейных факторов и широкого спектра внешних воздействий. Некоторые аспекты динамического деформирования неоднородных стержневых систем рассматривались авторами в работах [3, 4]. Здесь излагается подход к построению решения прямой динамической задачи для композитных профилированных стержней, составляющих основу стержневых систем произвольного вида, при учете сдвиговых эффектов и взаимодействия между элементами конструкции и опорными средами для различных материалов и динамических режимов нагружения.

2. Расчетная модель композитного стержня

В зависимости от направления, в котором реализуется слоистая неоднородность в стержне, он может иметь различную структуру (см. Рис. 1).

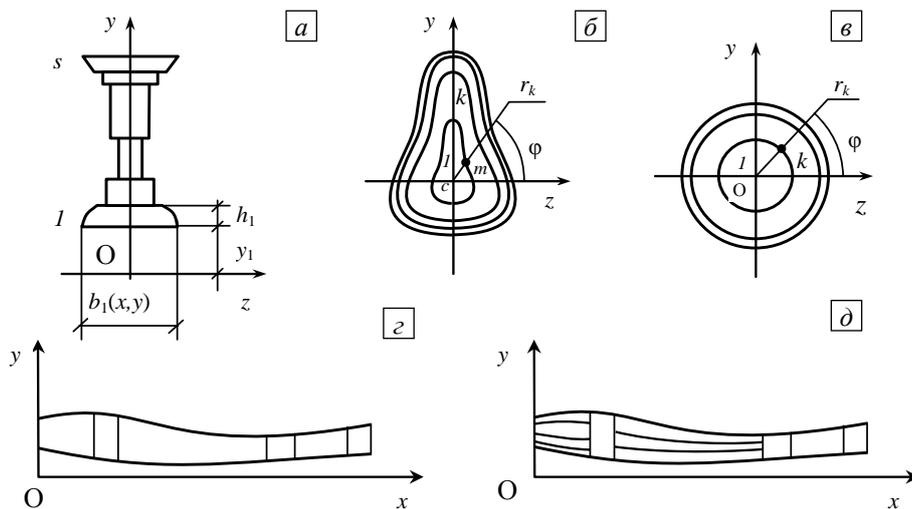


Рис. 1. Типы слоистых структур композитных стержней: поперечная (а), полярная (б), радиальная (в), продольная (г), продольно-поперечная (д)

Рассмотрим поперечно-слоистый стержень длиной l , составленный из s слоев. Его структура содержит границы $y_k(x)$ ($k = 1, \dots, s+1$), произвольно привязана в системе координат $Oxuz$ к отсчетной плоскости $y = 0$. Слои, имеющие поперечные размеры (ширину $b_k(x, y)$ и толщину $h_k(x)$), выполнены из различных однородных материалов с обеспечением идеального межслойного контакта. Материал k -го слоя характеризуется объемной плотностью ρ_k , модулем упругости E_k и коэффициентом вязкости η_k .

Полагаем, что параметры композитного стержня удовлетворяют ограничениям: а) порядки числовых значений одноименных физических характеристик используемых материалов одинаковы; б) стержень относительно тонок — мал поперечный размер сечения h при условии $l \geq (5 \div 6)h$. Примем следующий вариант кинематических соотношений для функций продольных (u) и поперечных (v) перемещений, деформаций ε_x , ε_y и сдвигов γ_{yx} :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, t) - \theta(x, t)y, & v(x, y, t) &= v_0(x, t), \\ \varepsilon_x(x, y, t) &= \varepsilon_0(x, t) - \kappa(x, t) \cdot y, & \varepsilon_y(x, y, t) &= 0, & \gamma_{yx}(x, y, t) &= -\gamma_0(x, t), \\ \varepsilon_0(x, t) &= u'_0(x, t), & \kappa(x, t) &= \theta'(x, t), & \theta(x, t) &= v'(x, t) + \gamma_0(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где u_0, v_0 — смещения точек продольной оси; θ — угол поворота плоскости поперечного сечения относительно оси z ; γ_0 — осредненный по координате y сдвиг; ε_0, κ — деформация и кривизна оси (последняя включает поправку на γ'_0); штрихом обозначено дифференцирование по координате x .

В плоскости симметрии $z = 0$ к стержню приложены нагрузки $q_x(x, t), q_y(x, t), m_z(x, t)$, действуют инерционные силовые факторы

$$[q_{x,dyn}, q_{y,dyn}, m_{z,dyn}](x, t) = -\sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} [(\ddot{u}_0 - \ddot{\theta}y), \ddot{v}_0, (\ddot{u}_0 - \ddot{\theta}y)y] dA \quad (2)$$

и реакции вязкоупругого основания

$$\begin{aligned} q_x^{(r)}(x, t) &= -\beta_x b_r(x) u(x, y_r, t) - c_x b_r(x) \dot{u}(x, y_r, t), \\ q_y^{(r)}(x, t) &= -\beta_y b_r(x) v(x, t) - c_y b_r(x) \dot{v}(x, t), \\ m_z^{(r)}(x, t) &= q_x^{(r)} y_r, \end{aligned} \quad (3)$$

где A_k — площадь поперечного сечения k -го слоя; β_x, β_y — коэффициенты жесткости; c_x, c_y — вязкости основания (опорной среды) при смещении в направлении осей x и y ; $b_r(x), y_r(x)$ — ширина поверхности контакта стержня с основанием и ее координата; точкой обозначено дифференцирование по времени.

Интегральные уравнения движения гибкого слоистого стержня, записанные с учетом гипотез (1), факторов (2) и реактивных нагрузок (3) при использования обобщенных усилий

$$[N, Q, M](x, t) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA, \quad (4)$$

принимают вид:

$$\begin{cases} N' + (Q\theta)' - \beta_{x0} u_0 + \beta_{x0} \theta - c_{xx} \dot{u}_0 + c_{x0} \dot{\theta} = -q_x + m_A \ddot{u}_0 - m_S \ddot{\theta}, \\ Q' - (N\theta)' + \beta_{yy} v_0 + c_{yy} \dot{v}_0 = q_y - m_A \ddot{v}_0, \\ M' + \beta_{x0} u_0 - \beta_{00} \theta + c_{x0} \dot{u}_0 - c_{00} \dot{\theta} = Q + m_z + m_I \ddot{\theta} - m_S \ddot{u}_0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь введены обобщенные характеристики жесткости и вязкости основания, а также обобщенные массовые характеристики стержня:

$$\begin{aligned} [\beta_{xx}, \beta_{x0}, \beta_{00}](x) &= \beta_x b_r [1, y_r, y_r^2], & \beta_{yy}(x) &= \beta_y b_r, \\ [c_{xx}, c_{x0}, c_{00}](x) &= c_x b_r [1, y_r, y_r^2], & c_{yy}(x) &= c_y b_r, \\ [m_A, m_S, m_I](x) &= \sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что многие материалы, особенно при динамических нагружениях, обладают свойствами вязкости (внутренним трением) [5, 6], примем для нормальных напряжений закон вязкоупругого деформирования

$$\sigma_x^{(k)}(x, y, t) = E_k \varepsilon_x(x, y, t) + \eta_k \dot{\varepsilon}_x(x, y, t) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (7)$$

Касательные напряжения могут быть определены из условия динамического равновесия сдвигаемой части $y \in [y, y_{s+1}]$ слоистого элемента dx , которое без учета массовых сил запишем в виде:

$$\begin{aligned} &\int_y^{y_{k+1}+dy_{k+1}} (\sigma_x^{(k)} + d\sigma_x^{(k)})(b_k + db_k) dy + \sum_{j=k+1}^s \int_{y_j+dy_j}^{y_{j+1}+dy_{j+1}} (\sigma_x^{(j)} + d\sigma_x^{(j)})(b_j + db_j) dy - \\ &- \int_y^{y_{k+1}} \sigma_x^{(k)} b_k dy - \sum_{j=k+1}^s \int_{y_j}^{y_{j+1}} \sigma_x^{(j)} b_j dy - (\tau_{xz}^{(k)} + d\tau_{xz}^{(k)}/2)(b_k + db_k/2) dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда после преобразований и отбрасывания малых величин высших порядков, а также исходя из теоремы о производной интеграла с переменными пределами по параметру, найдем напряжение

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, t) = -\frac{1}{b_k(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_y^{y_{k+1}(x)} \sigma_x^{(k)}(x, y, t) b_k(x, y) dy + \sum_{j=k+1}^s \int_{y_j(x)}^{y_{j+1}(x)} \sigma_x^{(j)}(x, y, t) b_j(x, y) dy \right). \quad (8)$$

Погонную сдвигающую силу — производную от суммы интегралов в (8) — аппроксимируем выражением

$$\frac{\partial N^{\text{sec}}(x, y, t)}{\partial x} = b_0 \tau_0(x, t) f_\tau(y), \quad (9)$$

где $f_\tau(y)$ — заданная безразмерная функция формы поперечного распределения сдвигающих сил, удовлетворяющая условиям: $f_\tau(y_1) = f_\tau(y_{s+1}) = 0$; $\tau_0(x)$ — функциональный параметр, характеризующий продольное распределение сдвигающих сил; b_0 — характерный размер (ширина сечения). Объединив (8), (9) и исключив при помощи выражения для $Q(x, t)$ (см. (4)) параметр $\tau_0(x)$, получим формулу касательного напряжения:

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, t) = \frac{Q(x, t) f_\tau(y)}{b_k(x, y) F_\tau}, \quad F_\tau = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy. \quad (10)$$

Для величин удельной (погонной) энергии деформации при сдвиге $W_Q(x, t)$ и мощности $\partial W_Q(x, t) / \partial t$ запишем два условия эквивалентности: через обобщенные — Q , γ_0 , $\dot{\gamma}_0$, и локальные — $\tau_{yx}^{(k)}$, γ_{yx} , $\dot{\gamma}_{yx}$, величины

$$W_Q = \frac{1}{2} Q \gamma_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \tau_{yx}^{(k)} \gamma_{yx} b_k dy, \quad \dot{W}_Q = \frac{1}{2} Q \dot{\gamma}_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \tau_{yx}^{(k)} \dot{\gamma}_{yx} b_k dy.$$

Вводя в рассмотрение на основе выражений $\gamma_0 = Q/D_Q$ и $\dot{\gamma}_0 = Q/C_Q$ обобщенную сдвиговую жесткость D_Q и вязкость C_Q сечения и учитывая, что $\gamma_{yx} = \tau_{yx}^{(k)}/G_k$, $\dot{\gamma}_{yx} = \tau_{yx}^{(k)}/\eta_{\tau k}$ ($\eta_{\tau k}$ — сдвиговая вязкость материала k -го слоя), придем к энергетически осредненным величинам сдвиговой жесткости и вязкости сечения композитного стержня

$$D_Q(x) = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k G_k} dy}, \quad C_Q(x) = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k \eta_{\tau k}} dy}. \quad (11)$$

Подстановка (7), (10), (11) в (4) дает систему дифференциальных уравнений, связывающих обобщенные деформации и их скорости с интегральными силовыми факторами при вязкоупругом деформировании:

$$\begin{cases} D_A \varepsilon_0 - D_S \kappa + C_A \dot{\varepsilon}_0 - C_S \dot{\kappa} = N, \\ -D_S \varepsilon_0 + D_I \kappa - C_S \dot{\varepsilon}_0 + C_I \dot{\kappa} = M, \\ \gamma_0 D_Q + \dot{\gamma}_0 C_Q = Q. \end{cases} \quad (12)$$

Система содержит обобщенные жесткостные и вязкостные сдвиговые характеристики (11) и характеристики продольного деформирования

$$[D_A, D_S, D_I](x) = \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \quad [C_A, C_S, C_I](x) = \sum_{k=1}^s \eta_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA. \quad (13)$$

Объединив (5), (12) с учетом (1), получим разрешающую систему трех дифференциальных уравнений относительно искомым перемещений $u_0(x, t)$, $v_0(x, t)$, $\theta(x, t)$. Выполнив переобозначение $u_0 \rightarrow u$, $v_0 \rightarrow v$, запишем ее в виде:

$$\begin{cases} (D_A u' - D_S \theta' + C_A \dot{u}' - C_S \dot{\theta}') - \beta_{xx} u + \beta_{x0} \theta - c_{xx} \dot{u} + c_{x0} \dot{\theta} - m_A \ddot{u} + m_S \ddot{\theta} = -q_x(x, t), & 1 \\ [D_Q(\theta - v') + C_Q(\dot{\theta} - \dot{v}')] - (N_{st} \theta)' + \beta_{yy} v + c_{yy} \dot{v} + m_A \ddot{v} = q_y(x, t), & 2 \\ (D_I \theta' - D_S u' + C_I \dot{\theta}' - C_S \dot{u}') + \beta_{x0} u - \beta_{00} \theta + c_{x0} \dot{u} - c_{00} \dot{\theta} - D_Q(\theta - v') - & \\ - C_Q(\dot{\theta} - \dot{v}') - m_I \ddot{\theta} + m_S \ddot{u} = m_z(x, t). & 3 \end{cases} \quad (14)$$

Здесь с целью линеаризации в (14₁) отброшено слагаемое $(Q\theta)'$, а в $(N\theta)'$ (см. (14₂)) оставлена лишь статическая компонента продольной силы — N_{st} .

Система уравнений (14) описывает связанные продольно-поперечные колебания неоднородного вязкоупругого стержня на вязкоупругом основании. Используемые в ней одиннадцать интегральных характеристик (6), (11), (13) позволяют при гипотезах (1) в полном объеме отобразить реальные физические свойства неоднородной сплошной среды стержня. В частном случае при $D_S = 0$, $C_A = C_S = C_I = 0$, $N_{st} = 0$, $c_{xx} = c_{yy} = c_{x0} = c_{00} = 0$, $m_S = 0$, $\beta_{xx} = \beta_{x0} = \beta_{00} = 0$, $k = 1$ из (14) вытекают линейные соотношения, отражающие деформирование однородного стержня Тимошенко:

$$(D_A u') - m_A \ddot{u} = -q_x, \quad [D_Q(\theta - v')] + m_A \ddot{v} = q_y, \quad (D_I \theta') - D_Q(\theta - v') - m_I \ddot{\theta} = m_z.$$

Для замыкания начально-краевой задачи запишем условия:

– начальные

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \theta(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{v}(x, 0) = \dot{\theta}(x, 0) = 0; \quad (15)$$

– граничные — в концевых сечениях с координатами $x_* = 0, l$

– жестко закрепленных

$$u(x_*, t) = u_*(t), \quad v(x_*, t) = v_*(t), \quad \theta(x_*, t) = \theta_*(t), \quad (16)$$

– податливо закрепленных

$$\begin{aligned} N(x_*, t) \mp R_{x_*}(t) \pm F_{x_*}(t) &= 0, \\ \theta(x_*, t) N_{st}(x_*) - Q(x_*, t) \mp R_{y_*}(t) \pm F_{y_*}(t) &= 0, \\ M(x_*, t) \mp R_{0_*}(t) \mp m_{z_*}(t) &= 0, \end{aligned}$$

где $R_{x_*}(t) = D_{x_*} u(x_*, t) + C_{x_*} \dot{u}(x_*, t)$, $R_{y_*}(t) = D_{y_*} v(x_*, t) + C_{y_*} \dot{v}(x_*, t)$, $R_{0_*}(t) = D_{0_*} \theta(x_*, t) + C_{0_*} \dot{\theta}(x_*, t)$ — реакции продольной, поперечной и угловой концевых вязкоупругих связей, имеющих характеристики жесткости D_{x_*} , D_{y_*} , D_{0_*} и вязкости C_{x_*} , C_{y_*} , C_{0_*} . При этом на левом конце ($x_* = 0$) применяются выражения с верхними знаками, а на правом ($x_* = l$) — с нижними. Заданные на границах стержня функции перемещений $u_*(t)$, $v_*(t)$, $\theta_*(t)$ позволяют описывать кинематические воздействия.

3. Свободные колебания композитного стержня

Свободные колебания стержня описываются системой однородных уравнений, соответствующих (14). Решение представим в форме

$$u(x, t) = \sum_i U_i(x) T_i(t), \quad v(x, t) = \sum_i V_i(x) T_i(t), \quad \theta(x, t) = \sum_i \Theta_i(x) T_i(t) \quad (17)$$

с экспоненциальными функциями времени $T_i(t) = \exp(\lambda_i t)$, где λ_i — частотный параметр, и функциями форм движения $U_i(x)$, $V_i(x)$, $\Theta_i(x)$. Учитывая (17) и опуская у величин U_i , V_i , Θ_i , λ_i индекс i , из (14) получим:

$$\begin{cases} (D_A + \lambda C_A) U'' + (D'_A + \lambda C'_A) U' - (D_S + \lambda C_S) \Theta'' - (D'_S + \lambda C'_S) \Theta' - & \\ - (\beta_{xx} + \lambda c_{xx} + \lambda^2 m_A) U + (\beta_{x0} + \lambda c_{x0} - \lambda^2 m_S) \Theta = 0, & 1 \\ (D_Q + \lambda C_Q) \Theta' + (D'_Q + \lambda C'_Q) \Theta - (D_Q + \lambda C_Q) V'' - (D'_Q + \lambda C'_Q) V' - & \\ - (N_{st} \Theta)' + (\beta_{yy} + \lambda c_{yy} + \lambda^2 m_A) V = 0, & 2 \\ (D_I + \lambda C_I) \Theta'' + (D'_I + \lambda C'_I) \Theta' - (D_S + \lambda C_S) U'' - (D'_S + \lambda C'_S) U' + & \\ + (\beta_{x0} + \lambda c_{x0} + \lambda^2 m_S) U - (\beta_{00} + \lambda c_{00} + \lambda^2 m_I) \Theta - (D_Q + \lambda C_Q) (\Theta - V') = 0. & 3 \end{cases} \quad (18)$$

Вводя векторную функцию $\mathbf{W}_0(x) = [U \ V \ \Theta]^T$, представим (18) в виде:

$$\sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \mathbf{W}_0(x) = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_0 = \left[\begin{array}{c|c|c} -\beta_{xx} - \lambda c_{xx} - \lambda^2 m_A & 0 & \beta_{x0} + \lambda c_{x0} + \lambda^2 m_S \\ \hline 0 & +\beta_{yy} + \lambda c_{yy} + \lambda^2 m_A & D'_Q + \lambda C'_Q - N'_{st} \\ \hline \beta_{x0} + \lambda c_{x0} \lambda^2 m_S & 0 & {}_I - \beta_{00} - \lambda c_{00} - D_Q - \lambda C_Q - \lambda^2 m_I \end{array} \right],$$

$$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} D'_A + \lambda C'_A & 0 & -D'_S - \lambda C'_S \\ \hline 0 & -D'_Q - \lambda C'_Q & D_Q + \lambda C_Q - N_{st} \\ \hline -D'_S - \lambda C'_S & D_Q + \lambda C_Q & {}_I D'_I + \lambda C'_I \end{array} \right], \quad \mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} D_A + \lambda C_A & 0 & -D_S - \lambda C_S \\ \hline 0 & -D_Q - \lambda C_Q & 0 \\ \hline -D_S - \lambda C_S & 0 & {}_I D_I - \lambda C_I \end{array} \right].$$

Сведем (19) к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектор-функции $\mathbf{W}(x) = [\mathbf{W}_0 \ \mathbf{W}_1]^T$ (здесь $\mathbf{W}_i = d^i \mathbf{W}_0 / dx^i$). Приняв во внимание условия связи $d\mathbf{W}_0/dx = \mathbf{W}_1$, $d\mathbf{W}_1/dx = \mathbf{W}_2$ и вызвав из (19) вектор-функцию $\mathbf{W}_2 = -\mathbf{A}_2^{-1}(\mathbf{A}_0 \mathbf{W}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{W}_1)$, установим искомое соотношение:

$$\frac{d\mathbf{W}(x)}{dx} = \mathbf{A}(x, \lambda) \mathbf{W}(x), \quad (20)$$

$$\mathbf{A}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_3 \\ -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}(x) = [U \ V \ \Theta \ U' \ V' \ \Theta']^T, \quad \mathbf{E}_3 = \text{diag}[1 \ 1 \ 1]. \quad (21)$$

Общее решение уравнения (20) запишем как

$$\mathbf{W}(x, \lambda) = \Omega(x, \lambda) \mathbf{H},$$

где \mathbf{H} — некоторая числовая матрица, а Ω — матрицант системы (20), заданный как бесконечный матричный интегральный ряд [7]:

$$\Omega(x, \lambda) = \mathbf{E} + \int_0^x \mathbf{A}(x, \lambda) dx + \int_0^x \mathbf{A}(x, \lambda) dx \int_0^x \mathbf{A}(x, \lambda) dx + \dots, \quad (22)$$

(\mathbf{E} — единичная матрица). Тогда с граничными условиями (16) для набора функций вектора $\mathbf{W}(x)$ из (22) следует система линейных однородных уравнений $\Gamma(x_s, \lambda) \mathbf{H} = 0$, ($x_s = 0, l$) и соответствующее характеристическое уравнение для определения спектра частот собственных колебаний композитного стержня:

$$\det[\Gamma(x_s, \lambda)] = 0. \quad (23)$$

Элементы матрицы \mathbf{A} в (21) содержат дробно-рациональные функции, зависящие от функциональных характеристик $D(x)$, $C(x)$, $m(x)$, $\beta(x)$, $c(x)$. Эффективным численным приемом в этой ситуации будет разбиение интервала $[0, l]$ на части $x \in [x_i, x_{i+1}]$ с предположением в пределах каждой из них постоянства матрицы $\mathbf{A}(x, \lambda) = \mathbf{A}_i(\lambda)$. Тогда, с учетом свойства матрицанта $\Omega_{x_0}^x = \Omega_{x_1}^x \cdot \Omega_{x_0}^{x_1}$ [7], из (22) получим:

$$\Omega_0^x(\lambda) = [\mathbf{E} + \mathbf{A}_r(\lambda) \Delta x_r] \cdot [\mathbf{E} + \mathbf{A}_{r-1}(\lambda) \Delta x_{r-1}] \cdot \dots \cdot [\mathbf{E} + \mathbf{A}_1(\lambda) \Delta x_1]. \quad (24)$$

Выражения $\Omega_{x_0}^{x_0} = \mathbf{E}$ и $\Omega_{x_0}^{x_1}$, записанные на основе (24), позволяют, согласно граничным условиям, сформировать частотное уравнение, аналогичное (23). При этом бесконечные матричные ряды (22), (24) дают бесконечный, а усеченные — конечный спектр значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

При сохранении применяемой выше идеологии построения решения отметим некоторые частные случаи.

3.1. Поскольку при характеристиках материалов со значениями одного порядка продольные и поперечные перемещения соотносятся как $u/v \sim (h/l)^2$, то для тонких стержней пренебрежение связностью

перемещений в (14₁), (18₁) недопустимо, а в (14₃), (18₃), наоборот, не должно вызывать большой погрешности. Также в тонких стержнях не оказывает значительного влияния и инерция вращения, что позволяет отбросить слагаемое, содержащее m_I в (14₃), (18₃).

3.2. Для стержня симметричной структуры (включая и симметрию граничных условий относительно отсчетной плоскости $y = 0$) имеем $D_S(x) = C_S(x) = m_S(x) = 0$, что при $\beta_{x0} = c_{x0} = 0$ приводит к распадению однородной системы на два блока

$$\begin{cases} (D_A u' + C_A \dot{u}') - \beta_{xx} u - c_{xx} \dot{u} - m_A \ddot{u} = 0, \\ [D_Q(\theta - v') + C_Q(\dot{\theta} - \dot{v}')] - (N_{sr} \theta)' + \beta_{yy} v + c_{yy} \dot{v} + m_A \ddot{v} = 0, \\ (D_I \theta' + C_I \dot{\theta}') - \beta_{\theta\theta} \theta - c_{\theta\theta} \dot{\theta} - D_Q(\theta - v') - C_Q(\dot{\theta} - \dot{v}') - m_I \ddot{\theta} = 0, \end{cases}$$

описывающих, соответственно, продольные и поперечные колебания со своими частотными спектрами.

3.3. В случае а) использования материалов с однопипными по вязкости свойствами при соблюдении равенства $\eta_k = 2\eta_0 E_k$ (откуда следует, что $C = 2\eta_0 D$), б) отсутствия сил взаимодействия с основанием $\beta_x = \beta_y = c_x = c_y = 0$, в) пренебрежения нелинейными членами, система разрешающих уравнений (14) приводится к однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} [D_A(u' + 2\eta_0 \dot{u}') - D_S(\theta' + 2\eta_0 \dot{\theta}')] - m_A \ddot{u} + m_S \ddot{\theta} = 0, \\ [D_Q((\theta - v') + 2\eta_0(\dot{\theta} - \dot{v}'))]' + m_A \ddot{v} = 0, \\ [D_I(\theta' + 2\eta_0 \dot{\theta}') - D_S(u' + 2\eta_0 \dot{u}')]' - D_Q((\theta - v') + 2\eta_0(\dot{\theta} - \dot{v}')) - m_I \ddot{\theta} + m_S \ddot{u} = 0. \end{cases}$$

Тогда подстановка в нее перемещений в виде разложений (17) дает однородную систему с разделенными переменными без априорной конкретизации вида функции времени:

$$\begin{cases} (D_A U_i' - D_S \Theta_i') + \omega_i^2 (m_A U_i - m_S \Theta_i) = 0, \\ [D_Q(\Theta_i - V_i')] + \omega_i^2 m_A V_i = 0, \\ (D_I \Theta_i' - D_S U_i') - D_Q(\Theta_i - V_i') - \omega_i^2 [m_A V_i - (m_I V_i' - m_S U_i)'] = 0, \\ \ddot{T}_i + 2\eta_0 \omega_i^2 \dot{T}_i + \omega_i^2 T_i = 0. \end{cases}$$

При малом демпфировании ($\eta_0 < 1/\omega_i$, что обычно и имеет место в обсуждаемых задачах) четвертое уравнение описывает затухающие колебания.

4. Частное решение

Нагрузки в системе уравнений (14) представим в виде:

$$q(x, t) = \bar{q}(x) f(t), \quad q \in [q_x, q_y, m_z], \quad (25)$$

где $\bar{q}(x)$ — координатный профиль, а $f(t)$ — безразмерная функция времени, вид которой рассмотрим ниже.

4.1. Универсальным, пригодным во многих случаях является представление функции $f(t)$ в интервале $t \in [0, \tau]$ в форме тригонометрического ряда

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=0}^{j_m} (a_{qj} \cos j\omega_q t + b_{qj} \sin j\omega_q t), \quad (26) \\ a_{qj} &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} q(t) \cos j\omega_q t dt, \quad b_{qj} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} q(t) \sin j\omega_q t dt, \quad (j > 0), \quad a_{q0} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} q(t) dt, \quad b_{q0} = 0, \end{aligned}$$

где ω_q , $\tau = 2\pi/\omega_q$ — частота и период заданной динамической нагрузки. Каждая из нагрузок (25) может вводиться со своей функцией (26), отличающейся от других коэффициентами a_{qj} , b_{qj} ($j = 0, \dots, j_m$).

Перемещения и углы поворота будем искать в форме

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{j=0}^{j_m} \left[\bar{a}_{uj}(x) \cos j\omega_q t + \bar{b}_{uj}(x) \sin j\omega_q t \right], \\
v(x, t) &= \sum_{j=0}^{j_m} \left[\bar{a}_{vj}(x) \cos j\omega_q t + \bar{b}_{vj}(x) \sin j\omega_q t \right], \\
\theta(x, t) &= \sum_{j=0}^{j_m} \left[\bar{a}_{\theta j}(x) \cos j\omega_q t + \bar{b}_{\theta j}(x) \sin j\omega_q t \right].
\end{aligned} \tag{27}$$

Интегральные силовые факторы при учете (27) определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\Omega_i(x, t) &= \sum_{j=0}^{j_m} \left[a_{\Omega j}(x) \cos j\omega_q t + b_{\Omega j}(x) \sin j\omega_q t \right], \quad \Omega \in [N, Q, M], \\
a_{Nj}(x) &= D_A \bar{a}'_{uj} - D_S \bar{a}'_{\theta j} + C_A j\omega_q \bar{b}'_{uj} - C_S j\omega_q \bar{b}'_{\theta j}, \quad b_{Nj}(x) = D_A \bar{b}'_{uj} - D_S \bar{b}'_{\theta j} - C_A j\omega_q \bar{a}'_{uj} + C_S j\omega_q \bar{a}'_{\theta j}, \\
a_{Mj}(x) &= -D_S \bar{a}'_{uj} + D_I \bar{a}'_{\theta j} - C_S j\omega_q \bar{b}'_{uj} + C_I j\omega_q \bar{b}'_{\theta j}, \quad b_{Mj}(x) = -D_S \bar{b}'_{uj} + D_I \bar{b}'_{\theta j} + C_S j\omega_q \bar{a}'_{uj} - C_I j\omega_q \bar{a}'_{\theta j}, \\
a_{Qj}(x) &= D_Q (\bar{a}_{\theta j} - \bar{a}'_{vj}) + C_Q j\omega_q (\bar{b}_{\theta j} - \bar{b}'_{vj}), \quad b_{Qj}(x) = D_Q (\bar{b}_{\theta j} - \bar{b}'_{vj}) - C_Q j\omega_q (\bar{a}_{\theta j} - \bar{a}'_{vj}).
\end{aligned} \tag{28}$$

Подставив (25)–(28) в (14), получим систему $3+6j_m$ обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}
&(D_A \bar{a}'_{uj} - D_S \bar{a}'_{\theta j})' - \beta_{xx} \bar{a}_{uj} + \beta_{x0} \bar{a}_{\theta j} + j^2 \omega_q^2 [m_A \bar{a}_{uj} - m_S \bar{a}_{\theta j}] + \\
&\quad + j\omega_q [c_{x0} \bar{b}_{\theta j} - c_{xx} \bar{b}_{uj} + (C_A \bar{b}'_{uj} - C_S \bar{b}'_{\theta j})'] = -\bar{q}_x(x) a_{qxj} \quad (j=0, 1, \dots), \\
&(D_A \bar{b}'_{uj} - D_S \bar{b}'_{\theta j})' - \beta_{xx} \bar{b}_{uj} + \beta_{x0} \bar{b}_{\theta j} + j^2 \omega_q^2 [m_A \bar{b}_{uj} - m_S \bar{b}_{\theta j}] + \\
&\quad + j\omega_q [c_{xx} \bar{a}_{uj} - c_{x0} \bar{a}_{\theta j} - (C_A \bar{a}'_{uj} - C_S \bar{a}'_{\theta j})'] = -\bar{q}_x(x) b_{qxj} \quad (j=1, 2, \dots), \\
&[D_Q (\bar{a}_{\theta j} - \bar{a}'_{vj})]' - (N_{st} \bar{a}_{\theta j})' + \beta_{yy} \bar{a}_{vj} + j\omega_q c_{yy} \bar{b}_{vj} - j^2 \omega_q^2 m_A \bar{a}_{vj} = \bar{q}_y(x) a_{qyj} \quad (j=0, 1, \dots), \\
&[D_Q (\bar{b}_{\theta j} - \bar{b}'_{vj})]' - (N_{st} \bar{b}_{\theta j})' + \beta_{yy} \bar{b}_{vj} - j\omega_q c_{yy} \bar{a}_{vj} - j^2 \omega_q^2 m_A \bar{b}_{vj} = \bar{q}_y(x) b_{qyj} \quad (j=1, 2, \dots), \\
&(D_I \bar{a}'_{\theta j} - D_S \bar{a}'_{uj})' - [D_Q (\bar{a}_{\theta j} - \bar{a}'_{vj})] + \beta_{x0} \bar{a}_{uj} - \beta_{00} \bar{a}_{\theta j} + \\
&\quad + j\omega_q [c_{x0} \bar{b}_{uj} - c_{00} \bar{b}_{\theta j} + (C_I \bar{b}'_{\theta j} - C_S \bar{b}'_{uj})'] + j^2 \omega_q^2 [m_I \bar{a}_{\theta j} - m_S \bar{a}_{uj}] = \bar{m}_z(x) \bar{a}_{mj} \quad (j=0, 1, \dots), \\
&(D_I \bar{b}'_{\theta j} - D_S \bar{b}'_{uj})' - [D_Q (\bar{b}_{\theta j} - \bar{b}'_{vj})] + \beta_{x0} \bar{b}_{uj} - \beta_{00} \bar{b}_{\theta j} + \\
&\quad + j\omega_q [c_{x0} \bar{a}_{uj} - c_{00} \bar{a}_{\theta j} + (C_I \bar{a}'_{\theta j} - C_S \bar{a}'_{uj})'] + j^2 \omega_q^2 [m_I \bar{b}_{\theta j} - m_S \bar{b}_{uj}] = \bar{m}_z(x) \bar{b}_{mj} \quad (j=1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{29}$$

относительно $3+6j_m$ искоемых координатных функций из (27). Граничные условия (16), согласно с (26)–(28), для деформируемых связей принимают вид ($j=0, 1, \dots$):

$$\begin{aligned}
a_{Nj}(0) &= D_{x0} \bar{a}_{uj}(0) + j\omega_q C_{x0} \bar{b}_{uj}(0), & a_{Mj}(0) &= D_{00} \bar{a}_{\theta j}(0) + j\omega_q C_{00} \bar{b}_{\theta j}(0), \\
b_{Nj}(0) &= D_{x0} \bar{b}_{uj}(0) - j\omega_q C_{x0} \bar{a}_{uj}(0), & b_{Mj}(0) &= D_{00} \bar{b}_{\theta j}(0) - j\omega_q C_{00} \bar{a}_{\theta j}(0), \\
a_{Qj}(0) &= N_{st}(0) \bar{a}_{\theta j}(0) - D_{y0} \bar{a}_{vj}(0) - j\omega_q C_{y0} \bar{b}_{vj}(0), \\
b_{Qj}(0) &= N_{st}(0) \bar{b}_{\theta j}(0) - D_{y0} \bar{b}_{vj}(0) + j\omega_q C_{y0} \bar{a}_{vj}(0), \\
a_{Nj}(l) &= -D_{xl} \bar{a}_{uj}(l) - j\omega_q C_{xl} \bar{b}_{uj}(l), & a_{Mj}(l) &= -D_{0l} \bar{a}_{\theta j}(l) - j\omega_q C_{0l} \bar{b}_{\theta j}(l), \\
b_{Nj}(l) &= -D_{xl} \bar{b}_{uj}(l) + j\omega_q C_{xl} \bar{a}_{uj}(l), & b_{Mj}(l) &= -D_{0l} \bar{b}_{\theta j}(l) + j\omega_q C_{0l} \bar{a}_{\theta j}(l), \\
a_{Qj}(l) &= N_{st}(l) \bar{a}_{\theta j}(l) + D_{yl} \bar{a}_{vj}(l) + j\omega_q C_{yl} \bar{b}_{vj}(l), \\
b_{Qj}(l) &= N_{st}(l) \bar{b}_{\theta j}(l) + D_{yl} \bar{b}_{vj}(l) - j\omega_q C_{yl} \bar{a}_{vj}(l),
\end{aligned} \tag{30}$$

а для недеформируемых связей при отсутствии кинематического воздействия будут следующими:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{uj}(0) &= \bar{b}_{uj}(0) = \bar{a}_{vj}(0) = \bar{b}_{vj}(0) = \bar{a}_{\theta j}(0) = \bar{b}_{\theta j}(0) = 0, \\
\bar{a}_{uj}(l) &= \bar{b}_{uj}(l) = \bar{a}_{vj}(l) = \bar{b}_{vj}(l) = \bar{a}_{\theta j}(l) = \bar{b}_{\theta j}(l) = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

При задании в (16) ненулевых функций $u_*(t)$, $v_*(t)$, $\theta_*(t)$ на границах стержня они раскладываются в ряды Фурье по аналогии с параметрами силового воздействия (см.(25), (26)).

Решение краевой задачи (29)–(31) для системы с переменными коэффициентами может быть выполнено численными способами, основанными, например, на использовании базисных функций, рядов, последовательных приближений, вариационных [8] и других подходов.

4.2. Для нагрузок «взрывного» типа функцию времени в (25) представим в виде экспоненты $f(t) = \exp(-\lambda_f t)$ ($\lambda_f > 0$). Записав в подобной форме перемещения

$$u(x,t) = U(x)\exp(-\lambda_f t), \quad v(x,t) = V(x)\exp(-\lambda_f t), \quad \theta(x,t) = \Theta(x)\exp(-\lambda_f t),$$

где U, V, Θ — искомые координатные функции, из (14) получим систему

$$\begin{cases} [(D_A - \lambda_f C_A)U' - (D_S - \lambda_f C_S)\Theta']' - (\beta_{xx} - \lambda_f c_{xx} + \lambda_f^2 m_A)U + (\beta_{x0} - \lambda_f c_{x0} + \lambda_f^2 m_S)\Theta = -\bar{q}_x, \\ [(D_Q - \lambda_f C_Q)(\Theta - V')] - (N_{st}\Theta)' + (\beta_{yy} - \lambda_f c_{yy} + \lambda_f^2 m_A)V = \bar{q}_y, \\ [(D_I - \lambda_f C_I)\Theta' - (D_S - \lambda_f C_S)U'] - (D_Q - \lambda_f C_Q)(\Theta - V') + (\beta_{x0} - \lambda_f c_{x0} + \lambda_f^2 m_S)U - \\ - (\beta_{00} - \lambda_f c_{00} + \lambda_f^2 m_I)\Theta = \bar{m}_z, \end{cases}$$

которая в сочетании с условиями (16) дает краевую задачу для системы уравнений с переменными коэффициентами. Ее решение можно искать методами, упомянутыми в п. 4.1.

4.3. При мгновенном приложении нагрузок решение может быть установлено на основе общего случая, рассмотренного в п. 4.1, с функцией времени $f(t) = 1$ ($0 \leq t \leq \tau$) в (25).

Также на основе общего случая можно описать и воздействие системы гармонических нагрузок: $f(t) = \cos \omega t$. Для нахождения решения в (26) следует принять $j_m = 1$, $a_{q_0} = 0$, $b_{q_1} = 0$.

5. Численные результаты

В качестве примера выполним динамический расчет самонесущей дымовой трубы, имеющей форму усеченного полого конуса (Рис. 2), при ветровом воздействии. Структура трубы двухслойная, радиально-слоистая (Рис. 1б), первый (внутренний) слой выполнен из огнеупорного кирпича, а второй — из стали. Границы раздела слоев описываются выражениями: $r_2(x) = r_2^{(0)}(1 - x/l) + r_2^{(l)}x/l$, $r_1(x) = r_2(x) - h_1$, $r_3(x) = r_2(x) + h_2$.

Координатный профиль нагрузки (25) зададим в виде:

$$\bar{q}_y(x) = c_x p_0 k(x) B(x), \quad (32)$$

где p_0 — нормативное ветровое давление (скоростной напор) (в Па); c_x — аэродинамический коэффициент [9]; $k(x)$ — коэффициент, характеризующий изменение скорости ветра в зависимости от высоты над поверхностью земли; $B(x)$ — текущий поперечный размер сооружения.

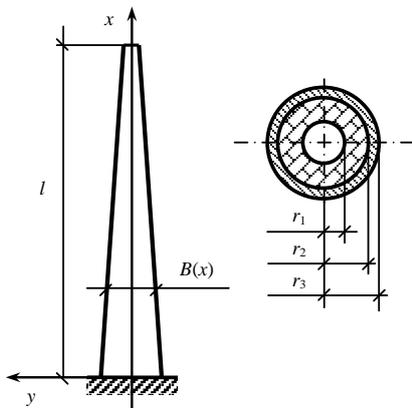


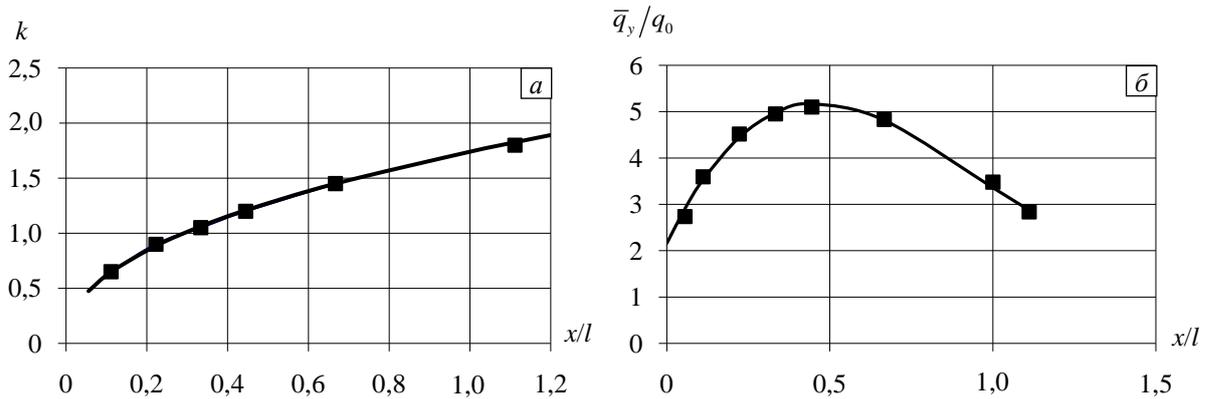
Рис. 2. Расчетная схема дымовой трубы

Безразмерную функцию времени $f(t)$ запишем в форме (26) с функцией $q(t)$, вид которой выявлен на основе статистических наблюдений. Примем следующие значения параметров: $h_1 = 0,48$ м, $E_1 = 5$ ГПа, $\rho_1 = 1900$ кг/м³; $\eta_1 = 0,015$ с, $h_2 = 0,04$ м, $E_2 = 210$ ГПа, $\rho_2 = 7800$ кг/м³; $\eta_2 = 0,005$ с; $r_2^{(0)} = 3,5$ м, $r_2^{(l)} = 1$ м, длина (высота) трубы $l = 90$ м, $p_0 = 350$ Па, $c_x = 0,7$.

Далее отражены результаты подбора в (32) величин расчетных функций $k(x)$ (Рис. 3а) и безразмерного координатного профиля $\bar{q}_y(x)/q_0$ (где $q_0 = c_x p_0$) (Рис. 3б).

Точками отмечены значения, найденные по дискретным данным норм [9]. В результате обработки согласно методу наименьших квадратов получено:

$$k = 1,734\bar{x}^{0,446}, \quad \bar{q}_y(x) = q_0(8,88\bar{x}^3 - 24,85\bar{x}^2 + 16,77\bar{x} - 2,52), \quad \bar{x} = x/l.$$

Рис. 3. Аппроксимация функций $k(\bar{x})$ (а) и $\bar{q}_y(\bar{x})/q_0$ (б)

Изменение ветровой нагрузки в течение периода времени τ , описываемое функцией $f(t)$, первоначально задавалось в форме одиночного параболического импульса в интервале $t \in [0, t_1]$ ($t_1 \leq \tau$) с сохранением в последующем постоянного значения $f(t) = 1$ при $t \in [t_1, \tau]$. Затем, при задании $\tau = 20$ с, $t_1 = 0,2\tau$, $\Delta f = 0,8$ и выполнении интегрирования для пяти гармоник, были вычислены коэффициенты расчетной аппроксимации (26):

$$\begin{aligned} [a_{q_0} \ a_{q_1} \ \dots \ a_{q_5}] &= [2,213; 1,659; 0,056; -0,045; -0,085; -0,065], \\ [b_{q_1} \ b_{q_2} \ \dots \ b_{q_5}] &= [0,120; 0,172; 0,139; 0,062; 0,000]. \end{aligned} \quad (33)$$

На рисунке 4а изображены графики заданной формы изменения нагрузки (линия 1) и расчетной аппроксимации $f(t)$ (26) с коэффициентами (33) (линия 2).

Решены следующие подзадачи: а) статического расчета при воздействии $q_x(x)$; б) статического расчета при воздействии $q_x(x)$ и $\bar{q}_y(x)$ (32); в) собственных и г) вынужденных колебаний. Основная частота собственных колебаний составила $\omega = 3,91 \text{ с}^{-1}$. Графики изменения частного (кривая 3) и общего (кривая 4) решений для максимального прогиба $v(l, t)$ с учетом статической компоненты приведены на рисунке 4б, а на рисунке 5 показаны наибольшие сжимающие напряжения $\sigma_1(0, r_2, t)$, $\sigma_2(0, r_3, t)$ в первом и втором слоях.

Графики изменения расчетных величин — максимального прогиба и напряжений — иллюстрируют наличие выраженных переходных процессов, обусловленных учетом затухающих собственных колебаний. Отношения максимальных значений динамических величин в переходном процессе к соответствующим значениям, вычисленным без учета переходных режимов (установившееся движение во втором и далее периодах) составили: 1,28 — при оценке прогибов и 1,24 — при оценке напряжений. Вследствие этого

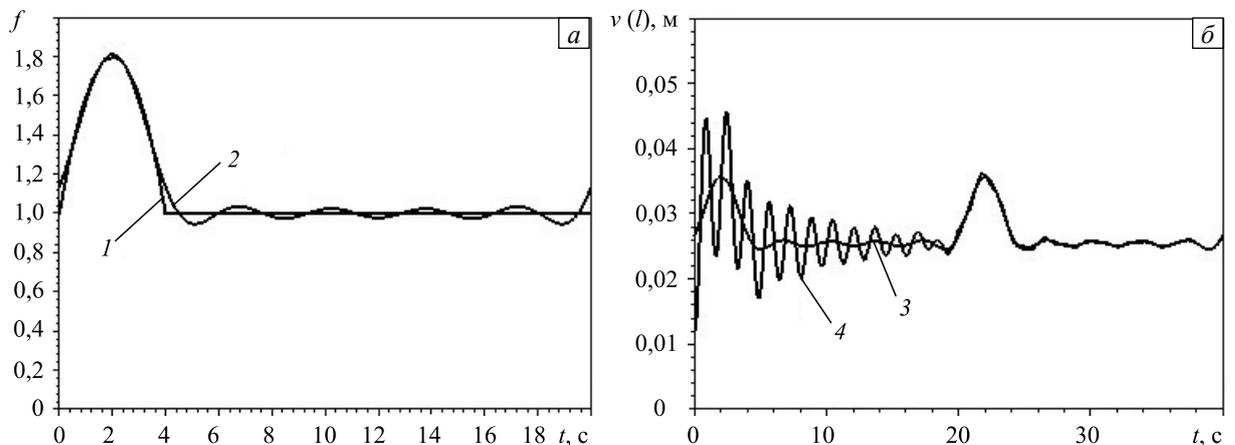


Рис. 4. Аппроксимация $f(t)$ для ветровой нагрузки (а): заданная форма изменения в интервале $t \in [0, \tau]$ (линия 1), расчетная аппроксимация (26) при коэффициентах (34) (линия 2); изменение максимального прогиба $v(l, t)$ с учетом статической компоненты (б) в интервале двух периодов: частное решение (кривая 3), общее решение (кривая 4)

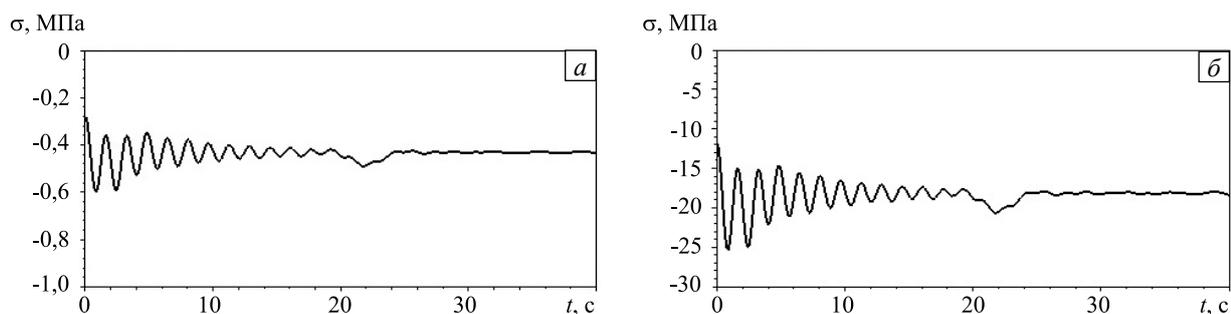


Рис. 5. Изменение наибольшего напряжения в первом (а) и втором (б) слоях

вытекает необходимость выявления всех фаз движения неоднородной системы для оценки ее прочности и жесткости при динамических воздействиях, в том числе ветровых. Расчеты показывают, что наиболее опасными являются начальные моменты времени, при которых происходит наложение циклов собственных колебаний расчетных величин на их максимумы при вынужденном движении, описываемом частным решением.

Таблица содержит значения максимального прогиба $v(l)$ и наибольших сжимающих напряжений $\sigma_1(0, r_2)$, $\sigma_2(0, r_3)$ ($x=0$, $y=r_2, r_3$) в двух слоях при различных вариантах внешнего воздействия. В первом варианте действует лишь q_x — нагрузка от собственного веса, во втором к ней добавлена статическая составляющая ветровой нагрузки $\bar{q}_y(x)$, в третьем дополнительно принята во внимание динамическая составляющая $q_y(x, t)$ в форме (25). В скобках указаны значения величин, отвечающие установившимся колебаниям, имеющим место в трубе после окончания переходных процессов.

Таблица

Вариант расчета	Вид воздействия	v_{\max} , мм	σ_1^{\max} , МПа	σ_2^{\max} , МПа
1	$q_x(x)$	0	-0,300	-12,6
2	$q_x(x), \bar{q}_y(x)$	12	-0,359	-15,1
3	$q_x(x), q_y(x, t)$	45,6 (35,7)	-0,601 (-0,483)	-25,4 (-20,4)
4	k_d	3,8 (2,98)	1,67 (1,35)	1,68 (1,35)

В последней строке таблицы приведены отношения значений динамических величин 3-го варианта к соответствующим значениям 2-го (статического) варианта, которые представляют собой динамические коэффициенты, являющиеся функциями координат опасных точек. Этот вывод свидетельствует о том, что принимаемое в литературе понятие о едином коэффициенте динамичности в ряде случаев некорректно.

Заметим, что величины k_d , полученные при оценке прогибов и напряжений, различны. Это объясняется тем, что напряжения, в отличие от прогибов, зависят не только от поперечной динамической нагрузки q_y , но и от статической q_x . На результаты динамического расчета, кроме величины динамических пульсаций ветра, существенное влияние оказывают факторы относительной продолжительности пульсаций ветра t_1/τ_q и относительная величина периодов собственных и вынужденных колебаний (см. Рис. 5). Последнее связано с наступлением в дымовой трубе околорезонансных состояний.

6. Заключение

Для композитного стержня, как элемента несущей стержневой системы нового конструктивного исполнения, разработаны расчетная модель, постановка и метод решения прямой динамической задачи при разнообразных видах воздействий и типах физических структур. Посредством введения интегральных функциональных физико-механических (жесткостных, вязкостных, массовых) характеристик стержня и функциональных характеристик опорной среды, учета деформаций сдвига обеспечивается корректное математическое отражение деформирования неоднородного стержня. Численные результаты расчета дымовой трубы показывают правомерность и необходимость выполнения расчетов высотных объектов на динамические воздействия в уточненной постановке, с выявлением фазы неустановившегося движения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-90400).

Литература

1. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2004. – 488 с.
2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. – Т. 5. – М: ВИНТИ, 1973. – 273 с.
3. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамика слоистых рам из разносопротивляющихся материалов // Известия вузов. Строительство. – 2011. – № 11. – С. 10-19.
4. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет слоисто-неоднородных балочных мостов // Ориентированные фундаментальные и прикладные исследования – основа модернизации и инновационного развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплексов России: материалы Всерос. 65-я научно-техн. конф. СибАДИ. – Омск: СибАДИ, 2011. – кн. 1. – С. 30-35.
5. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 131 с.
6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
8. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1975. – 632 с.
9. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия / Госстрой России. – М.: Стройиздат, 2005. – 48 с.

References

1. Nemirovsky Yu.V., Mishchenko A.V., Vokhmyanin I.T. *Ratsionalnoe i optimalnoe proektirovanie sloistykh stержnevyykh sistem* [Rational and optimal design of layered rod structures]. Novosibirsk: Sibstrin, 2004. 488 p.
2. Grigoluk A.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii kolebaniy stержnej, plastin i obolochek* [Nonclassical theories of vibrations of bars, plates and shells]. Moscow: VINITI, 1973. 273 p.
3. Mishchenko A.V., Nemirovsky Yu.V., Dinamika sloistykh ram is raznosoprotivlyayushchikhsya materialov [Dynamic of layered frames made from differently resistance materials]. *Izvestia Vusov. Stroitelstvo*, 2011, no. 11, pp. 10-19.
4. Mishchenko A.V., Nemirovsky Yu.V. *65-th Russian Scientific and Technical Conference of Siberian Automobile and Highway Academy (SIBADI). Omsk: SIBADI, 2011. vol. 1, pp. 30-35.*
5. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh system* [To the theory of internal friction in vibrations of elastic systems]. Moscow: Gosstroyizdat, 1960. 131 p.
6. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Leningrad: Politekhnik, 1990. 272 p.
7. Gantmakher F.R. *Theory of matrices*. New York: Chelsea Publishing Company, 1959.
8. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsialnyye uravneniya)* [Numerical methods (analysis, algebra, ordinary differential equations)]. Moscow: Nauka, 1975. 632 p.
9. *SNiP 2.01.07-85 (Stroitelnyye Normy i Pravila)* [Russian State Standards. Building Norms and Rules 2.01.07-85]. Moscow: Stroyizdat, 2005. 48 p.

Поступила в редакцию 24.11.2014; опубликована в электронном виде 30.06.2015

Сведения об авторах

Немировский Юрий Владимирович, дфмн, проф, гнс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН; Новосибирск, 630090, ул. Институтская, д. 4/1, e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Мищенко Андрей Викторович, ктн, доц., Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113; e-mail: mavr@hnet.ru