

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.14

УДК 532.5

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МОДУЛЯЦИЯ РАВНОВЕСНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОЯХ ЖИДКОСТИ И НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Е.А. Колчанова¹, Н.В. Колчанов²¹ *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*² *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

Исследуется устойчивость равновесия в подогреваемой снизу двухслойной системе слоев чистой жидкости и насыщенной пористой среды, находящихся в поле силы тяжести при наличии переменного градиента температуры. Задача решается в рамках теории Флоке, численные расчеты проводятся на основе метода построения фундаментальной системы решений с применением ортогонализации векторов частных решений и метода Галеркина. Рассматривается прямоугольная периодическая модуляция теплового потока. При этом анализируется только низкочастотная модуляция, при которой можно пренебречь пространственной неоднородностью градиента температуры. Первоначально приводятся нейтральные кривые устойчивости равновесия при постоянном градиенте температуры, затем описываются карты устойчивости, полученные в условиях его периодической модуляции. Выявлены резонансные области параметрической неустойчивости по отношению к гармоническим (с периодом, равным периоду модуляции) и субгармоническим (с периодом, вдвое большим периода модуляции) возмущениям равновесия при различных значениях приведенного числа Рэлея. Найдена область, ограничивающая основную полосу неустойчивости. Показано, что при определенных значениях частоты и амплитуды модуляции в системе только за счет периодических колебаний температуры на ее границах может возникать конвективное движение при нулевом среднем значении градиента температуры. Изучено влияние условий на границе раздела жидкого и пористого слоев на появление конвекции в системе. Обнаружено, что возмущения с меньшей длиной волны, локализованные, как правило, в жидком слое, наиболее подвержены влиянию условий на границе раздела слоев в отличие от возмущений с большей длиной волны, распространяющихся вглубь насыщенной пористой среды.

Ключевые слова: конвекция, двухслойная система, пористая среда, модуляция градиента температуры

PERIODIC MODULATION OF AN EQUILIBRIUM TEMPERATURE GRADIENT IN A FLUID LAYER AND A SATURATED POROUS MEDIUM LAYER

E.A. Kolchanova¹ and N.V. Kolchanov²¹ *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*² *Perm State University, Perm, Russian Federation*

A linear problem of equilibrium stability in a heated from below two-layer system of a pure fluid layer and a saturated porous medium layer in the presence of varying temperature gradient under gravity is investigated. The problem is solved in the framework of Floquet theory. Numerical calculations are carried out on the basis of shooting method with orthogonalization and Galerkin method. The rectangular periodic modulation of heat flux is considered. This study is limited by the low-frequency modulation when one can neglect the spatial inhomogeneity of temperature gradient. Originally we present neutral curves of equilibrium stability in the presence of constant temperature gradient. After that we describe the stability maps obtained in the conditions of its periodic modulation. Resonance regions of the parametric instability with respect to the harmonic (with the period equal to the period of modulation) and subharmonic (with the period twice as large as the period of modulation) perturbations of the equilibrium were determined for various values of the effective Rayleigh number. The region limiting the baseband of instability was found. It was shown that at certain values of the frequency and modulation amplitude the convective flow could arise in the system only due to the periodic oscillations of temperature at its boundaries when the average temperature gradient was zero. The effect of conditions at the interface between the fluid and porous layers on the onset of convection in the system was studied. It was determined that perturbations of the smaller wave length, generally located in the fluid layer, were most affected by conditions at the interface between layers in contrast to the perturbations of the larger wave length propagating inside the saturated porous medium.

Key words: convection, two-layer system, porous medium, modulation of temperature gradient

1. Введение

Изучается влияние периодически изменяемого градиента температуры на возникновение конвекции в подогреваемой снизу двухслойной системе «однородная жидкость–пористая среда, насыщенная той же жидкостью», в поле силы тяжести.

Конвективные движения в слоях жидкости и насыщенной пористой среды образуются при наличии неоднородности плотности, вызванной неоднородностью нагрева (градиентом температуры). Такие движения широко распространены в различных природных и технологических процессах. Известно, что тепловая циркуляция воды в прибрежных областях, течения в гейзерах и горячих источниках, течение грунтовых вод определяются конвекцией. В промышленности конвекцию следует учитывать при работе с искусственными пористыми материалами, теплообменниками ядерных реакторов, а также в процессах циркуляции воды в водохранилищах. Одним из способов управления конвективным тепло- и массопереносом является периодическое изменение теплового потока. Переменный тепловой поток может быть обусловлен периодическими, например, суточными или сезонными колебаниями температуры

и даже в отсутствие постоянного среднего градиента температуры способствует возникновению конвективных движений в жидком и пористом слоях.

Возбуждение конвекции в слоях однородной жидкости и насыщенной пористой среды в поле силы тяжести при постоянном вертикальном градиенте температуры численно исследовалось в работах [1–3]. Установлена граница устойчивости равновесия, соответствующая зарождению конвективного движения жидкости, и обнаружено, что при больших толщинах жидкого слоя в системе реализуются возмущения с малой длиной волны, локализованные в основном в жидком слое. С уменьшением относительной толщины жидкого слоя возмущения начинают проникать в пористый слой, и неустойчивость определяется развитием возмущений с большей длиной волны, охватывающих оба слоя. Показано, что нейтральные кривые устойчивости равновесия могут проявлять бимодальный характер при изменении проницаемости пористой среды, отношения теплопроводностей пористого и жидкого слоев и другого.

В литературе имеется ряд работ, посвященных численному анализу влияния модуляции теплового потока на возникновение конвекции в слое однородной жидкости [4, 5] или пористой среды [6–9], насыщенной жидкостью. Изучалась устойчивость так называемого «нестационарного» равновесия или квазиравновесия, при котором жидкость оставалась в покое, а значение градиента температуры в слое периодически менялось со временем. При этом, в зависимости от параметров задачи, наблюдалась неустойчивость по отношению к синхронным (с периодом, равным периоду модуляции) и субгармоническим (с периодом, вдвое большим периода модуляции) возмущениям. Найдены границы устойчивости равновесия для разных значений частоты и амплитуды модуляции в отсутствие и при наличии среднего градиента температуры. Показано, что в случае, когда неоднородности плотности вызваны изменением градиента температуры около его нулевого среднего значения (неоднородности температуры связаны с ее колебанием на границах), существуют интервалы значений частот, соответствующих резонансным областям параметрической неустойчивости. В случае его ненулевого среднего значения кроме областей, связанных с резонансным возбуждением конвекции, появляется основная полоса неустойчивости, обусловленная постоянным средним вертикальным градиентом температуры.

Помимо возмущений синхронного и субгармонического отклика при периодической модуляции градиента температуры в конвективной системе возможны квазипериодические возмущения. Возмущения квазипериодического отклика реализуются в случае, когда в отсутствие внешнего воздействия равновесие теряется колебательным образом. И тогда при модуляции могут появиться возмущения, для которых свойственны две частоты: частота модуляции и измененная частота собственных нейтральных колебаний системы. Квазипериодические возмущения равновесия наблюдались, например, при конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси под воздействием переменного градиента температуры [10, 11].

На возбуждение конвекции в слоях жидкости и пористой среды могут оказывать влияние и другие факторы, такие как, например, вибрации. В большинстве работ рассматривались вибрации высокой частоты, когда период модуляции поля силы тяжести оставался меньше характерных для системы времен [12–16]. В этом случае возможно применение метода осреднения, и задача упрощалась. Было показано, что вертикальные вибрации стабилизируют равновесие, и неустойчивость в системе связана с развитием синхронных возмущений основной полосы неустойчивости. При наличии вибраций конечной частоты появляются резонансные области неустойчивости [17].

Роль периодической модуляции теплового потока в возникновении конвективного движения в двухслойной системе «жидкость–пористая среда, насыщенная жидкостью», в поле силы тяжести при существовании вертикального градиента температуры не изучалась.

2. Постановка задачи: определяющие уравнения и граничные условия

Рассмотрим в поле силы тяжести устойчивость механического равновесия в двухслойной системе, состоящей из слоя чистой жидкости толщиной h_f и расположенного под ним слоя пористой среды, насыщенной той же жидкостью, толщиной h_m при наличии переменного вертикального градиента температуры. Система ограничена сверху и снизу твердыми плоскостями. На нижней границе зададим периодическое значение температуры: колебания температуры происходят по периодическому закону $F(t)$ с амплитудой Θ_m около ее среднего значения T_m . На верхней границе температуру зафиксируем: $T = T_f$.

Конвективное движение в слое чистой жидкости опишем моделью Буссинеска [5], а конвекцию в слое насыщенной пористой среды — моделью Дарси–Буссинеска [18]. Уравнения движения, теплопроводности и неразрывности в слое чистой жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p_f}{\rho_f} + \nu_f \Delta \mathbf{v} + \beta_f T g \gamma, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi_f \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

в пористом слое:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_m}{\rho_f} - \frac{\nu_f}{K} \mathbf{u} + \beta_T \vartheta g \boldsymbol{\gamma}, \quad (3)$$

$$b \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \vartheta = \chi_{eff} \Delta \vartheta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

Здесь: \mathbf{v} — скорость конвективного движения в чистой жидкости; \mathbf{u} — скорость конвективной фильтрации в пористой среде, насыщенной жидкостью; p_f, p_m — давления в жидкости и пористой среде без учета гидростатической добавки; T, ϑ — отклонения температуры в жидкости и пористой среде от средних значений; ρ_f — плотность жидкости; ν_f — кинематическая вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести; β_T — тепловой коэффициент объемного расширения жидкости; m — коэффициент пористости; K — коэффициент проницаемости среды; b — отношение теплоемкостей единичных объемов пористой среды и жидкости; χ_f, χ_m — температуропроводности жидкости и пористой среды; χ_{eff} — эффективная температуропроводность, связанная с температуропроводностью пористой среды соотношением $\chi_{eff} = b\chi_m$; $\boldsymbol{\gamma}$ — орт вертикальной оси z .

Решим задачу при следующих условиях:

– на верхней и нижней твердых границах двухслойной системы, кроме условий по температуре, выполним также условия, соответственно, прилипания и непроницаемости:

$$z = h_f : \mathbf{v} = 0, \quad T = T_f, \quad (5)$$

$$z = -h_m : \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \vartheta = T_m + \Theta_m F(t); \quad (6)$$

– на границе раздела пористого и жидкого слоев поставим

– для вертикальных компонент скорости, температуры и теплового потока условия непрерывности

$$z = 0 : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad T = \vartheta, \quad \kappa_f \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_m \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (7)$$

– для касательных компонент скоростей два условия:

1) условие равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости [1]

$$z = 0 : \quad v_\tau = 0; \quad (8)$$

2) условие Биверса–Джозефа [19]

$$z = 0 : \quad \frac{\partial v_\tau}{\partial z} = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{K}} (v_\tau - u_\tau); \quad (9)$$

– для нормальных напряжений условия непрерывности, которые запишем как $p_f = p_m$ (отвечает условию (8)) и $-p_f + \rho_f \nu_f \partial v_n / \partial z = -p_m$ (отвечает условию (9)).

В выражениях граничных условий приняты обозначения: v_τ, u_τ — касательные компоненты скорости жидкости и конвективной фильтрации жидкости в пористой среде соответственно; κ_m, κ_f — теплопроводности пористой среды, насыщенной жидкостью, и жидкости; α_{BJ} — коэффициент Биверса–Джозефа, зависящий от материальных параметров пористой среды и жидкости вблизи границы их раздела.

Поскольку при движении в пористой среде жидкость испытывает сопротивление пористого скелета, скорость конвективной фильтрации в пористом слое, как правило, мала по сравнению со скоростью жидкости в жидком слое. Это дает право предполагать, что тангенциальная компонента скорости жидкости при переходе через границу раздела двух сред меняется скачком, и для жидкого слоя на границе раздела ее можно положить равной нулю (условие (8)).

Из (9) следует, что тангенциальная компонента скорости жидкости в тонком слое вблизи границы раздела сред (его толщина порядка \sqrt{K}) должна меняться непрерывно, а не скачком, как в случае граничного условия (8). Основным преимуществом условия (8) является отсутствие в нем эмпирических констант, которые имеются в граничном условии Биверса–Джозефа (условие (9)).

Ограничимся исследованием линейной задачи устойчивости равновесия в системе слоев жидкости пористой среды. Полагаем, что условия подогрева нестационарны, но допускают существование равновесия. При этом «нестационарном» равновесии скорость жидкости равняется нулю, а температура зависит от времени, вертикальной координаты и удовлетворяет уравнениям теплопроводности в жидком ($\partial T_0/\partial t = \chi_f \Delta T_0$) и пористом ($b \partial \vartheta_0/\partial t = \chi_{eff} \Delta \vartheta_0$) слоях.

Рассмотрим случай низких частот модуляции ω градиента температуры, когда характерная толщина слоев h_f много меньше глубины проникновения тепловой волны $\sqrt{\chi_f/\omega}$, что позволяет пренебречь пространственной неоднородностью градиента температуры и считать, что модуляция с фиксированной амплитудой a происходит около его постоянного среднего значения A :

$$\begin{aligned} \nabla T_0 &= -(A_f + a_f F(t))\boldsymbol{\gamma} = -A_f(1 + \eta F(t))\boldsymbol{\gamma}, \\ \nabla \vartheta_0 &= -(A_m + a_m F(t))\boldsymbol{\gamma} = -A_m(1 + \eta F(t))\boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь: $A_f = \kappa(T_m - T_f)/(\kappa h_f + h_m)$, $A_m = (T_m - T_f)/(\kappa h_f + h_m)$ — средние значения равновесных градиентов температуры в жидком и пористом слоях; $a_f = \kappa \Theta_m/(\kappa h_f + h_m)$, $a_m = \Theta_m/(\kappa h_f + h_m)$ — амплитуды модуляции равновесных градиентов температуры в жидком и пористом слоях; $\kappa = \kappa_m/\kappa_f$ — отношение теплопроводностей пористой среды, насыщенной жидкостью, и жидкости; $\eta = a_f/A_f = a_m/A_m$ — относительная амплитуда модуляции. Необходимо еще оценить диапазон частот модуляции. Для слоя воды с температуропроводностью $\chi_f = 10^{-3}$ см²/с и толщиной $h_f = 1$ см он составляет $\omega \ll \chi_f/h_f^2 = 10^{-3}$ с⁻¹, что соответствует периоду модуляции $T = 2\pi/\omega \gg 1,5$ часа.

Учитывая соотношения (10), линеаризуем уравнения конвекции (1)–(4) и для малых возмущений равновесия получим следующую систему уравнений:

– для жидкого слоя

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_f}{\rho_f} + \mathbf{v}_f \Delta \mathbf{v} + \beta_T T g \boldsymbol{\gamma}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - A_f (\mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) (1 + \eta F(t)) = \chi_f \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (12)$$

– для пористого слоя

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_m}{\rho_f} - \frac{\mathbf{v}_f}{K} \mathbf{u} + \beta_T \vartheta g \boldsymbol{\gamma}, \quad (13)$$

$$b \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - A_m (\mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) (1 + \eta F(t)) = \chi_{eff} \Delta \vartheta, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (14)$$

Граничные условия (5), (6) на верхней и нижней границах системы для малых возмущений равновесия переписутся как

$$z = h_f: \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad (15)$$

$$z = -h_m: \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \vartheta = 0. \quad (16)$$

Условия на границе раздела слоев (7)–(9) с учетом непрерывности нормальных напряжений для каждого типа условий (8) и (9) приобретают вид:

$$z = 0: \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad T = \vartheta, \quad \kappa_f \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_m \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad v_\tau = 0, \quad p_f = p_m, \quad (17)$$

$$z = 0: \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad T = \vartheta, \quad \kappa_f \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_m \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_\tau}{\partial z} = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{K}} (v_\tau - u_\tau), \quad -p_f + \rho_f v_f \frac{\partial v_n}{\partial z} = -p_m. \quad (18)$$

Для обезразмеривания задачи масштабы длины, времени, температуры, скорости и давления выберем следующим образом: $[z, x] = h_m$, $[t] = b h_m^2 / \chi_{eff}$, $[T, \vartheta] = A_m h_m$, $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = \chi_{eff} / h_m$, $[p_f, p_m] = \rho_f v_f \chi_{eff} / K$. Тогда безразмерные уравнения малых возмущений равновесия (11)–(14) примут вид:

– в жидком слое

$$\frac{\varepsilon}{Pr_m} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_f + \varepsilon \Delta \mathbf{v} + R_m T \gamma, \tag{19}$$

$$\chi \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa^2 (\mathbf{v} \gamma) (1 + \eta F(t)) = \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \tag{20}$$

– в пористом слое

$$\frac{\varepsilon}{m Pr_m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_m - \mathbf{u} + R_m \vartheta \gamma, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - (\mathbf{u} \gamma) (1 + \eta F(t)) = \Delta \vartheta, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \tag{22}$$

Граничные условия (15)–(18) переписутся как

$$z = d: \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \tag{23}$$

$$z = -1: \mathbf{u} \cdot \gamma = 0, \quad \vartheta = 0, \tag{24}$$

$$z = 0: \mathbf{v} \cdot \gamma = \mathbf{u} \cdot \gamma, \quad T = \vartheta, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad v_\tau = 0, \quad p_f = p_m, \tag{25}$$

$$z = 0: \mathbf{v} \cdot \gamma = \mathbf{u} \cdot \gamma, \quad T = \vartheta, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_\tau}{\partial z} = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{\varepsilon}} (v_\tau - u_\tau), \quad -p_f + \varepsilon \frac{\partial v_n}{\partial z} = -p_m. \tag{26}$$

Система (19)–(26) содержит следующие безразмерные параметры: числа Прандтля $Pr_m = \nu_f / \chi_m$ и Рэлея–Дарси $R_m = g \beta_T K h_m^2 A_m / (\nu_f \chi_{eff})$, толщину жидкого слоя $d = h_f / h_m$, параметр Дарси $\varepsilon = K / h_m^2$, $\chi = \kappa / b = \chi_m / \chi_f$ — отношение температуропроводностей пористой среды, насыщенной жидкостью, и жидкости. Частота модуляции $\Omega_m = \omega b h_m^2 / \chi_{eff}$ входит в закон изменения градиента температуры $F(t)$, конкретный вид которого будет выбран ниже. В уравнениях конвекции (19)–(22) при производной по времени стоит малый параметр ε , поэтому для упрощения численных расчетов воспользуемся следующими масштабами времени и частоты: $\tau = t / \varepsilon$, $\Omega = \Omega_m \varepsilon = \omega b K / \chi_{eff}$.

Рассмотрим случай периодического изменения градиента температуры по ступенчатому закону (Рис. 1):

$$F(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau \leq T/2, \\ -1, & T/2 < \tau < T, \end{cases} \quad \text{где } T = 2\pi / \Omega \text{ — период модуляции градиента температуры.}$$

Система уравнений (19)–(26) решалась численно с применением метода Галеркина. Искомые скорость и температура в каждом из слоев представлялись в виде произведения их пространственных и временных частей: $\Phi(z, x, t) = \tilde{\Phi}(z, x) \cdot \Phi(t)$, где $\Phi(z, x, t) = [\mathbf{v}(z, x, t), T(z, x, t), \mathbf{u}(z, x, t), \vartheta(z, x, t)]$. В качестве базисных функций $\tilde{\Phi}(z, x)$ брались собственные функции задачи в отсутствие модуляции (при $\eta = 0$), учитывающие условия на верхней и нижней твердых границах системы и на границе раздела слоев. Функции получены с помощью метода построения фундаментальной системы решений с использованием ортогонализации векторов частных решений [20]. С учетом интегральных условий ортогональности невязки к каждой базисной функции $\tilde{\Phi}(z, x)$ система уравнений (19)–(26) сводилась к уравнениям, зависящим от времени, и в жидком слое имеющим следующий вид:

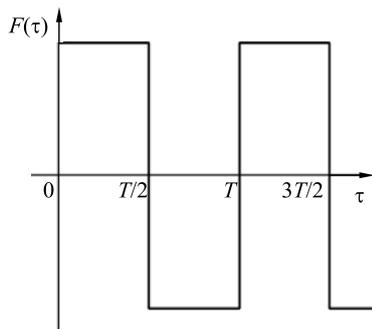


Рис. 1. Закон модуляции градиента температуры

– в жидком слое

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial \tau^2} + 2\alpha_f \frac{\partial v_z}{\partial \tau} + \{\beta_f - \gamma_f (R + rF(\tau))\} v_z = 0, \tag{27}$$

– в пористом слое

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} + 2\alpha_m \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \{\beta_m - \gamma_m (R + rF(\tau))\} u_z = 0. \tag{28}$$

Здесь: v_z, u_z — нормальные компоненты скоростей жидкости и конвективной фильтрации; $\alpha_f, \alpha_m, \beta_f, \beta_m, \gamma_f, \gamma_m$ —

коэффициенты, зависящие от параметров задачи и находимые численно; $R = R_m/R_{m0}$ — приведенное число Рэлея–Дарси; R_m , R_{m0} — числа Рэлея–Дарси, соответственно, при наличии модуляции и статическое пороговое, отвечающее наиболее опасным возмущениям в отсутствие модуляции; $r = \eta R$ — абсолютная амплитуда модуляции. Заметим, что случай $R = 0$ соответствует нулевому среднему значению градиента температуры $A_m = 0$, при этом r можно переписать в виде: $r = r_m/R_{m0}$, где $r_m = g\beta_T K h_m^2 a_m / (v_f \chi_{eff})$ — приведенное число Рэлея–Дарси, записанное через амплитуду модуляции.

Для функции $F(\tau)$, представленной на рисунке 1, уравнения (27), (28) решались аналитически с учетом условий существования нормального решения: $v_z(T) = \rho v_z(0)$, $u_z(T) = \rho u_z(0)$, где ρ — мультипликатор Флоке [21]. Находилось нейтральное периодическое решение, которое разделяло затухающие и нарастающие возмущения равновесия и получалось при действительных значениях мультипликатора, модуль которого равнялся единице.

Значение мультипликатора $\rho = 1$ соответствует границе устойчивости по отношению к синхронным возмущениям равновесия (с периодом, равным периоду модуляции), а значение $\rho = -1$ — границе устойчивости по отношению к субгармоническим возмущениям (с периодом, вдвое большим периода модуляции). Нейтральное квазипериодическое поведение решений задачи имеет место в случае, когда мультипликатор принимает комплексное значение и обладает единичным модулем. Возмущения квазипериодического отклика возникают в конвективной системе, характеризующейся в отсутствие модуляции внешнего поля колебательными модами неустойчивости. При исследовании конвекции в двухслойной системе «однородная жидкость–пористая среда, насыщенная той же жидкостью», в статическом поле силы тяжести при наличии постоянного вертикального градиента температуры было показано, что механическое равновесие в такой системе теряется, как правило, монотонным образом [2, 3]. Колебательные моды неустойчивости возможны в системе, содержащей бинарную жидкость. В связи с этим в нашей работе мы ограничились рассмотрением возмущений синхронного и субгармонического отклика.

3. Результаты работы

Численное решение линейной задачи устойчивости равновесия системы слоев жидкости и пористой среды при наличии периодической модуляции градиента температуры получено при фиксированных значениях следующих параметров: $\kappa = 1$, $b = 1$, $\chi = 1$, $m = 0,4$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $Pr_m = 7$. Рассмотренный набор параметров соответствует жидкости типа воды и пористой среде, насыщенной жидкостью, со сходными тепловыми свойствами. В этом случае в качестве пористой среды могут быть выбраны, например, песок, насыщенный водой, или модельная среда, состоящая из системы стеклянных шаров небольшого по сравнению с толщиной пористого слоя диаметра (порядка 1 мм, если толщина пористого слоя составляет около 1 см). Использование модельной пористой среды оправдано тем, что она имеет достаточно большую проницаемость, поэтому в такой среде легче возбудить конвекцию и проследить проявляющиеся эффекты. Песок обладает проницаемостью $K = 2,0 \cdot 10^{-7} \dots 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2$ и пористостью $m = 0,37 \dots 0,50$ [18]. Для данной среды при толщине слоя $h_m < 0,5 \text{ см}$ можно выбрать значение параметра $\varepsilon = K/h_m^2 = 10^{-5}$.

Исследовалось влияние на устойчивость равновесия условий на границе раздела пористого и жидкого слоев при разных значениях волнового числа возмущений равновесия. Построены карты устойчивости на плоскости $(r, 1/\Omega)$ при различных значениях приведенного числа Рэлея R .

3.1. Статический градиент температуры

Известно [1–3], что в случае статического вертикального градиента нейтральные кривые устойчивости равновесия в слоях жидкости и насыщенной пористой среды проявляют бимодальный характер. Приведенные на рисунке 2 эти кривые получены в ходе численных расчетов для условия равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости при различных значениях отношения толщин жидкого и пористого слоев d . Из рисунка видно, что области неустойчивости U расположены выше кривых, а нейтральные кривые имеют два минимума: один из них соответствует возмущениям с меньшей длиной волны, локализованным в слое жидкости, другой — возмущениям с большей длиной волны, охватывающим оба слоя. Вследствие того, что при движении в пористой среде жидкость испытывает сопротивление пористого скелета, при больших значениях d возмущения слабо проникают в пористый слой и возбуждаются главным образом в пределах жидкого слоя. При малых значениях относительной толщины жидкого слоя неустойчивость определяется возникновением возмущений, охватывающих

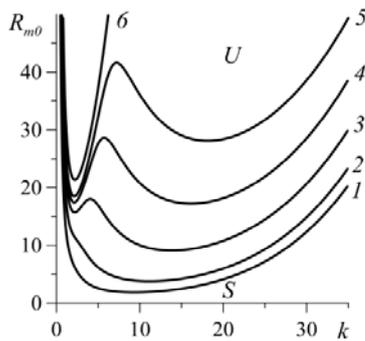


Рис. 2. Нейтральные кривые устойчивости равновесия для граничного условия равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости (8) при различных значениях отношения толщин жидкого и пористого слоев d : 0,30 (кривая 1); 0,25 (2); 0,20 (3); 0,17 (4); 0,15 (5); 0,10 (6); S – область устойчивости, U – область неустойчивости

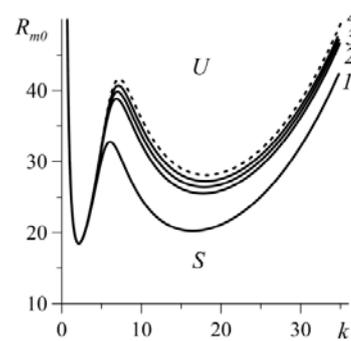


Рис. 3. Нейтральные кривые устойчивости равновесия для двух типов граничных условий: условия Биверса–Джозефа (9) (сплошные линии) и условия равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости (8) (штриховая линия); в условии Биверса–Джозефа коэффициент α_{BJ} имеет значения: 0,1 (кривая 1); 0,78 (2); 1,45 (3); 4,0 (4); S – область устойчивости, U – область неустойчивости

оба слоя в целом. В случае промежуточных значений параметра d (например, $d = 0,17$ или $0,15$, кривые 4 и 5, Рис. 2) возможна конкуренция этих двух видов возмущений.

На рисунке 3 изображены нейтральные кривые устойчивости равновесия, построенные в случае постоянного вертикального градиента температуры для двух типов граничных условий: условия Биверса–Джозефа (кривые 1–4) при разных значениях α_{BJ} и условия равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости (штриховая кривая).

Применение обоих типов граничных условий приводит к качественно согласующимся результатам. Различия проявятся в тех случаях, когда будет изучаться конкуренция двух мод неустойчивости, связанной с развитием возмущений с меньшей и с большей длинами волн (Рис. 3). Поскольку возмущения с меньшей длиной волны локализованы в основном в жидком слое и слабо проникают в пористую среду, то именно они являются наиболее чувствительными к изменению условий на границе раздела слоев по сравнению с возмущениями большей длины волны, реализующимися в пористом и жидком слоях.

3.2. Периодическая модуляция градиента температуры

Карты устойчивости равновесия для наиболее опасных в случае отсутствия модуляции возмущений при $d = 0,15$, $k = 2$ и $R_{m0} = 18,5$ (см. штриховую кривую на Рис. 3), построенные при наличии переменного градиента температуры, представлены на рисунке 4. Границы устойчивости получены для различных значений приведенного числа Рэлея–Дарси R . Применялся первый тип граничного условия: условие равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости.

В отсутствие среднего градиента температуры при $R = 0$, когда неоднородности плотности в системе вызваны только колебаниями температуры на ее границах, в некотором интервале частот наблюдаются резонансные области параметрической неустойчивости (Рис. 4а). При малых значениях абсолютной амплитуды модуляции r равновесие устойчиво при любых частотах. С ростом r равновесие становится неустойчивым по отношению к гармоническим (с периодом, равным периоду модуляции) и субгармоническим (с периодом, вдвое большим периода модуляции) возмущениям. На рисунке области неустойчивости по отношению к субгармоническим возмущениям заштрихованы.

В случае модуляции градиента температуры около его ненулевого среднего значения при $R > 1$, когда в статических условиях при превышении порогового числа Рэлея–Дарси R_{m0} равновесие неустойчиво, кроме резонансных областей появляется основная полоса неустойчивости (Рис. 4б–г). При этом некоторым значениям r отвечают области устойчивости, которые в статических условиях при $R_m > R_{m0}$ не реализуются. С ростом приведенного числа Рэлея–Дарси области устойчивости сужаются (Рис. 4г). При больших значениях R практически во всем диапазоне значений амплитуды и частоты модуляции равновесие неустойчиво. Наблюдаются узкие интервалы частот, соответствующие резонансным областям устойчивости (Рис. 4г).

На рисунке 5 изображены карты устойчивости равновесия в случае переменного градиента температуры при фиксированном значении приведенного числа Рэлея–Дарси $R = 2$ для двух типов граничных условий: условия равенства нулю касательной компоненты и условия Биверса–Джозефа при разных значениях коэффициента α_{BJ} . На рисунке 5а представлены численные данные для моды неустойчивости по отношению к возмущениям с большей длиной волны ($k = 2$), а на рисунке 5б — численные данные для моды неустойчивости по отношению к возмущениям с меньшей длиной волны

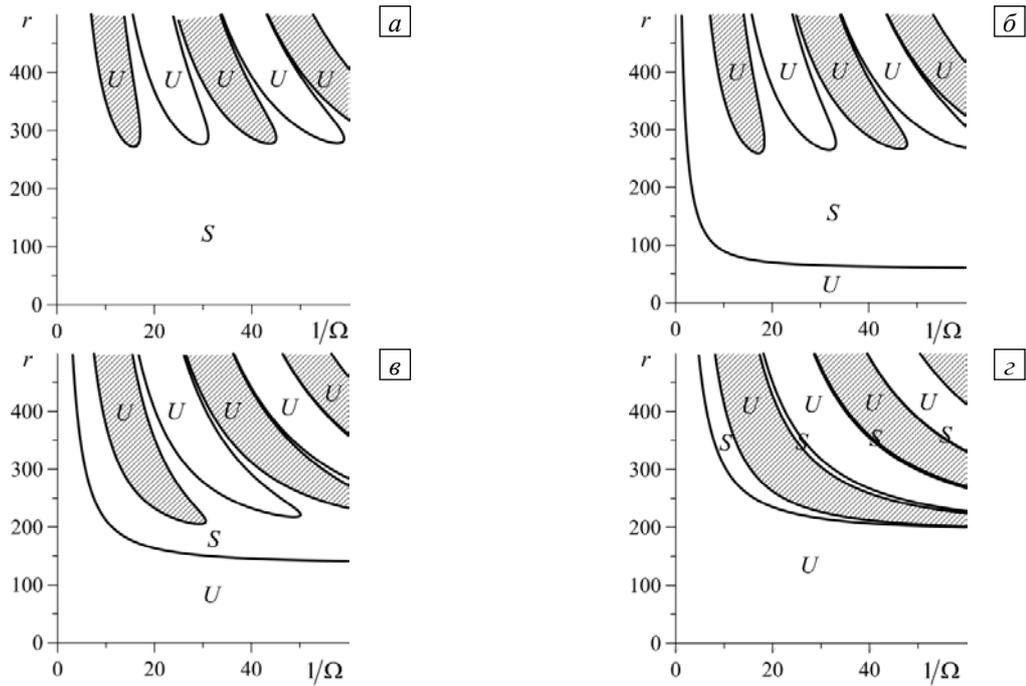


Рис. 4. Карты устойчивости равновесия при $k=2$, $R_{m0}=18,5$ и различных значениях приведенного числа Рэлея–Дарси: $R=0$ (а), $R=10$ (б), $R=50$ (в), $R=100$ (г); слева направо чередуются области U – области неустойчивости по отношению к субгармоническим (заштрихованные области) и синхронным (незаштрихованные области) возмущениям

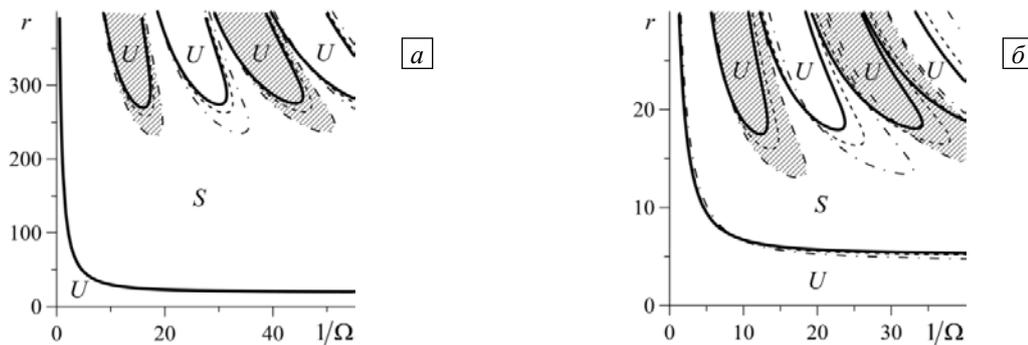


Рис. 5. Карты устойчивости равновесия при $k=2$ (а) и $k=18$ (б) для двух типов граничных условий при $R=2$: условия (8) (сплошные линии) и условия (9) с разными значениями коэффициента α_{BJ} : 0,1 (штрихпунктирные кривые); 0,78 (штриховые кривые); слева направо чередуются области U – области неустойчивости по отношению к субгармоническим (заштрихованные области) и синхронным возмущениям (незаштрихованные области)

($k=18$). Как и в случае статического градиента температуры (см. Рис. 3), изменение условий на границе раздела слоев оказывает на возмущения, локализованные в жидком слое, большее по сравнению с возмущениями, охватывающими оба слоя, влияние. При наличии модуляции теплового потока форма резонансных областей параметрической неустойчивости (как для возмущений с меньшей длиной волны, так и для возмущений с большей длиной волны) меняется сильнее, чем форма областей, соответствующих основной полосе неустойчивости.

4. Заключение

В работе в поле силы тяжести изучается возбуждение конвекции в подогреваемой снизу двухслойной системе горизонтальных слоев чистой жидкости и пористой среды, насыщенной той же жидкостью, в условиях периодического изменения градиента температуры.

В рамках теории Флоке решается линейная задача устойчивости «нестационарного равновесия», при котором скорость жидкости равна нулю, и для вертикального градиента температуры характерна низкочастотная модуляция. В этом случае пространственной неоднородностью равновесного градиента температуры можно пренебречь. Задача решается численно с применением метода Галеркина, в котором в качестве базисных функций выбираются собственные функции, полученные методом построения фундаментальной системы решений в задаче без модуляции.

Найдены границы устойчивости равновесия в системе с модуляцией и без модуляции для двух типов условий на границе раздела пористого и жидкого слоев: условия равенства нулю касательной компоненты скорости жидкости [1] и условия Биверса–Джозефа [19]. Показано, что в статическом случае, когда конвекция в системе возбуждается за счет постоянного вертикального градиента температуры, нейтральные кривые устойчивости бимодальны. Дестабилизация равновесия связана при этом с развитием возмущений с большей длиной волны, охватывающих оба слоя, и возмущений с меньшей длиной волны, локализованных в жидком слое. Для системы с модуляцией установлено, что изменение условий на границе слоев оказывает большее влияние на возмущения с меньшей длиной волны по сравнению с возмущениями, обладающими большой длиной волны.

Построены карты устойчивости по отношению к гармоническим (с периодом, равным периоду модуляции) и субгармоническим (с периодом, вдвое большим периода модуляции) возмущениям равновесия при различных значениях чисел Рэлея–Дарси: приведенного $R = R_m/R_{m0}$, при наличии модуляции R_m и статического порогового числа в отсутствие модуляции R_{m0} .

Важно, что, как и в случае параметрического возбуждения конвекции в слое однородной жидкости [5], в двухслойной системе слоев чистой жидкости и насыщенной пористой среды при $R < 1$, когда в статических условиях число Рэлея–Дарси не превышает критического порогового значения, и равновесие устойчиво, при переменном градиенте температуры в некотором диапазоне частот наблюдаются резонансные области неустойчивости. И наоборот, при $R > 1$, когда в статических условиях имеет место дестабилизация равновесия, модуляция приводит к возникновению узких областей устойчивости в определенном интервале частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31021-мол_а).

Литература

1. Любимов Д.В., Муратов И.Д. О конвективной неустойчивости в слоистой системе // Гидродинамика. – Пермь, 1977. – № 10. – С. 38-46.
2. Chen F., Chen C.F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer // J. Heat Transfer. – 1988. – Vol. 110, no. 2. – P. 403-409. DOI
3. Zhao P., Chen C.F. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model // Int. J. Heat Mass Tran. – 2001. – Vol. 44, no. 24. – P. 4625-4633. DOI
4. Venezian G. Effect of modulation on the onset of thermal convection // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 35, no. 2. – P. 243-254. DOI
5. Герцини Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
6. Rudraiah N., Malashetty M.S. Effect of modulation on the onset of convection in a sparsely packed porous medium // J. Heat Transfer. – 1990. – Vol. 112, no. 3. – P. 685-689. DOI
7. Malashetty M.S., Wadi V.S. Rayleigh–Benard convection subject to time dependent wall temperature in a fluid-saturated porous layer // Fluid Dyn. Res. – 1999. – Vol. 24. – P. 293-308. DOI
8. Malashetty M.S., Basavaraja D. Rayleigh–Benard convection subject to time dependent wall temperature in a fluid saturated anisotropic porous medium // Heat Mass Transfer. – 2002. – Vol. 38, no. 7-8. – P. 551-565. DOI
9. Bhadauria B.S. Thermal modulation of Rayleigh–Benard convection in a sparsely packed porous medium // J. Porous Media. – 2007. – Vol. 10, no. 2. – P. 175-188. DOI
10. Смородин Б.Л. Конвекция бинарной смеси в условиях термодиффузии и переменного градиента температуры // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, № 2. – С. 54-61. (English version DOI).
11. Булгакова Н.С., Рамазанов М.М. Конвективная устойчивость горизонтального слоя бинарной смеси при модуляции градиента температуры // МЖГ. – 2010. – Т. 45, № 3. – С. 22-32. (English version DOI).
12. Зеньковская С.М. Действие высокочастотной вибрации на фильтрационную конвекцию // ПМТФ. – 1992. – Т. 33, № 5. – С. 83-88. (English version DOI).
13. Зеньковская С.М., Роговенко Т.Н. Фильтрационная конвекция в высокочастотном вибрационном поле // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 22-29. (English version DOI).
14. Bardan G., Mojtabi A. On the Horton–Rogers–Lapwood convective instability with vertical vibration: Onset of convection // Phys. Fluids. – 2000. – Vol. 12, no. 11. – P. 2723-2731. DOI
15. Lyubimov D.V. Convective flows under the influence of high-frequency vibrations // Eur. J. Mech. B / Fluids. – 1995. – Vol. 14, no. 4. – P. 439-458.
16. Колчанова Е.А., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Влияние эффективной проницаемости среды на устойчивость двухслойной системы «однородная жидкость – пористая среда» в поле вибраций высокой частоты // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 225-232. DOI
17. Мызникова Б.И., Смородин Б.Л. О конвективной устойчивости горизонтального слоя двухкомпонентной смеси в модулированном поле внешних сил // МЖГ. – 2001. – № 1. – С. 3-13. (English version DOI).
18. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 546 p.
19. Beavers G.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 30, no. 1. – P. 197-207. DOI
20. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: Учеб. пособие. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2004. – 101 с.
21. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 2001. – 395 с.

References

1. Liubimov D.V., Muratov I.D. O konvektivnoj neustojchivosti v sloistoj sisteme [Convective instability of a fluid in a layered system]. *Gidrodinamica* [Hydrodynamics], Perm, 1977, no. 10, pp. 38-46.
2. Chen F., Chen C.F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer. *J. Heat Transfer*, 1988, vol. 110, no. 2, pp. 403-409. DOI
3. Zhao Pinghua, Chen C.F. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2001, vol. 44, no. 24, pp. 4625-4633. DOI
4. Venezian G. Effect of modulation on the onset of thermal convection. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 35, no. 2, pp. 243-254. DOI
5. Gershuni G.Z., Zhukovitsky E.M. *Convective stability of incompressible liquid*. Jerusalem: Wiley, Keter Press, 1976.
6. Rudraiah N., Malashetty M.S. Effect of modulation on the onset of convection in a sparsely packed porous medium. *J. Heat Transfer*, 1990, vol. 112, no. 3, pp. 685-689. DOI
7. Malashetty M.S., Wadi V.S. Rayleigh–Benard convection subject to time dependent wall temperature in a fluid saturated porous layer. *Fluid Dyn. Res.*, 1999, vol. 24, P. 293-308. DOI
8. Malashetty M.S., Basavaraja D. Rayleigh–Benard convection subject to time dependent wall temperature in a fluid saturated anisotropic porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2002, vol. 38, no. 7-8, pp. 551-565. DOI
9. Bhadauria B.S. Thermal modulation of Rayleigh–Benard convection in a sparsely packed porous medium. *J. Porous Media*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 175-188. DOI
10. Smorodin B.L. Convection of a binary mixture under conditions of thermal diffusion and variable temperature gradient. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2002, vol. 43, no. 2, pp. 217-223. DOI
11. Bulgakova N.S., Ramazanov M.M. Convective stability of a horizontal binary-mixture layer on temperature gradient modulation. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 359-368. DOI
12. Zen'kovskaya S.M. Effect of high-frequency vibration on filtration convection. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1992, vol. 33, no. 5, pp. 691-695. DOI
13. Zen'kovskaya S.M., Rogovenko T.N. Filtration convection in a high-frequency vibration field. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 379-385. DOI
14. Bardan G., Mojtabi A. On the Horton–Rogers–Lapwood convective instability with vertical vibration: Onset of convection *Phys. Fluids*, 2000, vol. 12, no. 11, pp. 2723-2731. DOI
15. Lyubimov D.V. Convective flows under the influence of high-frequency vibrations. *Eur. J. Mech. B, Fluids*, 1995, vol. 14, no. 4, pp. 439-458.
16. Kolchanova E.A., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. Influence of effective medium permeability on stability of a two-layer system “pure fluid–porous medium” under high-frequency vibrations. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 225-232. DOI
17. Myznikova B.I., Smorodin B.L. Convective stability of a horizontal binary-mixture layer in a modulated external force field. *Fluid Dyn.*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 1-10. DOI
18. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media*. New York: Springer-Verlag, 1999. 546 p.
19. Beavers G.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 30, no. 1, pp. 197-207. DOI
20. Lobov N.I., Ljubimov D.V., Ljubimova T.P. Chislennyye metody resheniya zadach teorii gidrodinamicheskoy ustojchivosti [Numerical methods for solving problems in the theory of hydrodynamic stability]. Perm: Perm State University, 2004. 101 p.
21. Goryachenko V.D. *Elementy teorii kolebanij* [Elements of oscillation theory]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 395 p.

Поступила в редакцию 26.12.2014; опубликована в электронном виде 30.06.2015

Сведения об авторах

Колчанова Екатерина Андреевна, кфмн, инж.-иссл., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: ekaterina_shishk@mail.ru

Колчанов Николай Викторович, асс., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: kolchanovn@gmail.com