

DOI: [10.7242/1999-6691/2015.8.2.13](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.2.13)
УДК 539.3:534.1

ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В БАЛКЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ МАССАМИ

Г.В. Филиппенко

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Предметом исследования в данной работе являются стационарные колебания упругой бесконечной одномерной балки (балки Бернулли–Эйлера), нагруженной периодической системой точечных масс. Поведение всех процессов во времени предполагается гармоническим. Рассматривается как бесконечная балка, так и ее изолированная ячейка периодичности. Задача решается в строгой математической постановке. Получено точное аналитическое представление для потока энергии в бесконечной периодической системе. Исследуется асимптотика границ полос пропускания и запираания, а также потока энергии в бесконечной периодической системе в зависимости от роста массы точечных инерционных включений и частоты колебаний. Анализируется эффект относительного ослабления потока энергии в первой зоне пропускания с увеличением массы точечных включений. Рассматриваются характер и «степень неоднородности» волнового процесса в балке в зависимости от расположения соответствующего волнового числа относительно границ зон пропускания. Эффект изучается на примере колебаний, которые соответствуют различным полосам пропускания и запираания системы. Обсуждаются свободные колебания в изолированной ячейке периодичности в случае ее несимметрии и прослеживается связь краевых эффектов с параметрами задачи. Анализируется расположение точечных масс относительно узлов и псевдоузлов стоячей и бегущей волн в бесконечной системе, и относительно узлов стоячей волны в изолированной ячейке периодичности, в зависимости от параметров задачи. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании и конструировании периодических структур с заранее заданным расположением собственных частот (внутри полос пропускания или запираания), а также для анализа краевых эффектов в них. С этой целью необходимо учитывать свойства симметрии ячейки, а также осуществлять подбор граничных условий.

Ключевые слова: периодические структуры, полосы пропускания и запираания, потоки энергии

THE BANDING WAVES IN THE BEAM WITH PERIODICALLY LOCATED POINT MASSES

G.V. Filippenko

Institute of Mechanical Engineering RAS, St.-Petersburg, Russian Federation

The paper is concerned with stationary oscillations of a one-dimensional, elastic infinite beam (Bernoulli beam) with periodic system of point masses. All processes are assumed to be time-dependent harmonic. The infinite beam and its isolated periodicity cell are considered. The problem is solved in a rigorous mathematical statement. A faithful representation of the energy flux in an infinite periodic system is found. The asymptotics of pass and stop band boundaries and the energy flux in the infinite periodic system is explored. The effect of relative energy flux attenuation in the first pass band is analyzed when comparing with other pass bands with increasing masses of inertial inclusions. The dependence of the character and «heterogeneity degree» of the wave process in the beam on the position of a corresponding wave number with respect to pass bands is considered. The effect is explored in the analysis of vibrations corresponding to different pass and stop bands. The modes of free vibrations of a periodic cell in the case of its asymmetry are analyzed with special attention to edge effects on the basis of the parameters of the problem. The position of point masses is considered with respect to the knots and pseudo-knots of standing and propagating waves in the infinite system and to the knots of a standing wave in the isolated periodicity cell depending on the problem parameters. These results can be used for studying and designing periodic structures with a given interval of natural frequencies (in stop or pass bands), as well as for analyzing edge effects in them. This can be achieved by using the symmetry properties of the cell and by matching boundary conditions.

Key words: periodic structure, pass and stop bands, energy flux

1. Введение

Одной из причин изучения периодических систем является их обширные приложения в технике и строительстве. Это один из важнейших элементов, используемых при моделировании различного рода волноводов, трубопроводов и разного рода строительных конструкций. В последние годы изучение подобных конструкций с точки зрения сопутствующих их эксплуатации колебаний стало особенно интенсивным. Обширная библиография представлена, например, в [1].

В процессе численных экспериментов было обнаружено, что собственные частоты ячейки периодичности рассматриваемой в работе [2] периодической системы лежат внутри полос пропускания системы (диапазонов частот, где существуют распространяющиеся волны). Эта работа инициировала рассмотрение подобных эффектов в простейших периодических моделях [3, 4]. Было показано, что при определенных граничных условиях на концах ячейки и условиях ее симметрии собственные частоты колебаний изолированной ячейки периодичности являются границами полос пропускания и полос запираания (диапазонов частот, где не существует распространяющихся волн) бесконечной периодической системы, состоящей из таких ячеек. Однако при нарушении названных условий это свойство может утрачиваться, что ведет, в частности, в изолированной ячейке, к появлению краевых эффектов. В данной работе на примере балки с периодически расположенными на ней точечными массами эти эффекты

анализируются и иллюстрируются. Далее будут последовательно рассмотрены бесконечная периодическая система с анализом потоков энергии в ней и изолированная ячейка периодичности данной системы с анализом краевых эффектов.

2. Бесконечная периодическая балка Бернулли–Эйлера

Рассмотрим процесс изгибных колебаний бесконечно протяженной балки Бернулли–Эйлера. Балка нагружена бесконечной периодической системой одинаковых точечных масс (объемная масса каждой равна M), находящихся на расстоянии l друг от друга. Ограничимся случаем свободных стационарных колебаний. Зависимость всех процессов от времени предположим гармонической, а временной фактор $\exp\{-i\omega t\}$ условимся всюду опускать. Введем систему координат, где ось x совпадает с осью балки. В качестве переменной, описывающей вибрационное поле в системе, выберем смещение балки u . Тогда уравнение колебаний балки приобретает вид:

$$D_c u'''' - \omega^2 \left(\mu + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} M \delta(x - jl) \right) u = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Здесь: D_c — изгибная жесткость; μ — погонная плотность балки; ω — частота свободных колебаний.

Перейдем к безразмерным переменным — безразмерному волновому числу k и приведенной массе m точечного включения: $k^4 = \mu \omega^2 l^4 / D_c$, $m = M / (\mu l)$ и перепишем уравнение, сохранив за x/l и u/l прежние обозначения x и u :

$$u''''(x) - k^4 \left(1 + m \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - j) \right) u(x) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (1)$$

Решение Флоке уравнения (1) строится методом сшивания [1]. На интервале длины $(0, 2)$ будем отыскивать решение в виде:

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x-1)e^{i\alpha}, & x \in (1, 2), \\ u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad u_0(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} + Ce^{-ikx} + De^{ikx}.$$

Условие сшивания в точке $x = 1$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u(1+0) - u(1-0) = 0, \\ u'(1+0) - u'(1-0) = 0, \\ u''(1+0) - u''(1-0) = 0, \\ u'''(1+0) - u'''(1-0) = k^4 m u_0(0) e^{i\alpha}. \end{cases} \quad (2)$$

Условие разрешимости этой системы (равенство нулю определителя) имеет вид:

$$(\cos \alpha - \operatorname{ch} k)(4 \cos \alpha + km \sin k - 4 \cos k) - km \operatorname{sh} k (\cos \alpha - \cos k) = 0.$$

Задавая значения m и k и решая полученное уравнение относительно угла α (заметим, что этот угол определяется с точностью до знака), получаем искомый множитель Флоке $e^{i\alpha}$, а из решения системы уравнений (2) относительно констант A, B, C, D находим с точностью до общего множителя выражение для смещений балки в любой точке оси x :

$$u(x) = e^{i\alpha[x]} \left(Ae^{-k\{x\}} + Be^{k\{x\}} + Ce^{-ik\{x\}} + De^{ik\{x\}} \right), \quad \{x\} = x - [x]. \quad (3)$$

Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части числа x .

Условие существования распространяющихся волн ($\alpha \in \mathbb{R}$) можно записать в виде: $|\cos \alpha| \leq 1$; при $|\cos \alpha| > 1$ волны становятся уже неоднородными (на рисунке 1а приведена зависимость $\cos \alpha$ от k при $m = 10$). Условие $|\cos \alpha| = 1$ является «пограничным» ($\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). После элементарных преобразований его можно привести к виду:

$$fl(k, m) = \sin k \operatorname{sh} k \left(km \operatorname{ch} k \left(\frac{km}{2} \cos k + 2 \sin k \right) + 4 \operatorname{sh} k \left(\frac{km}{2} \cos k + \sin k \right) - \frac{k^2 m^2}{2} \right) = 0. \quad (4)$$

Задавая значения массы m и решая уравнение (4) относительно k , найдем бесконечный набор волновых чисел, служащих границами зон пропускания и запираия. Эти зоны также будем называть полосами пропускания и запираия. Перебирая всевозможные значения $m \in (0, +\infty)$, получим набор кривых на плоскости (m, k) (см. Рис. 1б), отделяющих чередующиеся полосы пропускания (маркируются буквой P) и запираия (маркируются буквой S). Цифра рядом с буквой указывает на порядковый номер соответствующей полосы.

Далее на рисунках волновое число k , для удобства, нормируется на π . При таком нормировании полосы пропускания и запираия с номером n лежат в интервале $(k/\pi) \in (n-1, n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Так, например, первая полоса запираия ($S1$) располагается между кривыми, выходящими из точки с координатами $(0, 1)$ на оси ординат. Вторая зона запираия ($S2$) находится между кривыми, выходящими из точки с координатами $(0, 2)$ на оси ординат и так далее. Зоны пропускания оказываются дополнениями зон запираия.

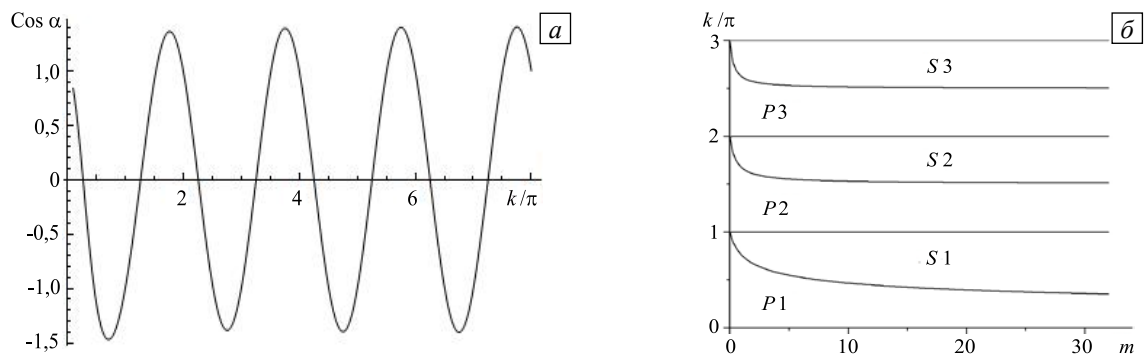


Рис. 1. Косинус угла Флоке как функция k при $m=10$ (а); полосы пропускания (P) и запираия (S) (б)

Исследуем аналитически уравнение (4). С помощью элементарных преобразований можно показать, что его корни являются объединением корней трех следующих уравнений:

$$\begin{cases} \sin k = 0 & 1 \\ \operatorname{th}(k/2) - \operatorname{tg}(k/2) = -(4/mk), & 2 \\ \operatorname{cth}(k/2) + \operatorname{ctg}(k/2) = -(4/mk). & 3 \end{cases} \quad (5)$$

Корнями уравнения $(5)_1$ служат $k = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Этим волновым числам отвечают верхние границы полос запираия — горизонтальные прямые линии на рисунке 1б. Уравнения $(5)_2$ и $(5)_3$ описывают нижние границы полос запираия. Рассмотрим их корни в предположении больших m , комбинируя графическое представление решения и используя аналитические свойства функций, входящих в эти уравнения.

На рисунках 2а и 2б сплошными линиями представлены функции в левых частях уравнений $(5)_2$ и $(5)_3$ соответственно. Пунктирной линией изображена правая часть уравнений — функция $(-4/(mk))$, вычисленная при $m=2$. Элементарный анализ показывает, что в первой полосе запираия ($k/\pi \in (0; 1)$) нижняя граница с ростом m стремится к нулю со скоростью $k/2 = (3/m)^{1/4}$ (Рис. 2а).

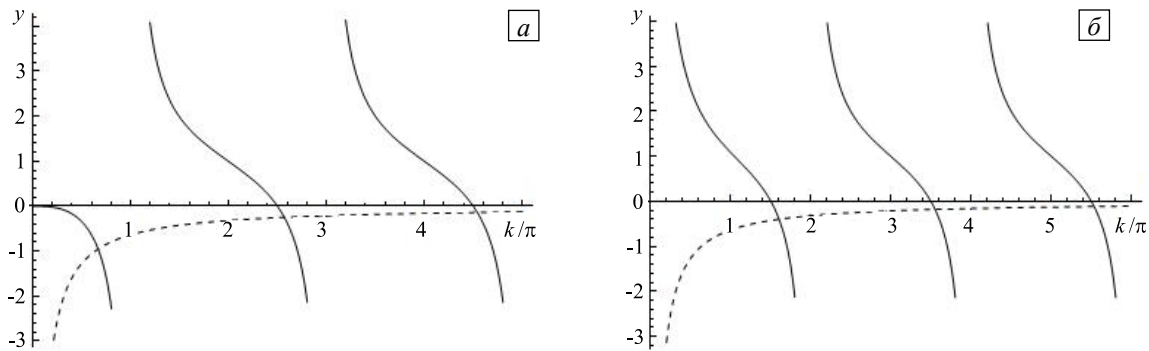


Рис. 2. Графическое представление решений уравнения (5)₂ (а) и (5)₃ (б)

Асимптотику остальных нижних границ (объединяя корни уравнений (5)₂ и (5)₃ и пренебрегая экспоненциально малыми добавками) можно представить формулой

$$\frac{k}{2} = r(n) \left\{ 1 + \frac{1}{mr^2(n)} + O\left(\left(\frac{1}{mr^2(n)} \right)^2 \right) \right\}, \quad r(n) = \pi[n - 1/2]/2,$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$ — порядковый номер полосы запириания. Таким образом, нижние границы полос запириания, начиная со второй, стремятся сверху к горизонтальным асимптотам $k/\pi = n - 1/2$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) (см. Рис. 1б), а ширина полос пропускания, начиная со второй, соответственно, стремится к $1/2$ сверху (при этом скорость движения к нулю ширины первой полосы пропускания составляет $k/2 = (3/m)^{1/4}$).

3. Поток энергии в балке

Для гармонического процесса колебаний поток энергии в балке Бернулли–Эйлера (усредненный за период) представим в виде:

$$\Pi = \frac{\omega}{2} D_c \operatorname{Im} \left(\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}} u - \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (6)$$

При вычислении используем в (6) для смещения u выражение (3). Окончательный вид формулы для потока энергии не приводится вследствие его громоздкости. В дальнейшем этот поток энергии будем нормировать на $\omega D_c 2k^3 |A|^2 / 2$ — поток энергии однородной волны, бегущей по балке без сосредоточенных масс (здесь A — амплитуда соответствующей волны). Заметим, что поток энергии в любом сечении балки одинаков ввиду отсутствия потерь в системе.

На рисунках 3а, б представлена зависимость нормированного потока энергии (обозначение Π для него сохранено) от нормированного волнового числа k/π при заданном значении массы m . На рисунке 3а массам $m = 0, 1; 0, 5; 3$ соответствуют штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии, а на рисунке 3б эти линии соотносятся с массами $m = 0, 1; 10; 100$.

Проанализируем поведение потока энергии. Из рисунка видно, что он равен нулю внутри полос запириания и отличен от нуля за их границами. При $m \rightarrow 0$ получаем предельный случай балки без точечных масс, при этом поток энергии и ширина полос пропускания стремятся к единице. С ростом m происходит уменьшение ширины полос пропускания и амплитуды потока энергии, причем эта закономерность выражается тем сильнее, чем больше номер полосы пропускания (Рис. 3а). Это связано с увеличением обобщенной присоединенной массы точечных включений с ростом частоты: $\omega^2 M$ (или $k^4 m$ в безразмерном виде). Однако достаточно быстро ширина полос пропускания, начиная со второй, и амплитуды потока энергии в них выходят на постоянный уровень, в то время как ширина первой полосы пропускания и амплитуда потока энергии в ней стремятся к нулю (Рис. 3а, б). Это вызвано качественно разным поведением системы в этих полосах. Далее будет показано, что в полосах пропускания, начиная со второй, система стремится «организовать» волновой процесс так, чтобы минимизировать инерционное воздействие на него точечных масс (координаты масс на оси x — целые числа), сводя их колебательное движение до нуля. По аналогии с узлами стоячей волны эти точки бегущей волны будем

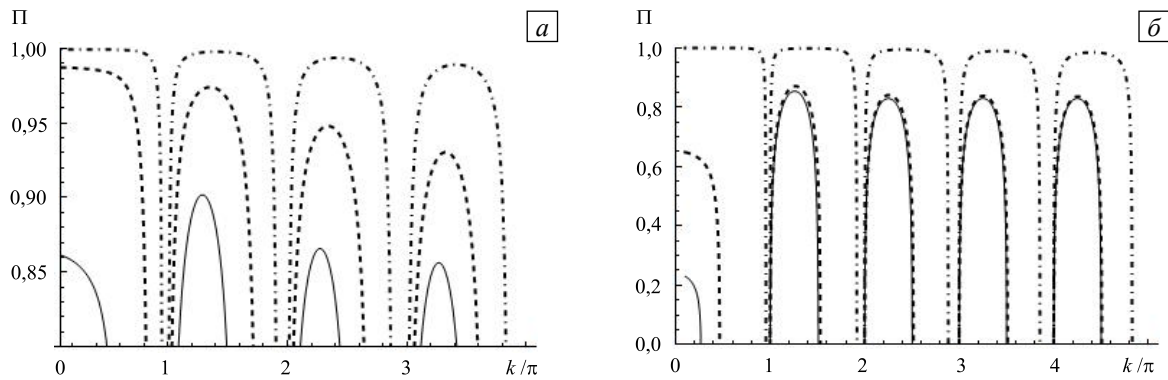


Рис. 3. Нормированный поток энергии в балке в зависимости от нормированного волнового числа величины элементарной массы: $m = 0, 1, 0, 5, 3$ (а); $m = 0, 1, 10, 100$ (б)

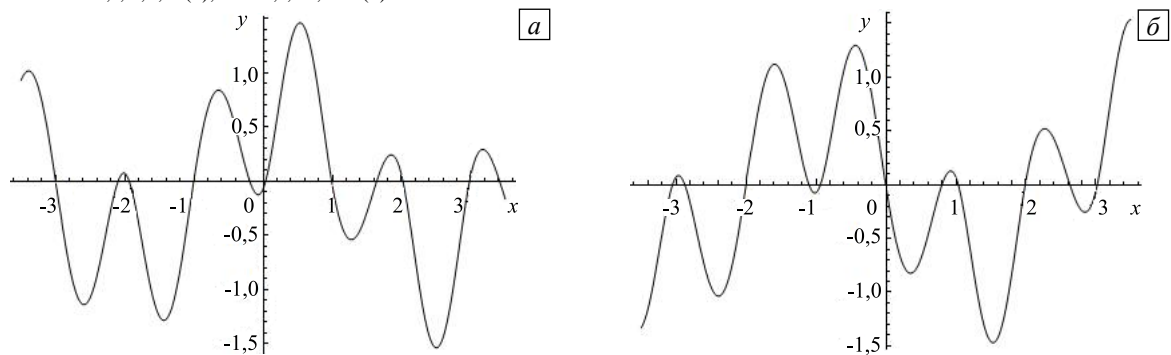


Рис. 4. Профиль продольного смещения балки при $k/\pi = 1, 3$, $m = 10$ (вторая зона пропускания) в различные моменты времени t : 0 (а); 1,7 (б)

называть псевдоузлами. В первой же полосе пропускания дело обстоит не так. По-видимому, это объясняется тем, что в первой полосе волновое число мало ($k < \pi$), и, соответственно, безразмерная длина волны $\lambda = 2\pi/k$ слишком велика ($\lambda > 2$), чтобы «обеспечить» появление псевдоузлов.

Как видно из рисунка 1б, при $m \approx 10$ и более ширина полос пропускания, начиная со второй, слабо зависит от величины элементарной массы. При таких значениях масс точечные инерционные включения уже располагаются в псевдоузлах волн, и рост их массы практически не влияет на поток энергии в системе. Проанализируем разницу в поведении системы в этом случае на примере профилей волн, соответствующих различным полосам пропускания и запирания.

На рисунках 4–7, 9 приведены зависимости профилей вещественной части смещения балки u как функций x (см. (3)) при $m = 10$ (нормирование амплитуды волны по оси y , в силу однородности задачи, произвольно). На рисунках 4а, б кривые получены для волнового числа из второй полосы пропускания ($P2$). Из сравнения их профилей, соответствующих различным моментам времени (здесь в роли времени t выступает безразмерное время, равное ωt), видно, что смещение все время имеет нули в точках, у которых абсциссы — целые числа ($x \in \mathbb{Z}$). Здесь как раз и располагаются точечные массы (остальные точки с нулевыми ординатами смещаются с изменением времени). Таким образом, при движении волны точечные массы остаются практически неподвижными, и их инерционные свойства не мешают прохождению волны. Поэтому в полосах пропускания, начиная со второй, зависимость потока от массы меньше, чем в первой полосе, где сосредоточенная масса «раскачивается» по ходу движения волны, и ее инерция значительно влияет на волновой процесс. Это видно по профилю волны из первой полосы пропускания в различные моменты времени (см. Рис. 5а и 5б, псевдоузлы отсутствуют).

На границе полос запирания и пропускания, а также внутри полос запирания реализуется режим стоячей волны с классическими узлами и пучностями. При этом внутри полос запирания по мере роста x волна характеризуется экспоненциально возрастающей (рисунки 6а, б для зон $S1$ и $S2$ соответственно) или экспоненциально убывающей амплитудой (что соответствует выбору угла α с отрицательной или положительной мнимой частью). На границе полос стоячая волна периодична, амплитуда не изменяется при переходе от одной ячейки периодичности к другой (в этом случае угол $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) (см. Рис. 6а, б для границ зон $P1-S1$ и $S1-P2$ соответственно). Поток энергии ее равен нулю вследствие непрерывности функции потока энергии, которая обращается в нуль внутри полос запирания.

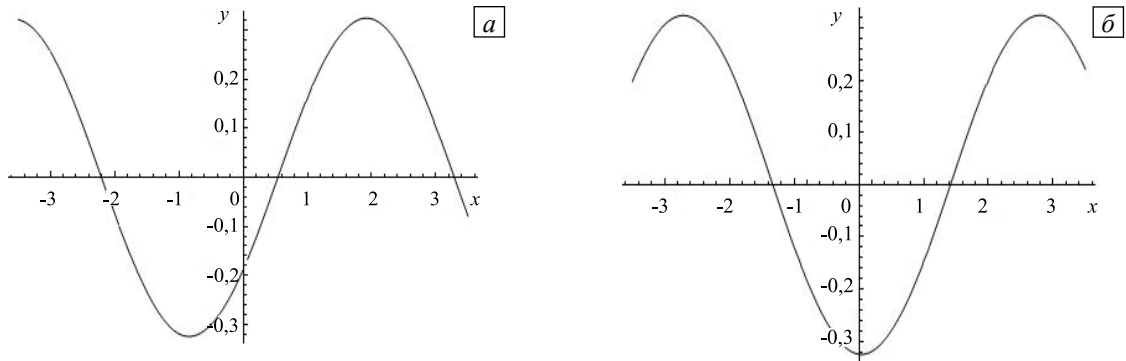


Рис. 5. Профиль смещения балки при $k/\pi=0,2$, $m=10$ (первая зона пропускания) в различные моменты времени t : 0 (а); 1 (б)

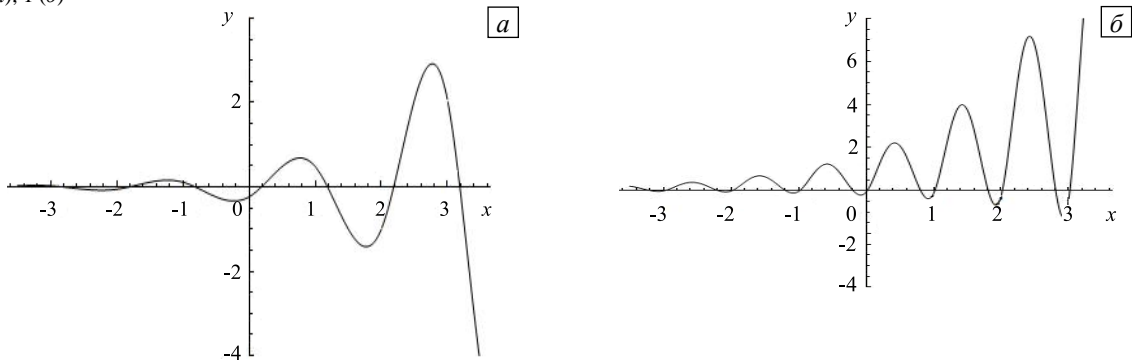


Рис. 6. Профиль смещения балки внутри первой (а) и второй (б) зон запираия в момент $t=0$, при $m=10$ и различных значениях нормированного волнового числа k/π : 0,55 (а); 1,6 (б)

Обобщая случаи стоячих и бегущих волн можно сказать, что точечные массы стремятся расположиться в узлах зон запираия соответствующих стоячих волн и на границах этих зон, а также в псевдоузлах зон пропускания бегущих волн. Это происходит как по мере увеличения параметра k (при фиксированном m), так и по мере увеличения параметра m (при фиксированном k); в обоих случаях наблюдается рост общей присоединенной массы $k^4 m$, влияние которой на волновой процесс система стремится уменьшить.

Однако если для бегущих волн смещение точечных масс в псевдоузлы реализуется начиная со второй полосы пропускания, то для стоячих волн это имеет место начиная с первой полосы запираия и на границах всех полос (за исключением границы $P1-S1$, когда точечные массы находятся в пучностях стоячей волны при всех m). Причем это смещение происходит тем интенсивнее, чем больше m . Для $m=10$ на рисунке 7 приведена динамика смещения массы из пучности стоячей волны на границе $P1-S1$ (Рис. 7а) в узел стоячей волны на границе $S1-P2$ (Рис. 7б) с учетом процесса перехода от одной ячейки периодичности к другой в зоне $S1$ (Рис. 6а). Далее, по мере роста k , элементарные массы будут локализоваться в соответствующих псевдоузлах и узлах волн, начиная с границы $S1-P2$ (как, например, в узлах волны из второй полосы запираия на рисунке 6б).

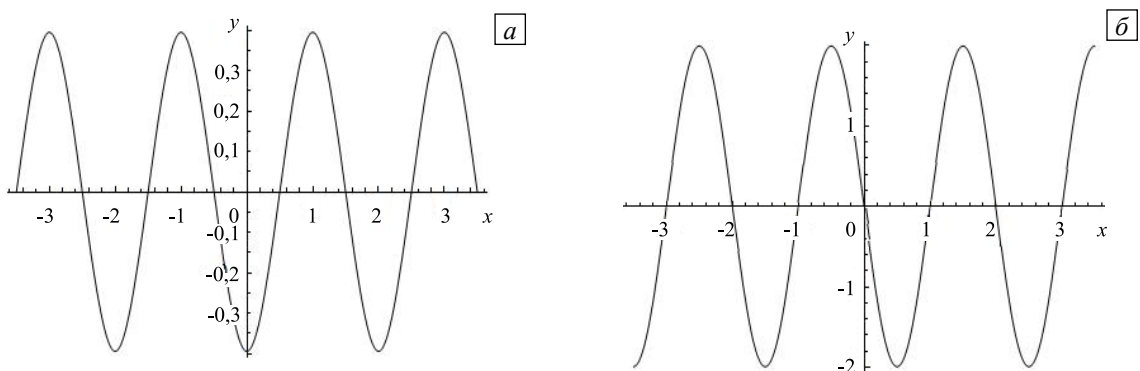


Рис. 7. Профиль смещения балки на границах первой зоны запираия в момент $t=0$ при $m=10$ и различных значениях нормированного волнового числа k/π : 0,466 (а); 1,0 (б)

4. Колебания ячейки периодической балки

Рассмотрим собственные волновые числа ячейки периодичности $[-1+s, s]$, где $s \in (0,1)$, при различных граничных условиях на ее концах (сосредоточенная масса находится в точке $x=0$). В случае скользящей заделки граничные условия приобретают вид:

$$\begin{cases} u'(-1+s) = 0 = u'(s), \\ u'''(-1+s) = 0 = u'''(s). \end{cases}$$

Решение уравнения (1) на участке $(-1+s, s)$ ищем как

$$u(x) = \begin{cases} A \operatorname{ch} k(x-s) + B \cos k(x-s), & x \in (0; s), \\ C \operatorname{ch} k(x-s+1) + D \cos k(x-s+1), & x \in (s-1; 0). \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая условие сшивания в точке $x=0$

$$\begin{cases} u(+0) - u(-0) = 0, \\ u'(+0) - u'(-0) = 0, \\ u''(+0) - u''(-0) = 0, \\ u'''(+0) - u'''(-0) = k^4 m u_0(0), \end{cases} \quad (8)$$

получим условие разрешимости (дисперсионное уравнение):

$$sl(k, m, s) = 2km \operatorname{ch} k \sin k \operatorname{ch}^2 ks + \operatorname{sh} k \left(4 \sin k + km (\cos k + \cos [k(1-2s)]) - \sin k \operatorname{sh} 2ks \right) = 0. \quad (9)$$

Если положим $s=0,5$, то получим симметричную ячейку (сосредоточенная масса располагается в середине промежутка $(-0,5; 0,5)$). Тогда дисперсионное уравнение упрощается:

$$sl(k, m, s)|_{s=1/2} = \cos \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2} \left(\frac{km}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2} \sin \frac{k}{2} + \operatorname{sh} \frac{k}{2} \left(\frac{km}{2} \cos k + 2 \sin \frac{k}{2} \right) \right) = 0. \quad (10)$$

При шарнирном опирании граничные условия приобретают вид:

$$\begin{cases} u(-1+s) = 0 = u(s), \\ u''(-1+s) = 0 = u''(s). \end{cases}$$

Решение уравнения (1) на участке $(-1+s, s)$ представим как

$$u(x) = \begin{cases} A \operatorname{sh} k(x-s) + B \sin k(x-s), & x \in (0; s), \\ C \operatorname{sh} k(x-s+1) + D \sin k(x-s+1), & x \in (s-1; 0). \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая условие сшивания (8) в точке $x=0$, получим условие разрешимости (дисперсионное уравнение) при шарнирном опирании:

$$hg(k, m, s) = 2km \operatorname{ch} k \sin k \operatorname{sh}^2 ks - \operatorname{sh} k \left(4 \sin k + km (\sin k \operatorname{sh} 2ks - 2 \sin ks \sin [k(1-s)]) \right) = 0. \quad (12)$$

В случае симметричной ячейки ($s=0,5$, $x \in (-0,5; 0,5)$) дисперсионное уравнение упрощается:

$$hg(k, m, s)|_{s=1/2} = \sin \frac{k}{2} \operatorname{sh} \frac{k}{2} \left(\frac{km}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{k}{2} \left(\frac{km}{2} \operatorname{sh} \frac{k}{2} + 2 \operatorname{ch} \frac{k}{2} \right) \right) = 0. \quad (13)$$

Задавая значения массы m и решая полученные дисперсионные уравнения (9), (10), (12), (13) относительно k (при фиксированном s), найдем возможные собственные числа, а решая систему уравнений (8) относительно констант A, B, C, D — выражения для смещений балки (7) и (11) с точностью

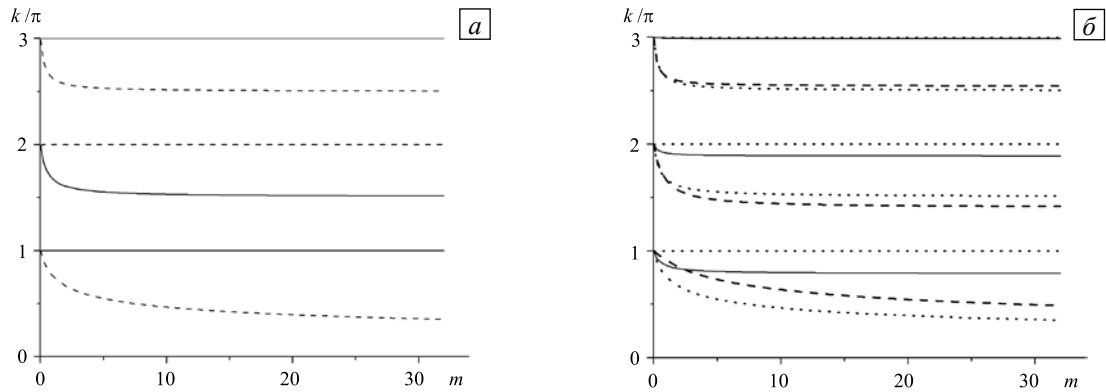


Рис. 8. Дисперсионные кривые для симметричной ($s = 0,5$ (а)) и несимметричной ($s = 0,15$ (б)) ячеек периодичности; случаю шарнирного опирания границы отвечают штриховые кривые, случаю заделки – сплошные линии; пунктирными линиями на рисунке (б) показаны границы зон пропускания и запираения соответствующей бесконечной системы

до общего множителя. Перебирая всевозможные значения $m \in (0, +\infty)$, определим набор дисперсионных кривых на плоскости (m, k) (Рис. 8). Так, на рисунке 8а представлены кривые для симметричной ячейки размером $s = 0,5$ с шарнирным опиранием (см. штриховые линии) и со скользящей заделкой (сплошные линии).

5. Связь между колебаниями ячейки периодичности балки и самой балкой как бесконечной системой

Из сравнения уравнений (10) и (13) с (4) следует соотношение

$$f l(k, m) = -16 h g(k, m, s) \Big|_{s=0,5} s l(k, m, s) \Big|_{s=0,5}. \quad (14)$$

То есть границы полос пропускания и запираения для бесконечной системы формируются из собственных волновых чисел симметричных ячеек периодичности со скользящим или шарнирным условием опирания на концах (Рис. 1б и Рис. 8а). В несимметричной ячейке ($s \neq 0,5$) такое согласование (см. (14)) пропадает. Так, на рисунке 8б для случая $s = 0,15$ изображены все три группы кривых. Пунктирные кривые отвечают границам зон пропускания и запираения бесконечной периодической системы, сплошные линии соответствуют волновым числам ячейки со скользящими краевыми условиями, а штриховые линии — волновым числам ячейки с шарнирным опиранием.

Отметим качественное различие рисунков 8а и 8б. Оно заключается в следующем: при смещении точечной массы из центра к одному из концов ячейки периодичности кривые собственных частот ячейки уже не будут совпадать с границами полос пропускания и запираения и по мере увеличения параметра «несимметрии» $|s - 0,5|$ могут частично (например при $s = 0,05$) или целиком смещаться как внутрь полос запираения, так и внутрь полос пропускания (Рис. 8б, $s = 0,15$).

Теперь сравним характер колебательных процессов в бесконечной периодической балке и ее ячейке периодичности. С некоторым допущением можно обобщить стандартное рассуждение, справедливое для однородной оболочки (струны, стержня, балки, цилиндрической оболочки) на оболочку с периодическими сосредоточенными массами. Рассуждение заключается в следующем: стоячую волну в изолированной ячейке периодичности можно рассматривать как суперпозицию бегущих навстречу друг другу волн в бесконечной периодической системе. Однако, если в ячейке однородной бесконечной оболочки стоячая волна может формироваться только при наличии бегущих волн в самой оболочке на этой частоте, то для периодической системы возможны и иные сценарии. Отдельно проанализируем колебания симметричной и несимметричной ячеек.

Если возьмем симметричную ячейку, то при указанных выше граничных условиях ее собственные волновые числа являются как раз границами зон пропускания и запираения, которым отвечает в бесконечной периодической системе стоячая волна. В случае несимметричной ячейки, как было показано в предыдущем разделе, возможны и другие варианты. Например, если собственное число стоячей волны в ячейке находится в зоне запираения бесконечной периодической системы, то ему в этой системе отвечают стоячие волны с экспоненциально растущей или затухающей амплитудой. Оказывается, что и стоячая волна в ячейке будет, в известной степени, наследовать эту неоднородность, сопровождаться краевыми эффектами.

В качестве иллюстрации на рисунках 9а, б показан профиль смещений ячейки для $m=10$, $s=0,45$. При этом рисунку 9а отвечает шарнирное опирание ячейки ($k=4,74$), а рисунку 9б — скользящее

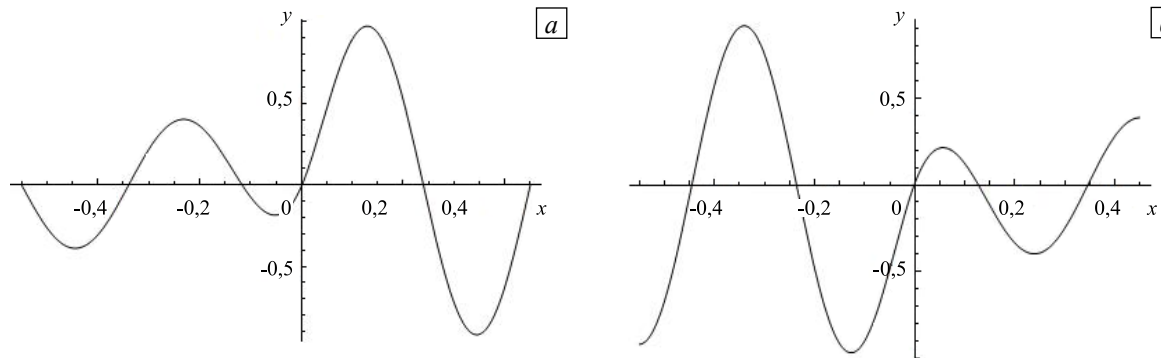


Рис. 9. Профиль продольного смещения балки при $s=0,45$, $m=10$: $k=4,74$, шарнирное закрепление (а); $k=4,77$, скользящая опора (б)

опирание ($k=4,77$). В обоих случаях волновые числа берутся из пятой по счету ненулевой собственной частоты соответствующей краевой задачи (волновые числа лежат в зоне запирания соответствующей задачи для бесконечной балки). Несмотря на незначительную несимметрию ячейки (в качестве меры асимметрии можно взять отношение $(|s-0,5|/s) \cdot 100\%$, которое здесь равняется 10%), в обоих видах граничных условий наблюдается явно выраженный краевой эффект. Вычисления показывают, что при шарнирном опирании экспоненциальная огибающая смещений балки явно выражена на левом конце ячейки у нечетных по счету собственных частот, и на правом конце — у четных. Для скользящей же заделки зависимость противоположная.

Следует отметить, что в отдельной ячейке (подобно тому, что происходило и в бесконечной системе, см. раздел 3) точечные массы стремятся расположиться в узлах стоячих волн по мере роста присоединенной массы $k^4 m$, влияние которой на волновой процесс система стремится уменьшить. При этом вероятность расположения точечных масс в узлах стоячей волны существенно зависит от параметров задачи (s и m) и типа краевых условий.

6. Заключение

В случае бесконечной периодически нагруженной точечными массами балки записаны явные выражения для потоков энергии и границ полос пропускания. Рассмотрены их асимптотики как функции масс точечных включений и частоты.

Исследован характер и «степень неоднородности» соответствующего волнового процесса в балке в зависимости от расположения соответствующего волнового числа относительно границ зон пропускания. Проанализирован эффект ослабления потока энергии в первой зоне пропускания с ростом массы точечных инерционных включений, а также эффект возникновения псевдоузлов.

Изучено влияние на характер колебаний периодически нагруженной балки «степени несимметрии» ячейки. Обнаружено, что с ростом несимметрии краевые эффекты усиливаются.

Использование помимо кинематической переменной (смещения u) также описывающего вибрационное поле потока энергии позволяет учитывать не только обобщенные координаты и силы в оболочке, но и сдвиг фазы между ними, что делает анализ процессов в оболочке всестороннее [19–23].

Принципиально общий вид полученных закономерностей дает основание обобщить связь задачи Флоке для бесконечной периодической системы и краевой задачи для ее изолированных ячеек периодичности на модели, где ячейки описываются дифференциальными уравнениями пластин, цилиндрических оболочек и других, более сложных конструкций.

Выявленные эффекты могут быть полезными при исследовании и конструировании периодических структур с заранее заданным расположением собственных частот (внутри полос пропускания или запирания), а также для оценки краевых эффектов в них. Для этого следует учитывать свойства симметрии ячейки, а также осуществлять подбор граничных условий. За примером возможного практического применения полученных результатов обратимся к строительству. При возведении жилых и промышленных сооружений актуален вопрос улучшения звукоизоляции. Перекрытия зданий зачастую выполняются панелями, имеющими периодическую структуру. Одним из аспектов проблемы улучшения звукоизоляции является ослабление вибраций на вполне определенных частотах. Изменяя степень симметрии ячеек периодичности панелей и условия их закрепления на концах можно эффективно управлять вибрационным процессом.

Автор выражает искреннюю признательность профессору С.В. Сорокину за инициирование тематики исследования и профессору Д.П. Коузову — за плодотворное обсуждение работы.

Литература

1. Mead D.M. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995 // *J. Sound Vib.* – 1996. – Vol. 190, no. 3. – P. 495-524. DOI
2. Olhoff N., Niu B., Cheng G. Optimum design of band-gap beam structures // *Int. J. Solids Struct.* – 2012. – Vol. 49, no. 22. – P. 3158-3169. DOI
3. Filippenko G.V. The location of pass and stop bands of an infinite periodic structure versus the eigenfrequencies of its finite segment consisting of several “periodicity cells” // 4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2013), June 12-14, 2013, Kos Island, Greece. – 1 CD ROM, 2013. – Article 1690. – 12 p. <http://www.eccomasproceedings.org/cs2013/pdf/1690.pdf> (дата обращения 06.04.2015).
4. Filippenko G.V. Wave phenomena in the periodic beam // Abstracts of the Int. Conf. “Days on Diffraction 2013”, May 27-31, 2013, St.-Petersburg, Russia. – P. 31. www.pdmi.ras.ru/~dd/download/book13.pdf (дата обращения 06.04.2015).
5. Glushkov E., Glushkova N., Wauer J. Wave propagation in an elastically supported string with point-wise defects: gap-band and pass-band effects // *ZAMM.* – 2011. – Vol. 91, no. 1. – P. 4-22. DOI
6. Sør-Knudsen A., Sorokin S.V. Modelling of linear wave propagation in spatial fluid filled pipe systems consisting of elastic curved and straight elements // *J. Sound Vib.* – 2010. – Vol. 329, no. 24. – P. 5116-5146. DOI
7. Dym H., McKean H.P. Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem. – Academic Press, 1976. – 333 p.
8. Jensen J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures // *J. Sound Vib.* – 2003. – Vol. 266, no. 5. – P. 1053-1078. DOI
9. Sorokin S.V., Ershova O.A. Plane wave propagation and frequency band gaps in periodic plates and cylindrical shells with and without heavy fluid loading // *J. Sound Vib.* – Vol. 278, no. 3. – P. 501-526. DOI
10. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 70-78. DOI
11. Sorokin S.V. The Green's matrix and the boundary integral equations for analysis of time-harmonic dynamics of elastic helical springs // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2011. – Vol. 129, no. 3. – P. 1315-1323. DOI
12. Yan J., Li T.Y., Liu J.X., Zhu X. Space harmonic analysis of sound radiation from a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell // *Appl. Acoust.* – 2006. – Vol. 67, no. 8. – P. 743-755. DOI
13. Ruzzene M., Baz A. Dynamic stability of periodic shells with moving loads // *J. Sound Vib.* – 2006. – Vol. 296, no. 4-5. – P. 830-844. DOI
14. Yu D., Païdoussis M.P., Shen H., Wang L. Dynamic stability of periodic pipes conveying fluid // *J. Appl. Mech.* – 2013. – Vol. 81, no. 1. – 011008. DOI
15. Shen H., Païdoussis M.P., Wen J., Yu D., Wen X. The beam-mode stability of periodic functionally-graded-material shells conveying fluid // *J. Sound Vib.* – 2014. – Vol. 333, no. 10. – P. 2735-2749. DOI
16. Shen H., Wen J., Yu D., Asgari M., Wen X. Control of sound and vibration of fluid-filled cylindrical shells via periodic design and active control // *J. Sound Vib.* – 2013. – Vol. 332, no. 18. – P. 4193-4209. DOI
17. Lee S., Vlahopoulos N., Waas A.M. Analysis of wave propagation in a thin composite cylinder with periodic axial and ring stiffeners using periodic structure theory // *J. Sound Vib.* – 2010. – Vol. 329, no. 16. – P. 3304-3318. DOI
18. Krynkina A., Ummova O., Taherzadeh S., Attenborough K. Analytical approximations for low frequency band gaps in periodic arrays of elastic shells // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2013. – Vol. 133, no. 2. – P. 781-791. DOI
19. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты осесимметричного распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 187-197. DOI
20. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 295-305. DOI
21. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролобова Н.А. Потoki энергии и дисперсия нормальных волн изгибного типа в балке крестообразного профиля // *Акустический журнал.* – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 331-336.
22. Коузов Д.П., Миролобова Н.А. Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 397-404. DOI
23. Sorokin S.V. Analysis of vibrations and energy flows in sandwich plates bearing concentrated masses and spring-like inclusions in heavy fluid-loading conditions // *J. Sound Vib.* – 2002. – Vol. 253, no. 2. – P. 485-505. DOI

References

1. Mead D.M. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 190, no. 3, pp. 495-524. DOI
2. Olhoff N., Niu B., Cheng G. Optimum design of band-gap beam structures. *Int. J. Solids Struct.*, 2012, vol. 49, no. 22, pp. 3158-3169. DOI
3. Filippenko G.V. The location of pass and stop bands of an infinite periodic structure versus the eigenfrequencies of its finite segment consisting of several “periodicity cells”. *4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2013), June 12-14, 2013, Kos Island, Greece.* – 1 CD ROM, 2013, Article 1690, 12 p. <http://www.eccomasproceedings.org/cs2013/pdf/1690.pdf> (accessed 6 April 2015).

4. Filippenko G.V. Wave phenomena in the periodic beam. *Abstracts of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2013", May 27-31, 2013, St.-Petersburg, Russia*. P. 31. www.pdmi.ras.ru/~dd/download/book13.pdf (accessed 6 April 2015).
5. Glushkov E., Glushkova N., Wauer J. Wave propagation in an elastically supported string with point-wise defects: gap-band and pass-band effects. *ZAMM*, 2011, vol. 91, no. 1, pp. 4-22. [DOI](#)
6. S e-Knudsen A., Sorokin S.V. Modelling of linear wave propagation in spatial fluid filled pipe systems consisting of elastic curved and straight elements. *J. Sound Vib.*, 2010, vol. 329, no. 24, pp. 5116-5146. [DOI](#)
7. Dym H., McKean H.P. *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem*. Academic Press, 1976, 333 p.
8. Jensen J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. *J. Sound Vib.*, 2003, vol. 266, no. 5, pp. 1053-1078. [DOI](#)
9. Sorokin S.V., Ershova O.A. Plane wave propagation and frequency band gaps in periodic plates and cylindrical shells with and without heavy fluid loading. *J. Sound Vib.*, vol. 278, no. 3, pp. 501-526. [DOI](#)
10. Yeliseev V.V., Zinovieva T.V. Nonlinear-elastic strain of underwater pipeline in laying process. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 70-78. [DOI](#)
11. Sorokin S.V. The Green's matrix and the boundary integral equations for analysis of time-harmonic dynamics of elastic helical springs. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 129, no. 3, pp. 1315-1323. [DOI](#)
12. Yan J., Li T.Y., Liu J.X., Zhu X. Space harmonic analysis of sound radiation from a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell. *Appl. Acoust.*, 2006, vol. 67, no. 8, pp. 743-755. [DOI](#)
13. Ruzzene M., Baz A. Dynamic stability of periodic shells with moving loads. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 296, no. 4-5, pp. 830-844. [DOI](#)

14. Yu D., Païdoussis M.P., Shen H., Wang L. Dynamic stability of periodic pipes conveying fluid. *J. Appl. Mech.*, 2013, vol. 81, no. 1, 011008. [DOI](#)
15. Shen H., Païdoussis M.P., Wen J., Yu D., Wen X. The beam-mode stability of periodic functionally-graded-material shells conveying fluid. *J. Sound Vib.*, 2014, vol. 333, no. 10, pp. 2735-2749. [DOI](#)
16. Shen H., Wen J., Yu D., Asgari M., Wen X. Control of sound and vibration of fluid-filled cylindrical shells via periodic design and active control. *J. Sound Vib.*, 2013, vol. 332, no. 18, pp. 4193-4209. [DOI](#)
17. Lee S., Vlahopoulos N., Waas A.M. Analysis of wave propagation in a thin composite cylinder with periodic axial and ring stiffeners using periodic structure theory. *J. Sound Vib.*, 2010, vol. 329, no. 16, pp. 3304-3318. [DOI](#)
18. Krynkina A., Umnova O., Taherzadeh S., Attenborough K. Analytical approximations for low frequency band gaps in periodic arrays of elastic shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2013, vol. 133, no. 2, pp. 781-791. [DOI](#)
19. Filippenko G.V. Energy aspects of axisymmetric wave propagation in an infinite cylindrical shell fully submerged in liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 187-197. [DOI](#)
20. Filippenko G.V. Energy aspects of wave propagation in an infinite cylindrical shell fully submerged in liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 295-305. [DOI](#)
21. Veshev V.A., Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Energy fluxes and dispersion of flexural normal waves in a cross-shaped beam. *Acoust. Phys.*, 1999, vol. 45, no. 3, pp. 331-336.
22. Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Local energy fluxes of forced vibrations of a thin elastic band. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 397-404. [DOI](#)
23. Sorokin S.V. Analysis of vibrations and energy flows in sandwich plates bearing concentrated masses and spring-like inclusions in heavy fluid-loading conditions. *J. Sound Vib.*, 2002, vol. 253, no. 2, pp. 485-505. [DOI](#)

Поступила в редакцию 25.11.2014; опубликована в электронном виде 30.06.2015