

DOI: [10.7242/1999-6691/2015.8.2.10](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.2.10)
УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ–КУТТЫ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Разработан общий алгоритм исследования спектральной устойчивости обобщенных многостадийных методов Рунге–Кутты (МРК) разных порядков точности применительно к численному интегрированию по времени волнового уравнения. Построена функция устойчивости для оценки спектральной устойчивости указанных методов. Исследована спектральная устойчивость различных явных и неявных обобщенных МРК. Выявлено, что поведение введенной функции устойчивости в конкретных обобщенных МРК такое же, как и в ранее рассмотренном случае уравнения переноса. Показано, что все явные обобщенные МРК спектрально неустойчивы, а все неявные обобщенные МРК – спектрально устойчивы, причем неявные методы, основанные на формулах Радо, Лобатто IIIС, Нёрсетта и Барриджа, обладают свойством ложного затухания (асимптотической устойчивостью), а методам Гаусса–Лежандра, Лобатто IIIА, Лобатто IIIВ всех порядков точности это свойство не присуще. На основе введенной функции устойчивости изучена спектральная устойчивость семейства методов Ньюмарка. Продемонстрировано, что один из них есть частный случай одного из обобщенных МРК, а именно одностадийного метода Гаусса–Лежандра (метода средней точки). Все остальные методы Ньюмарка либо спектрально неустойчивы, либо имеют свойство ложного затухания. Проведено сравнение приближенных решений, найденных разными обобщенными МРК и методами Ньюмарка, с точным решением задачи свободных колебаний струны, находящейся до начала движения в равновесии под действием сосредоточенной силы, которая мгновенно снимается в начальный момент времени. Показано, что лучшим при этом (в смысле соотношения простоты реализации и достигнутой точности) является численный результат, установленный трехстадийным диагонально неявным методом Барриджа четвертого порядка точности, так как сложность его реализации примерно такая же, как у методов Ньюмарка, а точность на два порядка выше. Продемонстрировано, что разработанный алгоритм исследования спектральной устойчивости обобщенных МРК и все полученные теоретические результаты могут быть без изменения перенесены и на параболические уравнения, содержащие вторые производные по времени от неизвестных функций и описывающие динамическое поведение изгибаемых балок или пластин.

Ключевые слова: обобщенные методы Рунге–Кутты, метод Ньюмарка, гиперболическое уравнение второго порядка, спектральная устойчивость, начально-краевая задача, функция устойчивости

STUDY OF SPECTRAL STABILITY OF GENERALIZED RUNGE–KUTTA METHODS IN THE INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATION

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

A general algorithm is developed to study the spectral stability of generalized multi-stage Runge–Kutta methods (RKM) of different orders of accuracy for time integration of the wave equation. The stability function is obtained to estimate the spectral stability of these methods. Spectral stability of various explicit and implicit generalized RKM is investigated. The behavior of the introduced stability function in a certain generalized RKM is found to be the same as in the previously studied case for the transport equation. It is shown that all the explicit generalized RKM are spectral unstable, and the implicit generalized RKM are spectral stable. Moreover, implicit methods based on the formulas of Rado, Lobatto IIIС, Merseta and Burrige possess the false attenuation property (asymptotic stability), and the methods of Gauss–Legendre, Lobatto IIIА, Lobatto IIIВ of all orders of accuracy do not possess this property. Using the proposed stability functions, the spectral stability of Newmark’s family of methods is investigated. Computations demonstrate that one of the Newmark methods is a special case of the generalized RKM, namely, the one-step Gauss–Legendre (midpoint) method. Other Newmark methods are spectral unstable or they have the false attenuation property. A comparison is carried out between the approximate solutions obtained in terms of different generalized RKM and Newmark methods and the exact solution of the problem of free vibrations of a string that is in equilibrium before its movement evoked by a concentrated force, immediately removed at the initial instant of time. The best finding in respect of a “simplicity of realization – achieved accuracy” ratio is the numerical result obtained from the three-stage fourth order diagonally implicit Burrige method, because the complexity of its realization is approximately the same as the Newmark methods, and its accuracy is higher by two orders of magnitude. It has been found that the algorithm developed to study the spectral stability of generalized RKM and all theoretical results can be transferred with no changes to the parabolic equations, which contain the second time derivatives of unknown functions and describe the dynamic behavior of flexible beams or plates.

Key words: generalized Runge–Kutta methods, Newmark method, hyperbolic equation of the second order, spectral stability, initial-boundary problem, stability function

1. Введение

Многие осциллирующие природные процессы описываются уравнениями математической физики, содержащими вторые производные по времени от неизвестных функций, в частности волновым уравнением, к которому сводятся, например, одномерные уравнения газовой динамики в акустическом

приближении [1], уравнения продольных колебаний упругих стержней, поперечные колебания мембран [2, 3] и другие. Для численного интегрирования этих уравнений (или их разностных аналогов, получающихся после дискретизации задачи по пространственным переменным согласно методу прямых) по времени прибегают как к явным [4, 5 и другие], так и неявным [6 и другие] численным схемам. Из явных методов наиболее распространены те, которые основываются на схеме «крест» [1, 7, 8 и другие], реже используются метод де Вожеа [7, 9] и явные методы Рунге–Кутты (МРК) [10, 11 и другие]. Из неявных методов чаще применяются методы Ньюмарка [12, 13 и другие], реже употребляются метод Хубольта (схема с опережением), методы Гёттина, Уилсона [13, 14], неявные МРК [2, 15–19 и другие], неявный метод де Вожеа [9, 14].

Интегрирование таких уравнений может быть осуществлено и обобщенными МРК [20 и другие], которые, как показано в [20, 21], позволяют дискретизировать соответствующую начально-краевую задачу в нетрадиционной последовательности — сначала по времени, а затем (если потребуется) — по пространственным переменным, что в определенных случаях может оказаться более эффективным, чем традиционная последовательная дискретизация (сначала по пространственным переменным, а затем по времени). Однако в [20], где было предложено обобщение МРК, не доказана устойчивость этих методов в приложении, например, к волновому уравнению, а рассмотрены лишь некоторые частные реализации обобщенных МРК.

В связи с этим настоящее исследование посвящено изучению спектральной устойчивости обобщенных МРК при численном интегрировании начально-краевой задачи для волнового уравнения.

2. Некоторые предварительные замечания

Рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 y(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} = L(y(t, \mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (1)$$

где t — время; G — некоторая область r -мерного евклидова пространства; $L(\bullet)$ — линейный дифференциальный оператор эллиптического типа с вторым порядком по пространственным переменным x_i ($i = \overline{1, r}$). При этом если $L(y) = \partial^2 y / \partial x_1^2$ ($r = 1$), то уравнение (1) описывает малые колебания струны или продольные колебания упругого стержня [3, 22]; если же $L(\bullet)$ — двумерный оператор Лапласа ($r = 2$), то уравнение (1) характеризует малые колебания мембраны [3].

Пусть λ — собственное число, а $W(\mathbf{x})$ — соответствующая ему собственная функция оператора $L(\bullet)$, то есть выполняется равенство

$$L(W(\mathbf{x})) + \lambda^2 W(\mathbf{x}) = 0. \quad (2)$$

Тогда, согласно методу разделения переменных [3], частное решение уравнения (1) с учетом (2) имеет вид:

$$y(t, \mathbf{x}) = C \sin(\lambda t + \varphi) W(\mathbf{x}), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (3)$$

где C , φ — некоторые постоянные. Из (3) вытекает

$$z(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial y}{\partial t} = \lambda C \cos(\lambda t + \varphi) W(\mathbf{x}), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G. \quad (4)$$

Из равенств (3), (4) получаем

$$F(\mathbf{x}) \equiv \sqrt{y^2 + (z/\lambda)^2} = \sqrt{y^2 + \bar{z}^2} = |CW(\mathbf{x})| \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (5)$$

где

$$\bar{z} \equiv \bar{z}(t, \mathbf{x}) = z(t, \mathbf{x})/\lambda, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G. \quad (6)$$

Из соотношения (5) следует, что функция $F(\mathbf{x})$ не зависит от времени и может быть использована для определения некоторой нормы частного решения (3) уравнения (1) с учетом (2), (4), (6).

3. Общий алгоритм исследования спектральной устойчивости обобщенных МРК применительно к начально-краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка

Дискретизируем начально-краевую задачу для уравнения (1) по времени t , то есть рассмотрим ее решение в моменты времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad t_0 = 0, \quad (7)$$

где τ — шаг по времени (возможно, переменный: $\tau = \tau_{n+1}$).

Далее будем исследовать спектральную устойчивость приближенных решений уравнения (1), полученных разными обобщенными МРК в дискретные моменты времени (7).

Для обобщения МРК на многомерные случаи [20] уравнение (1) запишем в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= z(t, \mathbf{x}), \\ \frac{\partial z(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= L(y(t, \mathbf{x})), \end{aligned} \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G. \quad (8)$$

Применение s -стадийного обобщенного МРК для интегрирования по времени начально-краевой задачи, соответствующей (8), в дискретные моменты времени (7) приводит к следующим дифференциальным уравнениям по пространственным переменным \mathbf{x} [20]:

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}z^n(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{A}L(\mathbf{y}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}y^n(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{A}z(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (9)$$

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{b}^* L(\mathbf{y}(\mathbf{x})), \quad y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{b}^* z(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \{Y_1(\mathbf{x}), Y_2(\mathbf{x}), \dots, Y_s(\mathbf{x})\}^*, \quad \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \{Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x}), \dots, Z_s(\mathbf{x})\}^*, \\ L(\mathbf{y}) &= \{L(Y_1), L(Y_2), \dots, L(Y_s)\}^*, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}^*, \\ \mathbf{e} &= \{1, 1, \dots, 1\}^*, \quad z^n(\mathbf{x}) \equiv z(t_n, \mathbf{x}), \quad y^n(\mathbf{x}) \equiv y(t_n, \mathbf{x}); \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ — s -компонентные вспомогательные вектор-функции; $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — $s \times s$ -матрица Бутчера соответствующего МРК; \mathbf{b} — s -компонентный вектор-столбец, составленный из элементов последней строки матрицы Бутчера (см. формулу (3.1.6) в [15]); \mathbf{e} — s -компонентный вектор-столбец, все элементы которого равны единице; звездочка означает операцию транспонирования.

Согласно [1, 13, 23] для исследования спектральной устойчивости схемы (9), (10) с учетом (2), (11) представим решение составляющих ее уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} y^n(\mathbf{x}) &= a^n W(\mathbf{x}), \quad y^{n+1}(\mathbf{x}) = a^{n+1} W(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{d} W(\mathbf{x}), \\ z^n(\mathbf{x}) &= b^n W(\mathbf{x}), \quad z^{n+1}(\mathbf{x}) = b^{n+1} W(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} W(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (12)$$

где a^n , b^n , a^{n+1} , b^{n+1} — некоторые постоянные, причем a^n , b^n предполагаются уже известными, а a^{n+1} , b^{n+1} подлежат определению в момент времени t_{n+1} ; \mathbf{d} , \mathbf{g} — искомые s -компонентные вектор-столбцы.

Подставим (12) в уравнения (9), (10), в результате чего получим

$$\mathbf{g} W(\mathbf{x}) = \mathbf{e} b^n W(\mathbf{x}) + \tau (\mathbf{A} \mathbf{d}) L(W(\mathbf{x})), \quad \mathbf{d} W(\mathbf{x}) = \mathbf{e} a^n W(\mathbf{x}) + \tau (\mathbf{A} \mathbf{g}) W(\mathbf{x}); \quad (13)$$

$$b^{n+1} W(\mathbf{x}) = b^n W(\mathbf{x}) + \tau (\mathbf{b}^* \mathbf{d}) L(W(\mathbf{x})), \quad a^{n+1} W(\mathbf{x}) = a^n W(\mathbf{x}) + \tau (\mathbf{b}^* \mathbf{g}) W(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (14)$$

Учтем в (13), (14) соотношение (2) и сократим результат на $W(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{g} = b^n \mathbf{e} - \tau \lambda^2 (\mathbf{A} \mathbf{d}), \quad \mathbf{d} = a^n \mathbf{e} + \tau (\mathbf{A} \mathbf{g}); \quad (15)$$

$$b^{n+1} = b^n - \tau \lambda^2 (\mathbf{b}^* \mathbf{d}), \quad a^{n+1} = a^n + \tau (\mathbf{b}^* \mathbf{g}). \quad (16)$$

В (15), используя второе равенство, исключим из первого вектор \mathbf{d} , тогда

$$\mathbf{g} = b^n \mathbf{e} - \tau \lambda^2 \mathbf{A} (a^n \mathbf{e} + \tau \mathbf{A} \mathbf{g}) = b^n \mathbf{e} - \tau \lambda^2 a^n (\mathbf{A} \mathbf{e}) - (\tau \lambda)^2 \mathbf{A}^2 \mathbf{g}.$$

Отсюда следует

$$(\mathbf{I} + \eta^2 \mathbf{A}^2) \mathbf{g} = b^n \mathbf{e} - \tau \lambda^2 a^n (\mathbf{A} \mathbf{e}), \quad (17)$$

где \mathbf{I} — единичная $s \times s$ -матрица;

$$\eta = \tau \lambda. \quad (18)$$

Представим вектор \mathbf{g} в виде:

$$\mathbf{g} = b^n \mathbf{g}_b + \lambda a^n \mathbf{g}_a. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (17) и сравнения правой и левой частей результата получим соотношения для определения s -компонентных вектор-столбцов \mathbf{g}_a и \mathbf{g}_b :

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \eta^2 \mathbf{A}^2) \mathbf{g}_a &= -\eta (\mathbf{A} \mathbf{e}), \\ (\mathbf{I} + \eta^2 \mathbf{A}^2) \mathbf{g}_b &= \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее считаем, что вектор-функции $\mathbf{g}_a = \mathbf{g}_a(\eta)$ и $\mathbf{g}_b = \mathbf{g}_b(\eta)$ уже известны из решения матричных уравнений (20), которые представляют собой СЛАУ относительно компонентов вектор-столбцов \mathbf{g}_a и \mathbf{g}_b .

Подставим выражение (19) во второе равенство (15) и учтем (18). Тогда

$$\mathbf{d} = a^n \mathbf{e} + \tau \mathbf{A} (b^n \mathbf{g}_b + \lambda a^n \mathbf{g}_a) = a^n \mathbf{d}_a + \tau b^n \mathbf{d}_b, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{e} + \eta (\mathbf{A} \mathbf{g}_a), \quad \mathbf{d}_b = \mathbf{A} \mathbf{g}_b. \quad (22)$$

Из (22), согласно (20), следует, что вектор-функции $\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\eta)$ и $\mathbf{d}_b = \mathbf{d}_b(\eta)$ также известны.

Подставим (19), (21) в соотношения (16) и учтем (18):

$$\begin{aligned} b^{n+1} &= b^n - \tau \lambda^2 \mathbf{b}^* (a^n \mathbf{d}_a + \tau b^n \mathbf{d}_b) = (1 - \eta^2 \mathbf{b}^* \mathbf{d}_b) b^n - \lambda \eta (\mathbf{b}^* \mathbf{d}_a) a^n, \\ a^{n+1} &= a^n + \tau \mathbf{b}^* (b^n \mathbf{g}_b + \lambda a^n \mathbf{g}_a) = (1 + \eta \mathbf{b}^* \mathbf{g}_a) a^n + \tau (\mathbf{b}^* \mathbf{g}_b) b^n. \end{aligned} \quad (23)$$

По аналогии с точным решением (см. (4), (6)) введем в рассмотрение новые величины

$$\bar{b}^n \equiv b^n / \lambda, \quad \bar{b}^{n+1} \equiv b^{n+1} / \lambda, \quad (24)$$

тогда равенства (23) с учетом (24) примут вид:

$$a^{n+1} = A_a a^n + A_b \bar{b}^n, \quad \bar{b}^{n+1} = B_a a^n + B_b \bar{b}^n, \quad (25)$$

где

$$A_a(\eta) \equiv 1 + \eta (\mathbf{b}^* \mathbf{g}_a), \quad A_b(\eta) \equiv \eta (\mathbf{b}^* \mathbf{g}_b), \quad B_a(\eta) \equiv -\eta (\mathbf{b}^* \mathbf{d}_a), \quad B_b(\eta) \equiv 1 - \eta^2 (\mathbf{b}^* \mathbf{d}_b). \quad (26)$$

Так как для точного частного решения (3), (4) уравнения (1) справедливо соотношение (5) (функция $F(\mathbf{x})$ не зависит от времени t), то естественно в идеале ожидать, что такое же свойство имеет и приближенное частное решение (12) (с учетом (24)), полученное соответствующим обобщенным МРК. В связи с этим, на основании (12), (24), по аналогии с (5) введем величины

$$F^n \equiv \sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

которые в идеале не должны зависеть от номера момента времени n .

Исходя из вышеизложенного величина (27) может рассматриваться в момент времени t_n как норма приближенного частного решения (12) уравнения (1). Следовательно, отношение

$$R = \frac{F^{n+1}}{F^n} = \frac{\sqrt{(a^{n+1})^2 + (\bar{b}^{n+1})^2}}{\sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2}} > 0, \quad (28)$$

следуя терминологии, принятой в [15], целесообразно назвать функцией спектральной устойчивости соответствующего обобщенного МРК применительно к начально-краевой задаче для уравнения (1).

Согласно (28) при $R > 1$ обобщенный МРК спектрально неустойчив; если же $R \leq 1$, то метод спектрально устойчив, причем при

$$R \equiv 1 \quad (29)$$

у него отсутствует свойство ложного затухания (свойство асимптотической устойчивости), а при

$$0 < R < 1 \quad (30)$$

он асимптотически устойчив (то есть любые возмущения начальных коэффициентов a^0, b^0 с увеличением n затухают) и обладает свойством ложного затухания.

Для оценки введенной таким образом спектральной устойчивости обобщенного МРК перепишем (25) так:

$$\frac{a^{n+1}}{\sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2}} = A_a(\eta) \cos \psi + A_b(\eta) \sin \psi, \quad \frac{\bar{b}^{n+1}}{\sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2}} = B_a(\eta) \cos \psi + B_b(\eta) \sin \psi, \quad (31)$$

где

$$\cos \psi = \frac{a^n}{\sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\bar{b}^n}{\sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2}}. \quad (32)$$

Возведем каждое из равенств (31) в квадрат, результаты сложим, из суммы извлечем квадратный корень, учтем (28) и в итоге получим следующее выражение для функции устойчивости:

$$R(\eta, \psi) = \frac{\sqrt{(a^{n+1})^2 + (\bar{b}^{n+1})^2}}{\sqrt{(a^n)^2 + (\bar{b}^n)^2}} = \sqrt{(A_a(\eta) \cos \psi + A_b(\eta) \sin \psi)^2 + (B_a(\eta) \cos \psi + B_b(\eta) \sin \psi)^2}. \quad (33)$$

Из (33) видно, что функция устойчивости R зависит от двух переменных: η и ψ , причем коэффициенты A_a, A_b, B_a, B_b не зависят от ψ . На основании (29), (30) для оценки спектральной устойчивости МРК достаточно при каждом $\eta > 0$ оценить $\max_{\psi} R(\eta, \psi)$. Функция (33) периодична по ψ , поэтому при фиксированном η она характеризуется как локальным максимумом, так и минимумом, которые определяются из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = \frac{1}{2R(\eta, \psi)} \left[-A_a^2 \sin 2\psi + 2A_a A_b \cos 2\psi + A_b^2 \sin 2\psi - B_a^2 \sin 2\psi + 2B_a B_b \cos 2\psi + B_b^2 \sin 2\psi \right] = 0,$$

откуда делением на $\cos^2 \psi$ получим:

$$(A_a A_b + B_a B_b) \operatorname{tg}^2 \psi + (A_a^2 - A_b^2 + B_a^2 - B_b^2) \operatorname{tg} \psi - (A_a A_b + B_a B_b) = 0. \quad (34)$$

Равенство (34) является квадратным уравнением относительно $\operatorname{tg} \psi$, дискриминант которого равен

$$D = (A_a^2 - A_b^2 + B_a^2 - B_b^2)^2 + 4(A_a A_b + B_a B_b)^2 > 0. \quad (35)$$

Следовательно, уравнение (34) имеет два действительных корня:

$$\psi_i = \operatorname{arctg} \left(\frac{-\left(A_a^2 - A_b^2 + B_a^2 - B_b^2\right) - (-1)^i \sqrt{D}}{2\left(A_a A_b + B_a B_b\right)} \right) \quad (i = 1, 2). \quad (36)$$

Один из корней соответствует максимуму, а другой — минимуму функции R . Интерес представляет (см. (28)–(30)) именно максимум функции R , поэтому введем обозначение

$$R_m(\eta) = \max \{R_1(\eta), R_2(\eta)\}, \quad R_i(\eta) \equiv R(\eta, \psi_i) \quad (i = 1, 2). \quad (37)$$

Тогда для оценки спектральной устойчивости обобщенного МРК применительно к уравнению (1) (или, что то же самое, — к системе (8)) достаточно исследовать зависимость $R_m(\eta)$ при $\eta > 0$ с учетом (35), (36). Если окажется, что $R_m(\eta) > 1$, то метод спектрально неустойчив, а при $0 < R_m(\eta) \leq 1$ он спектрально устойчив, причем в случае $0 < R_m(\eta) < 1$ МРК обладает асимптотической спектральной устойчивостью (свойством ложного затухания).

Таким образом, на основании соотношений (9)–(37) можно численно проверить спектральную устойчивость обобщенных МРК разных порядков точности, к которым прибегают при интегрировании уравнения (1). Для этого необходимо лишь использовать компоненты матрицы Бутчера соответствующего МРК [15] и проварьировать величину $\eta = \tau\lambda$ (см. (18)) от нуля до бесконечности (до машинной бесконечности).

По этой схеме анализировалась спектральная устойчивость конкретных обобщенных МРК разных порядков точности, причем оказалось, что для всех этих методов $R_m(\eta) = R_1(\eta) = R_2(\eta)$, то есть, соответственно (33)–(37), выполняется тождество $R(\eta, \psi) \equiv R_m(\eta)$, и функция устойчивости R не зависит от ψ .

Ненулевые компоненты матрицы Бутчера явных МРК расположены под главной диагональю [10, 20], поэтому компоненты $Y_m(\mathbf{x})$, $Z_m(\mathbf{x})$ ($1 \leq m \leq s$) векторов $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ (см. (11)) вычисляются последовательно из вспомогательных уравнений (9) без необходимости обращения оператора $\mathbf{A}L(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ (что и характеризует эти методы как явные). Рассмотрение явных обобщенных МРК, компоненты матриц Бутчера которых приведены в [10], показало, что все они, как и в [21] применительно к уравнению переноса, спектрально неустойчивы.

Численное исследование по схеме (9)–(37) спектральной устойчивости неявных обобщенных МРК, матрицы Бутчера которых приведены в [15], показало, что для всех методов Гаусса–Лежандра, Лобатто ША и Лобатто ШВ функция $R(\eta) \equiv 1$ (см. (29), (37)), то есть эти методы спектрально устойчивы, но не обладают свойством асимптотической устойчивости. Для всех методов Лобатто ШС, Радо IA и Радо ПА функция $R(\eta)$ при $\eta > 0$ монотонно убывает от единицы до нуля, причем $R(0) = 1$. Следовательно, согласно (30), этим методам присуща асимптотическая спектральная устойчивость, то есть свойство ложного затухания.

Напомним, что среди неявных обобщенных МРК особое место занимают диагональные методы, так как для них ненулевые компоненты матрицы \mathbf{A} (см. (9)) расположены на главной диагонали и под ней, что позволяет обращать операторы $L(Y_m(\mathbf{x}))$ в уравнениях (9) последовательно на каждой m -й стадии решения (подробнее см. ниже). Это существенно упрощает процедуру интегрирования уравнений (9) по сравнению с другими неявными обобщенными МРК. Численные расчеты по схеме (9)–(37) показали, что для двустадийного диагонально неявного метода (метода Нёрсетта), имеющего третий порядок точности по τ , функция $R(\eta)$ при $\eta > 0$ монотонно убывает от единицы до значения 0,7321, причем $R(0) = 1$. Для трехстадийного же диагонально неявного метода (метода Барриджа с четвертым порядком точности по τ) функция $R(\eta)$ при $\eta > 0$ монотонно убывает от единицы до значения 0,6304, причем $R(0) = 1$. Таким образом, оба диагонально неявных метода обладают свойством асимптотической спектральной устойчивости.

Следует отметить, что для всех названных выше обобщенных МРК зависимости $R(\eta)$ при $\eta > 0$ получились совершенно такими же, как и для функций устойчивости $R(\eta)$ из [21] при тех же методах, но примененных к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса.

Это подтверждает логическую обоснованность выбора функции устойчивости в настоящей работе в виде (28), тогда как в [21] функция $R(\eta)$ выбиралась из совершенно других соображений.

З а м е ч а н и е 1. Выше нигде не использовано условие, что оператор $L(\bullet)$ в (1) содержит частные производные по пространственным переменным x_i не выше второго порядка (то есть уравнение (1) имеет именно гиперболический тип). В действительности все проведенные выше рассуждения остаются справедливыми, если оператор $L(\bullet)$ содержит частные производные по x_i ($i = \overline{1, r}$) выше второго порядка. В частности, если $L(\bullet) \equiv \partial^4 / \partial x_1^4$, то уравнение (1) описывает малые поперечные колебания упругого стержня; в случае же, когда $L(\bullet)$ есть бигармонический оператор по двум переменным x_1, x_2 , уравнение (1) определяет малые поперечные колебания упругой изотропной пластины [24]. При этом (1) уже не гиперболическое, а параболическое уравнение высокого порядка.

З а м е ч а н и е 2. Все проведенные выше рассуждения остаются справедливыми и в том случае, когда оператор $L(\bullet)$ в (1) не дифференциальный, а конечно-разностный [23]. При этом уравнение (1) или система (8) представляют собой результат применения метода прямых для приближенного решения соответствующей начально-краевой задачи. Следовательно, алгоритм (9)–(37), где под W, z^n, y^n, Z_m, Y_m нужно понимать сеточные функции, подходит и для изучения спектральной устойчивости соответствующих конечно-разностных схем, основанных на применении МРК к уравнению (1) или к системе (8), где $L(\bullet)$ — конечно-разностный оператор [13, 15, 23].

Все обобщенные МРК относятся к разряду двухслойных по времени схем, для которых из спектральной устойчивости следует устойчивость по начальным данным [23].

Покажем, что схема (9), (10) может быть преобразована так, что результат не будет содержать вспомогательной вектор-функции $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Действительно, для всех неявных МРК матрица \mathbf{A} в (9) является невырожденной, поэтому из второго уравнения (9) найдем:

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \tau^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}y^n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G, \quad (38)$$

где $\mathbf{C} = (c_{ij})$ — $s \times s$ -матрица, обратная \mathbf{A} ($\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$). Подставим (38) в первое из выражений (9) и во второе из (10), тогда

$$\tau^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}y^n(\mathbf{x})) = \mathbf{e}z^n(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{A}L(\mathbf{y}(\mathbf{x})); \quad (39)$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^* \mathbf{C}(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}y^n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (40)$$

Из (39) следует

$$L(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - \tau^{-2} \mathbf{C}^2 \mathbf{y}(\mathbf{x}) = -\tau^{-2} (\mathbf{C}^2 \mathbf{e}) y^n(\mathbf{x}) - \tau^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{e}) z^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (41)$$

На основании (41) преобразуем первое равенство (10):

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^* \left[\tau^{-1} \mathbf{C}^2 (\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}y^n(\mathbf{x})) - (\mathbf{C} \mathbf{e}) z^n(\mathbf{x}) \right], \quad \mathbf{x} \in G. \quad (42)$$

Таким образом, вместо уравнений (9) достаточно проинтегрировать уравнение (41), в котором правая часть известна, так как функции $y^n(\mathbf{x}), z^n(\mathbf{x})$ предполагаются уже известными в момент времени t_{n+1} . Если определим вектор-функцию $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ из решения операторного уравнения (41), то после ее подстановки в (40), (42) получим приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения (1) в момент времени t_{n+1} . Тем самым за счет (38) из рассмотрения полностью исключается вспомогательная вектор-функция $\mathbf{z}(\mathbf{x})$.

4. Особенности реализации некоторых конкретных обобщенных МРК

Рассмотрим реализацию некоторых конкретных обобщенных МРК при интегрировании начально-краевой задачи для уравнения (1). С этой целью обратимся сначала к одностадийному ($s=1$) методу Гаусса–Лежандра (методу средней точки), имеющему второй порядок точности по τ , для которого схема (9), (10) принимает вид:

$$Z_1(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2}L(Y_1(\mathbf{x})), \quad Y_1(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2}Z_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (43)$$

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \tau L(Y_1(\mathbf{x})), \quad y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + \tau Z_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (44)$$

Из второго выражения (43), согласно (38), найдем:

$$Z_1(\mathbf{x}) = \frac{2}{\tau}(Y_1(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (45)$$

Подставим (45) в первое из уравнений (43) и во второе из (44), тогда получим

$$L(Y_1(\mathbf{x})) - \frac{4}{\tau^2}Y_1(\mathbf{x}) = -\frac{4}{\tau^2}y^n(\mathbf{x}) - \frac{2}{\tau}z^n(\mathbf{x}), \quad Y_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(y^{n+1}(\mathbf{x}) + y^n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (46)$$

Используя второе равенство (46), исключим из первого уравнения (46) функцию $Y_1(\mathbf{x})$:

$$L(y^{n+1}(\mathbf{x})) - \frac{4}{\tau^2}y^{n+1}(\mathbf{x}) = -L(y^n(\mathbf{x})) - \frac{4}{\tau^2}y^n(\mathbf{x}) - \frac{4}{\tau}z^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (47)$$

В (47) правая часть известна в момент времени t_{n+1} из решения на предыдущем шаге по времени. Из первого равенства (44) с учетом (46) дополнительно имеем

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\tau}(y^{n+1}(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})) - z^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (48)$$

Следовательно, для нахождения решения (то есть функций $y^{n+1}(\mathbf{x})$, $z^{n+1}(\mathbf{x})$) в момент времени t_{n+1} необходимо проинтегрировать уравнение (47) и результат подставить в (48).

Отметим, что к равенствам (47), (48) в конечном итоге приводит и использование двустадийных ($s = 2$) методов Лобатто IIIA (метода трапеций) и Лобатто IIIB, имеющих также второй порядок точности по τ .

Некоторое неудобство в реализации схемы (47), (48) заключается в том, что для определения правой части в (47) следует на каждом шаге по времени вычислять оператор $L(\bullet)$ от уже известной функции $y^n(\mathbf{x})$. Покажем, как можно избавиться от этой необходимости. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$P^n(\mathbf{x}) = -L(y^n(\mathbf{x})) + \frac{4}{\tau^2}y^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G. \quad (49)$$

Тогда уравнение (47) примет вид:

$$L(y^{n+1}(\mathbf{x})) - \frac{4}{\tau^2}y^{n+1}(\mathbf{x}) = -P^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad (50)$$

где правая часть находится по рекуррентной формуле

$$P^{n+1}(\mathbf{x}) = -P^n(\mathbf{x}) + \frac{8}{\tau^2}y^n(\mathbf{x}) + \frac{4}{\tau}z^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (51)$$

которая получается из сравнения правых частей (47), (50) с учетом (49). Далее, если из начальных условий в момент времени t_0 известны функции $y^0(\mathbf{x})$, $z^0(\mathbf{x})$, то по формуле (49) при $n = 0$ можем вычислить $P^0(\mathbf{x})$, а затем, на основании (51), установим $P^1(\mathbf{x})$ и другое.

Таким образом, для реализации одностадийного метода Гаусса–Лежандра (или двустадийных методов Лобатто IIIA и IIIB) необходимо на каждом шаге по времени проинтегрировать уравнение (50), а результат подставить в (48). При этом, согласно (51), для отыскания правой части в (50) не требуется вычислять оператор $L(\bullet)$ от известной функции $y^n(\mathbf{x})$.

При условии, что оператор есть $L(\bullet) \equiv \partial^2/\partial x_1^2$, уравнение (50) описывает статический прогиб струны на упругом основании; если же $L(\bullet)$ — оператор Лапласа, то левая часть уравнения (50) представляет

собой оператор Гельмгольца, причем в двумерном случае ($r = 2$) уравнение (50) характеризует статические прогибы мембраны на упругом винклеровском основании с коэффициентом постели $k = 4/\tau^2$, а функция $P^{n+1}(\mathbf{x})$ имеет при этом смысл внешней распределенной нагрузки.

В случае, когда $L(\bullet) \equiv \partial^4/\partial x_1^4$, уравнение (50) моделирует (см. Замечание 1) статический изгиб стержня на упругом основании, а когда $L(\bullet)$ является бигармоническим оператором, — статический изгиб упругой изотропной пластины на упругом винклеровском основании с коэффициентом постели $k = 4/\tau^2$ [24, 25]. Важно отметить, что чем меньше шаг по времени τ , тем жестче фиктивное упругое основание. Таким образом, для численного интегрирования по времени t уравнения (1) одностадийным обобщенным методом Гаусса–Лежандра и двустадийными методами Лобатто ША и ШВ нужно на каждом шаге по времени решить статическую задачу для уравнения (50) при соответствующих граничных условиях. При этом в случаях, когда уравнение (1) описывает динамику тонкостенной конструкции, уравнение (50) определяет решение статической задачи для этой конструкции, покоящейся на фиктивном винклеровском основании. В процессе счета при переходе от одного момента времени к другому изменяется (см. (51)) лишь правая часть в (50), которая играет роль распределенной нагрузки. Решение граничной задачи для уравнения (50) на каждом шаге по времени можно разыскивать как численно, так и аналитически [25].

Применение обобщенного двустадийного ($s = 2$) метода Лобатто ШС (со вторым порядком точности по τ) приводит к уравнениям вида [15, 20]:

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} [L(Y_1(\mathbf{x})) - L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_1(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} [Z_1(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x})], \\ Z_2(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} [L(Y_1(\mathbf{x})) + L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_2(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} [Z_1(\mathbf{x}) + Z_2(\mathbf{x})], \\ z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} [L(Y_1(\mathbf{x})) + L(Y_2(\mathbf{x}))], & y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} [Z_1(\mathbf{x}) + Z_2(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Учитывая формулы (38)–(42), окончательно получим

$$L(Y_1(\mathbf{x})) - \frac{2}{\tau^2} Y_2(\mathbf{x}) = -\frac{2}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}) - \frac{2}{\tau} z^n(\mathbf{x}), \quad L(Y_2(\mathbf{x})) + \frac{2}{\tau^2} Y_1(\mathbf{x}) = \frac{2}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (52)$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = Y_2(\mathbf{x}), \quad z^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau} [Y_2(\mathbf{x}) - Y_1(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G. \quad (53)$$

В отличие от метода средней точки (см. (50)) для реализации двустадийного метода Лобатто ШС на каждом шаге по времени требуется интегрирование граничной задачи для системы двух связанных дифференциальных уравнений (52). Ее порядок вдвое больше порядка уравнения (50). После интегрирования уравнений (52) приближенное решение системы (8) в момент времени t_{n+1} находится по формулам (53).

Таким образом, двустадийный метод Лобатто ШС имеет такой же порядок точности по τ , как и метод средней точки, но на каждом шаге по времени требует интегрирования гораздо более сложных уравнений. Это усложнение окупается свойством асимптотической устойчивости, которым обладает метод Лобатто ШС, но которое не присуще методу средней точки.

Если для численного интегрирования по времени системы (8) использовать двустадийный метод Радо IA (имеет третий порядок точности по τ), то получим уравнения [15, 20]:

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [L(Y_1(\mathbf{x})) - L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_1(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [Z_1(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x})], \\ Z_2(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{12} [3L(Y_1(\mathbf{x})) + 5L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_2(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{12} [3Z_1(\mathbf{x}) + 5Z_2(\mathbf{x})], \\ z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [L(Y_1(\mathbf{x})) + 3L(Y_2(\mathbf{x}))], & y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [Z_1(\mathbf{x}) + 3Z_2(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

откуда с учетом формул (38)–(42) следует:

$$L(Y_1(\mathbf{x})) - \frac{2}{\tau^2} [2Y_1(\mathbf{x}) + 3Y_2(\mathbf{x})] = -\frac{10}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}) - \frac{4}{\tau} z^n(\mathbf{x}), \quad L(Y_2(\mathbf{x})) + \frac{6}{\tau^2} Y_1(\mathbf{x}) = \frac{6}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (54)$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [3Y_2(\mathbf{x}) - Y_1(\mathbf{x})], \quad z^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\tau} [3Y_2(\mathbf{x}) - 7Y_1(\mathbf{x}) + 4y^n(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G. \quad (55)$$

Как видим, для реализации двустадийного метода Радо IA необходимо на каждом шаге по времени решить граничную задачу для системы двух связанных уравнений (54) и результат подставить в соотношения (55).

В случае применения двустадийного метода Радо ПА (с третьим порядком точности по τ) получим систему [15, 20]:

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{12} [5L(Y_1(\mathbf{x})) - L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_1(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{12} [5Z_1(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x})], \\ Z_2(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [3L(Y_1(\mathbf{x})) + L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_2(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [3Z_1(\mathbf{x}) + Z_2(\mathbf{x})], \\ z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [3L(Y_1(\mathbf{x})) + L(Y_2(\mathbf{x}))], & y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{4} [3Z_1(\mathbf{x}) + Z_2(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} L(Y_1(\mathbf{x})) - \frac{2}{\tau^2} Y_2(\mathbf{x}) &= -\frac{2}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}) - \frac{2}{\tau} z^n(\mathbf{x}), \\ L(Y_2(\mathbf{x})) - \frac{2}{\tau^2} [2Y_2(\mathbf{x}) - 9Y_1(\mathbf{x})] &= \frac{14}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}) + \frac{2}{\tau} z^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \end{aligned} \quad (56)$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = Y_2(\mathbf{x}), \quad z^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\tau} [5Y_2(\mathbf{x}) - 9Y_1(\mathbf{x}) + 4y^n(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G. \quad (57)$$

Следовательно, реализация двустадийного метода Радо ПА по-прежнему на каждом шаге по времени сталкивается с необходимостью решения граничной задачи для системы двух связанных уравнений (56) и подстановкой результата в равенства (57).

Таким образом, при использовании обоих двустадийных методов Радо, как и в случае двустадийного метода Лобатто ПС, необходимо проинтегрировать граничную задачу для системы двух связанных уравнений (54) или (56) на каждом шаге по времени. Значит, вычислительные затраты, связанные с обращением операторов в уравнениях (52), (54), (56), в этих методах примерно одинаковы, но двустадийные методы Радо (см. (54)–(57)) имеют по τ на порядок большую по сравнению с двустадийным методом Лобатто ПС точность (см. (52), (53)), а также свойство асимптотической спектральной устойчивости.

Для построения схемы четвертого порядка по τ можно воспользоваться, например, трехстадийным методом Лобатто ПШВ [15, 20]:

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [L(Y_1(\mathbf{x})) - L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_1(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [Z_1(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x})], \\ Z_2(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [L(Y_1(\mathbf{x})) + 2L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_2(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [Z_1(\mathbf{x}) + 2Z_2(\mathbf{x})], \\ Z_3(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [L(Y_1(\mathbf{x})) + 5L(Y_2(\mathbf{x}))], & Y_3(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [Z_1(\mathbf{x}) + 5Z_2(\mathbf{x})], \\ z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [L(Y_1(\mathbf{x})) + 4L(Y_2(\mathbf{x})) + L(Y_3(\mathbf{x}))], & y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{6} [Z_1(\mathbf{x}) + 4Z_2(\mathbf{x}) + Z_3(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

откуда по формулам (38)–(42) найдем

$$L(Y_1(\mathbf{x})) - \frac{12}{\tau^2} [Y_1(\mathbf{x}) + Y_2(\mathbf{x})] = -\frac{24}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}) - \frac{6}{\tau} z^n(\mathbf{x}), \quad L(Y_2(\mathbf{x})) + \frac{12}{\tau^2} Y_1(\mathbf{x}) = \frac{12}{\tau^2} y^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (58)$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + 2[Y_2(\mathbf{x}) - Y_1(\mathbf{x})], \quad z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \frac{12}{\tau} [y^n(\mathbf{x}) - Y_1(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G. \quad (59)$$

Опять-таки, реализация трехстадийного метода Лобатто ПШВ сводится на каждом шаге по времени также к решению граничной задачи для двух связанных дифференциальных уравнений (58) и подстановке результата в равенства (59). И вычислительные затраты, связанные с решением системы (58), примерно такие же, как у методов (52)–(57), но по сравнению с ними трехстадийный метод Лобатто ПШВ демонстрирует более высокую точность по τ и не обладает свойством асимптотической устойчивости (для него выполняется тождество (29)), то есть свойством ложного затухания.

Равенства, аналогичные (58), (59), фигурируют и при использовании двустадийного метода Гаусса–Лежандра и трехстадийного метода Лобатто ПША (формула Симпсона [15]), имеющих также четвертый порядок точности по τ . Свойства асимптотической устойчивости у них отсутствуют.

Дальнейшее увеличение точности по τ , или обеспечение асимптотической устойчивости применяемого метода, приводит к необходимости брать на вооружение многостадийные обобщенные МРК, при реализации которых на каждом шаге по времени требуется интегрирование граничных задач для систем, аналогичных (58), но состоящих уже из трех и более связанных между собой дифференциальных уравнений (см. (41)); соответствующие соотношения для конкретных обобщенных МРК здесь не приводятся).

Последнее обстоятельство резко усложняет практическое осуществление высокоточных обобщенных МРК применительно к численному решению уравнения (1) или системы (8). Исключение при этом составляют диагонально неявные обобщенные МРК. Так, для двустадийного диагонального метода (метода Нёрсетта) получим

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \tau\gamma L(Y_1(\mathbf{x})), & Y_1(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \tau\gamma Z_1(\mathbf{x}), \\ Z_2(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \tau(1-2\gamma)L(Y_1(\mathbf{x})) + \tau\gamma L(Y_2(\mathbf{x})), & Y_2(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \tau(1-2\gamma)Z_1(\mathbf{x}) + \tau\gamma Z_2(\mathbf{x}), \\ z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2}[L(Y_1(\mathbf{x})) + L(Y_2(\mathbf{x}))], & y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2}[Z_1(\mathbf{x}) + Z_2(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

откуда с учетом формул (38)–(42) следует

$$L(Y_1(\mathbf{x})) - \frac{1}{\tau^2\gamma^2} Y_1(\mathbf{x}) = -P_1^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (60)$$

$$L(Y_2(\mathbf{x})) - \frac{1}{\tau^2\gamma^2} Y_2(\mathbf{x}) = -P_2^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (61)$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) - \frac{1-3\gamma}{2\gamma^2} [Y_1(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})] + \frac{1}{2\gamma} [Y_2(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})], \quad (62)$$

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\tau\gamma^2} [Y_1(\mathbf{x}) + Y_2(\mathbf{x}) - \tau^2\gamma^2 P_1^{n+1}(\mathbf{x}) - \tau^2\gamma^2 P_2^{n+1}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G,$$

где

$$P_1^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau^2\gamma^2} y^n(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tau\gamma} z^n(\mathbf{x}); \quad P_2^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{2(1-2\gamma)}{\tau^2\gamma^3} Y_1(\mathbf{x}) - \frac{1-3\gamma}{\tau\gamma^2} P_1^{n+1}(\mathbf{x}) - \frac{1-2\gamma}{\tau^2\gamma^3} y^n(\mathbf{x}); \quad (63)$$

γ — такая постоянная, что при $\gamma = 0,5 + \sqrt{3}/6$ точность будет иметь третий порядок по τ , при остальных значениях — второй [15].

Следовательно, при использовании метода Нёрсетта необходимо последовательно решать соответствующую граничную задачу для двух дифференциальных уравнений (60), (61) на каждом шаге по времени. После решения граничной задачи для уравнения (60) по второй формуле (63) определяется правая часть уравнения (61), а после интегрирования уравнения (61) по формулам (62) вычисляется приближенное решение уравнения (1) в момент времени t_{n+1} .

Дифференциальные уравнения (60), (61) формально совпадают с уравнением (50), поэтому останавливаться на их обсуждении не будем.

Таким образом, на каждом шаге по времени вычислительные затраты при реализации метода Нёрсетта примерно вдвое больше, чем для метода средней точки (см. (50), (51)). Если же шаг по времени в методе Нёрсетта взять вдвое большим, чем в методе средней точки, то вычислительные затраты в обоих случаях будут примерно одинаковыми, однако при $\gamma = 0,5 + \sqrt{3}/6$ метод Нёрсетта демонстрирует на порядок большую точность по τ и обладает свойством асимптотической спектральной устойчивости.

Согласно трехстадийному диагонально неявному методу (методу Барриджа) из системы (8) получим уравнения [15, 20]:

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \tau\gamma L(Y_1(\mathbf{x})), & Y_1(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \tau\gamma Z_1(\mathbf{x}), \\ Z_2(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau(1-2\gamma)}{2} L(Y_1(\mathbf{x})) + \tau\gamma L(Y_2(\mathbf{x})), \\ Y_2(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau(1-2\gamma)}{2} Z_1(\mathbf{x}) + \tau\gamma Z_2(\mathbf{x}), \\ Z_3(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + 2\tau\gamma L(Y_1(\mathbf{x})) + \tau(1-4\gamma) L(Y_2(\mathbf{x})) + \tau\gamma L(Y_3(\mathbf{x})), \\ Y_3(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + 2\tau\gamma Z_1(\mathbf{x}) + \tau(1-4\gamma) Z_2(\mathbf{x}) + \tau\gamma Z_3(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau\beta}{2} L(Y_1(\mathbf{x})) + \tau(1-\beta) L(Y_2(\mathbf{x})) + \frac{\tau\beta}{2} L(Y_3(\mathbf{x})), \\ y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) + \frac{\tau\beta}{2} Z_1(\mathbf{x}) + \tau(1-\beta) Z_2(\mathbf{x}) + \frac{\tau\beta}{2} Z_3(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

откуда по формулам (38)–(42) найдем

$$L(Y_i(\mathbf{x})) - \frac{1}{\tau^2\gamma^2} Y_i(\mathbf{x}) = -P_i^{n+1}(\mathbf{x}) \quad (i=1, 2, 3), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (64)$$

$$\begin{aligned} y^{n+1}(\mathbf{x}) &= y^n(\mathbf{x}) - \frac{\beta}{2\gamma} [Y_1(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})] + \\ &+ \frac{2\gamma(1+\beta) - \beta}{2\gamma} \left\{ Y_2(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x}) - \frac{1-2\gamma}{2\gamma^2} [Y_1(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})] \right\} + \frac{\beta}{2\gamma} [Y_3(\mathbf{x}) - y^n(\mathbf{x})], \\ z^{n+1}(\mathbf{x}) &= z^n(\mathbf{x}) + \frac{\beta}{2\tau\gamma^2} [Y_1(\mathbf{x}) - \tau^2\gamma^2 P_1^{n+1}(\mathbf{x})] + \\ &+ \frac{1-\beta}{\tau\gamma^2} [Y_2(\mathbf{x}) - \tau^2\gamma^2 P_2^{n+1}(\mathbf{x})] + \frac{\beta}{2\tau\gamma^2} [Y_3(\mathbf{x}) - \tau^2\gamma^2 P_3^{n+1}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} P_1^{n+1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\tau^2\gamma^2} y^n(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tau\gamma} z^n(\mathbf{x}), \\ P_2^{n+1}(\mathbf{x}) &= \frac{1-2\gamma}{\tau^2\gamma^3} Y_1(\mathbf{x}) - \frac{1-4\gamma}{2\gamma} P_1^{n+1}(\mathbf{x}) - \frac{1-2\gamma}{2\tau^2\gamma^3} y^n(\mathbf{x}), \\ P_3^{n+1}(\mathbf{x}) &= -P_1^{n+1}(\mathbf{x}) - \frac{1-6\gamma}{2\tau^2\gamma^4} Y_1(\mathbf{x}) - \frac{1-4\gamma}{\gamma} P_2^{n+1}(\mathbf{x}) + \frac{2(1-4\gamma)}{2\tau^2\gamma^3} Y_2(\mathbf{x}) + \frac{(1-6\gamma)(1-2\gamma)}{2\tau^2\gamma^4} y^n(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (66)$$

здесь $\beta = 1/(12(0,5 - \gamma)^2)$, а γ — по-прежнему постоянная; при

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{18} \quad (67)$$

метод позволяет достичь четвертого порядка точности по τ , а при других γ — третьего [15].

Следовательно, при использовании метода Барриджа необходимо на каждом шаге по времени последовательно решить соответствующую граничную задачу для трех дифференциальных уравнений (64). После решения граничной задачи для первого ($i=1$) уравнения (64) по второй формуле (66) определяется правая часть для второго ($i=2$) уравнения (64). Если граничная задача для этого уравнения проинтегрирована, то по третьей формуле (66) вычисляется правая часть для третьего ($i=3$) уравнения (64), после интегрирования которого по формулам (65) можно установить решение системы (8) в момент времени t_{n+1} .

Дифференциальные уравнения (64) формально совпадают с уравнением (50), (60), (61), поэтому не будем останавливаться на их обсуждении.

Таким образом, вычислительные затраты на каждом шаге по времени при реализации метода Барриджа примерно втрое больше, чем для метода средней точки (см. (50), (51)). Если же шаг по времени в случае метода Барриджа взять втрое большим, чем в методе средней точки, то вычислительные затраты в обоих случаях будут примерно одинаковыми, однако при условии (67) метод Барриджа имеет на два порядка большую точность по τ и обладает свойством асимптотической спектральной устойчивости.

5. Методы Ньюмарка

В расчетной практике для интегрирования по времени уравнений типа (1) широкое распространение нашел метод Ньюмарка [12, 13], идея которого заключается в том, что на интервале времени $t \in [t_n, t_{n+1}]$ вводится некоторая аппроксимация функции $\ddot{y}(t, \mathbf{x}) = \partial^2 y / \partial t^2$:

$$\ddot{y}(t, \mathbf{x}) = f(\ddot{y}^n(\mathbf{x}), \ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x}); t), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \mathbf{x} \in G, \quad (68)$$

где f — аппроксимирующая функция. Формальным интегрированием соотношения (68) на этом отрезке получим

$$z(t, \mathbf{x}) = \dot{y}(t, \mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \int_{t_n}^t f(\ddot{y}^n(\mathbf{x}), \ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x}); \zeta) d\zeta, \tag{69}$$

$$y(t, \mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + z^n(\mathbf{x})(t - t_n) + \int_{t_n}^t \int_{t_n}^{\xi} f(\ddot{y}^n(\mathbf{x}), \ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x}); \zeta) d\zeta d\xi, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \mathbf{x} \in G.$$

Один из вариантов метода Ньюмарка, имеющий второй порядок точности по τ , найдем, если в (68) функцию f выберем исходя из правила средней точки, то есть

$$f(\ddot{y}^n(\mathbf{x}), \ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x}); t) = \frac{1}{2}(\ddot{y}^n(\mathbf{x}) + \ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x})), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \mathbf{x} \in G. \tag{70}$$

Подставив (70) в (69) и вычислив интегралы при $t = t_{n+1}$ с учетом (7) и равенства $\ddot{y}^n(\mathbf{x}) = L(y^n(\mathbf{x}))$, которое является другой формой записи уравнения (1), после элементарных преобразований получим равенства (47), (48).

Таким образом, вариант метода Ньюмарка, в котором аппроксимирующая функция f задается в виде (70) по сути есть один из обобщенных МРК, а именно одностадийный метод Гаусса–Лежандра (метод средней точки). Как показано в предыдущем разделе, этот метод спектрально устойчив применительно к численному решению уравнения (1), но не обладает свойством асимптотической устойчивости (так как $R(\eta) = R_m(\eta) \equiv 1$, см. (37)).

В общем случае для создания семейства методов Ньюмарка выражения (68)–(70) несколько модифицируют, и в действительности используются следующие соотношения [12, 13]:

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \tau[(1 - \gamma)\ddot{y}^n(\mathbf{x}) + \gamma\ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x})], \tag{71}$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + \tau z^n(\mathbf{x}) + \tau^2[(0,5 - \beta)\ddot{y}^n(\mathbf{x}) + \beta\ddot{y}^{n+1}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in G,$$

где β, γ — параметры, выбирать которые рекомендуется с учетом неравенств:

$$\gamma \geq 0,5, \quad \beta \geq 0,25(\gamma + 0,5)^2; \tag{72}$$

при $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$ из (71) последуют равенства, соответствующие аппроксимации (70), то есть рассмотренному выше методу средней точки, для которого выполняется тождество (29); при $\gamma = 1/2, \beta = 1/6$ из (69) получаются равенства (71) при условии, если в (69) подставить зависимость (68), аппроксимированную линейной функцией f по переменной t .

При $\gamma > 1/2$ метод Ньюмарка характеризуется искусственным демпфированием, а при $\gamma < 1/2$ возможны возрастающие осцилляции [12, 13]. В связи с этим проанализируем спектральную устойчивость схемы (71). Для этого перепишем (71) с учетом равенства (1):

$$z^{n+1}(\mathbf{x}) = z^n(\mathbf{x}) + \tau[(1 - \gamma)L(y^n(\mathbf{x})) + \gamma L(y^{n+1}(\mathbf{x}))], \tag{73}$$

$$y^{n+1}(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) + \tau z^n(\mathbf{x}) + \tau^2[(0,5 - \beta)L(y^n(\mathbf{x})) + \beta L(y^{n+1}(\mathbf{x}))], \quad \mathbf{x} \in G.$$

Согласно изложенному в разделе 3 алгоритму исследования спектральной устойчивости подставим в (73) выражения для функций (12), тогда с учетом (2) получим следующие соотношения для коэффициентов в (12):

$$b^{n+1} = b^n - \tau\lambda^2[(1 - \gamma)a^n + \gamma a^{n+1}], \quad a^{n+1} = a^n + \tau b^n - \tau^2\lambda^2[(0,5 - \beta)a^n + \beta a^{n+1}]. \tag{74}$$

Используя обозначения (18), (24), равенства (74) можно записать в форме (25), где

$$A_a(\eta) = \frac{1 - (0,5 - \beta)\eta^2}{1 + \beta\eta^2}, \quad A_b(\eta) = \frac{\eta}{1 + \beta\eta^2}, \tag{75}$$

$$B_a(\eta) = -\eta(1 - \gamma + \gamma A_a(\eta)), \quad B_b(\eta) = 1 - \eta A_b(\eta), \quad \eta > 0.$$

Далее, на основании соотношений (31)–(37) можно проверить зависимость $R(\eta, \psi)$. Оказалось, что только при $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$, когда метод Ньюмарка совпадает с методом средней точки, справедливо соотношение: $R(\eta) = R_m(\eta) \equiv 1$. При других же значениях β и γ поведение функций $R_1(\eta)$, $R_2(\eta)$ (см. (37)) противоположно, а именно, при $\eta > 0$ функция $R_1(\eta)$ монотонно возрастает от единицы до бесконечности, а функция $R_2(\eta)$ монотонно убывает от единицы до нуля (причем $R_1(0) = R_2(0) = 1$). Следовательно, в случае фиксированного η (см. (18)) при одних значениях ψ функция устойчивости удовлетворяет неравенству $R > 1$, а при других ψ ее значения попадают в диапазон (30). Поэтому нельзя однозначно сказать, устойчивы ли спектрально методы Ньюмарка, если параметры в (71) отличны от $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$. Для устранения неясности ответа определим значения углов ψ (см. (32)), при которых $R(\eta, \psi) = 1$. Соответствующее уравнение следует из (33):

$$(A_a(\eta)\cos\psi + A_b(\eta)\sin\psi)^2 + (B_a(\eta)\cos\psi + B_b(\eta)\sin\psi)^2 = 1,$$

отсюда после деления на $\cos^2\psi$ найдем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\psi$:

$$(A_b^2 + B_b^2 - 1)\operatorname{tg}^2\psi + 2(A_a A_b + B_a B_b)\operatorname{tg}\psi + A_a^2 + B_a^2 - 1 = 0.$$

Его решение

$$\bar{\psi}_i(\eta) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-A_a A_b - B_a B_b - (-1)^i \sqrt{\bar{D}}}{A_b^2 + B_b^2 - 1}\right) \quad (i = 1, 2), \quad (76)$$

$$\bar{D} = (A_a A_b + B_a B_b)^2 - (A_a^2 + B_a^2 - 1)(A_b^2 + B_b^2 - 1)$$

определяет зависимости $\bar{\psi}_i(\eta)$, при которых $R(\eta, \bar{\psi}_i(\eta)) = 1$, $\eta > 0$.

На рисунке 1 изображены подобласти характерных значений функции устойчивости $R(\eta, \psi)$, найденные на основе соотношений (36), (37), (75), (76) для некоторых вариантов метода Ньюмарка. Согласно (33) функция R периодична по ψ с периодом π , поэтому и характерные зоны, приведенные на рисунке 1, повторяются по ψ с тем же периодом.

Подобласти рисунка 1а соответствуют случаю, когда функция f в (68), (69) аппроксимируется линейно по t . На рисунке 1б изображены подобласти характерных значений функции R , когда в (72) строго выполняются неравенства (соответствующий метод Ньюмарка обладает искусственным демпфированием [12, 13]). Рисунок 1в демонстрирует подобласти при нарушении первого неравенства (72), которое может привести к возникновению нарастающих осцилляций [12, 13].

Как видно из рисунка 1, во всех рассмотренных случаях при условии $\eta > 0$ возможно попадание значений угла ψ как в подобласть, где $0 < R < 1$, так и в подобласть, где $R > 1$. Если вероятность попадания ψ при фиксированном η (то есть, в соответствии с (18), при фиксированных τ и λ) в подобласть $0 < R < 1$ больше, чем вероятность попадания в подобласть $R > 1$, то соответствующий метод Ньюмарка, скорее всего, будет приводить к устойчивым результатам расчетов. Также по рисунку 1

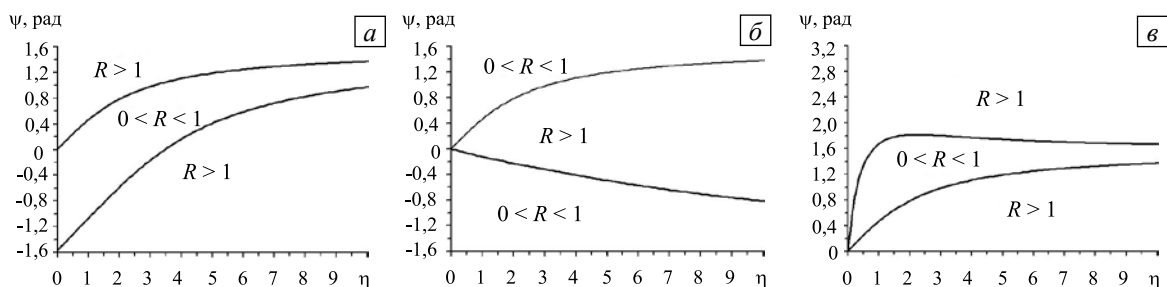


Рис. 1. Подобласти характерных значений функции устойчивости некоторых вариантов метода Ньюмарка: $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$ (а); $\gamma = 0,6$, $\beta = 0,3(0,5 + \gamma)^2$ (б); $\gamma = 0,4$, $\beta = 1/6$ (в)

можно заключить, что при всех значениях параметров γ и β (кроме $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$, когда $R \equiv 1$) существуют такие значения η , при которых ширина интервала по ψ , где $R > 1$, больше ширины интервала, в котором $0 < R < 1$.

6. Обсуждение результатов расчетов

Для апробации полученных выше схем интегрирования начально-краевой задачи для уравнения (1) обратимся к задаче колебаний струны (оператор $L(\bullet) = \partial^2/\partial x_1^2$) единичной длины, закрепленной в точках $x_1 = \pm 0,5$. Начальные условия в момент времени $t_0 = 0$ зададим в виде:

$$z_0(x_1) = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0, \quad y_0(x_1) = \begin{cases} 1+2x_1, & -0,5 \leq x_1 \leq 0, \\ 1-2x_1, & 0 < x_1 \leq 0,5, \end{cases} \quad x_1 \in [-0,5, 0,5]. \quad (77)$$

Начальные условия (77) соответствуют случаю, когда до момента времени $t_0 = 0$ струна находилась в покое, будучи нагруженной некоторой сосредоточенной силой в точке $x_1 = 0$. При $t = t_0$ сила мгновенно убирается, и струна начинает колебаться (начально-краевая задача (1), (77) описывает также свободные продольные колебания однородного стержня постоянного поперечного сечения, жестко закрепленного на концах и до начала движения находящегося в равновесии под действием продольной сосредоточенной силы, приложенной в центральном сечении; в момент времени $t = t_0$ сила мгновенно снимается). Согласно методу разделения переменных [3] аналитическое решение начально-краевой задачи (1), (77) при граничных условиях $y(t, \pm 0,5) = 0$ имеет вид:

$$y(t, x_1) = \sum_{m=1}^M \frac{8}{\pi^2 (2m-1)^2} \cos(\lambda_m t) W_m(x_1), \quad t \geq 0, \quad |x_1| \leq 0,5, \quad M \rightarrow \infty, \quad (78)$$

где

$$\lambda_m = \pi(2m-1), \quad W_m(x_1) = \cos(\lambda_m x_1), \quad |x_1| \leq 0,5 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (79)$$

Исходя из (12), (24)–(26), (74), (75) с учетом (79), в момент времени t_n все исследованные выше методы дают численно-аналитическое решение рассматриваемой начально-краевой задачи в виде:

$$y^n(x_1) = \sum_{m=1}^M a_{(m)}^n W_m(x_1), \quad z^n(x_1) = \sum_{m=1}^M b_{(m)}^n W_m(x_1), \quad |x_1| \leq 0,5 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (80)$$

При переходе к следующему моменту времени t_{n+1} коэффициенты $a_{(m)}^{n+1}$, $b_{(m)}^{n+1}$ в разложении (80) при известных величинах $a_{(m)}^n$, $b_{(m)}^n$ вычисляются по формулам (25) с учетом (24), (26), (74), (75). В начальный момент времени $t = t_0 = 0$, на основании соотношений (77), (80) коэффициенты составляют:

$$a_{(m)}^0 = \frac{8}{\pi^2 (2m-1)^2}, \quad b_{(m)}^0 = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M). \quad (81)$$

В расчетах примем $M = 30$. При этом графики аналитического решения (78) при $t = 0$ и численно-аналитического решения (80) при $n = 0$ (то есть при коэффициентах (81)) визуально не будут отличаться от графика точного начального условия (77), имеющего вид ломаной линии.

Так как аналитическое решение (78) является периодическим по t с периодом $T = 2$ (равным периоду колебаний низшей гармоники при $m = 1$), то внутри каждого периода колебаний целесообразно ввести локальное время t_* ($0 \leq t_* < T = 2$). Тогда глобальное t и локальное t_* времена могут быть связаны между собой соотношением

$$t = t_* + TN = t_* + 2N, \quad 0 \leq t_* < 2 \quad (N = 0, 1, 2, \dots), \quad (82)$$

где N — количество периодов колебаний низшей гармоники, предшествующих рассматриваемому периоду.

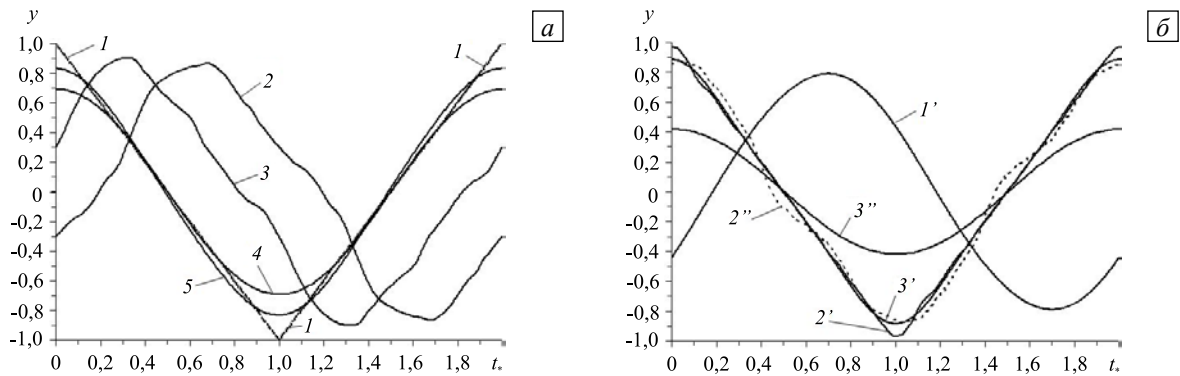


Рис. 2. Численно-аналитические решения задачи колебаний струны, полученные различными методами: методами Ньюмарка и диагонально неявными МРК (а); двустадийными методами Лобатто IIIA, Радо IA и трехстадийным методом Лобатто IIIB (б)

На рисунке 2 приведены решения: аналитическое (ломаная линия 1 на Рис. 2а) и численно-аналитические (остальные кривые), начально-краевой задачи (1), (77) в точке $x_1 = 0$ при больших значениях времени t ($N = 5 \cdot 10^4$). По оси абсцисс отложено локальное время t_* (см. (82)). При этом на рисунке 2а изображены кривые, рассчитанные методами, при реализации которых требуется на каждом шаге по времени интегрировать граничную задачу только для одного уравнения (например, (50)), а на рисунке 2б — кривые, расчет которых требует интегрирования двух связанных уравнений (например, (52)).

Кривая 2 на рисунке 2а получена одностадийным методом Гаусса–Лежандра (методом средней точки), имеющем второй порядок точности по τ . При этом шаг по времени τ выбирался равным $1/12$ периода колебаний высшей гармоники в (78), то есть $\tau_* = 2\pi/(12\lambda_M)$, $M = 30$. Как уже отмечалось выше, эта кривая также соответствует численно-аналитическим решениям, установленным двустадийными методами Лобатто IIIA (методом трапеций) и Лобатто IIIB, а также методом Ньюмарка при $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ (см. (71)–(73)).

Кривая 3 на рисунке 2а определена методом Ньюмарка, но при других параметрах: $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$. Согласно выбору значения τ_* , из формул (18) следует, что $\eta_m = \tau_* \lambda_m < 0,53$ ($m = 1, 2, \dots, M$). По рисунку 1а видно, что при таких значениях η вероятность попадания значений ψ (см. (32)) в подобласти, где $R > 1$ и где $0 < R < 1$, примерно одинакова. По-видимому, равновероятное попадание ψ в обе эти подобласти приводит к автокорректировке численного решения, и в целом оно оказывается устойчивым в рассматриваемой задаче. При выборе же более крупного шага по времени $\tau = T/50 = 0,04$ высшей гармонике отвечает $\eta_M = \tau \lambda_M = 7,41$, и вероятность попадания соответствующего значения ψ в подобласть $R > 1$ много больше (см. Рис. 1а) вероятности попадания в подобласть $0 < R < 1$. Это должно приводить к неустойчивости вычислительного процесса, что и подтвердил проведенный дополнительный расчет.

Расчет методом Ньюмарка при $\gamma = 0,6$, $\beta = 0,3(0,5 + \gamma)^2$ показывает (см. Рис. 1б), что при указанных значениях η_m вероятность попадания ψ в подобласть, где $0 < R < 1$, много больше вероятности попадания в подобласть $R > 1$, поэтому в целом расчет оказывается устойчивым. Однако при этих значениях γ и β искусственно введенная вязкость [12, 13] настолько велика, что к рассматриваемым моментам времени приближенное решение полностью затухает и не отличается от горизонтальной линии $y = 0$ (на Рис. 2а эта прямая не изображена). Наоборот, при $\gamma = 0,4$, $\beta = 1/6$ (Рис. 1в) при указанных значениях η_m вероятность попадания ψ в подобласть, где $R > 1$ много больше вероятности попадания в подобласть $0 < R < 1$, поэтому соответствующий метод Ньюмарка применительно к рассматриваемой начально-краевой задаче дает неустойчивые результаты (расчет по этому методу приводит к неограниченно возрастающим осцилляциям).

Кривая 4 на рисунке 2а рассчитана двустадийным диагональным методом Нёрсетта (характеризуется третьим порядком точности) с шагом по времени $\tau = 2\tau_*$, а линия 5 — трехстадийным диагональным методом Барриджа (с четвертым порядком точности) с шагом $\tau = 3\tau_*$. При этом, как уже отмечалось в разделе 4, вычислительные затраты на реализацию этих методов примерно такие же, как и при использовании метода средней точки (кривая 2).

Кривая $1'$ на рисунке 2б получена двустадийным методом Лобатто ПС (имеет второй порядок точности по τ), линии $2', 2''$ — трехстадийным методом Лобатто ПШВ (обладает четвертым порядком точности), а кривые $3', 3''$ — двустадийным методом Радо IA (с третьим порядком точности). Причем кривые $1', 2', 3'$ рассчитаны при шаге по времени $\tau = \tau_*$, а $2'', 3''$ — при $\tau = 6\tau_*$. Сравнение всех кривых на рисунке 2 с пунктирной ломаной 1 рисунка 2а показывает, что из всех рассмотренных методов лучше всех с аналитическим решением согласуется кривая $2'$ на рисунке 2б, так как соответствующий ей метод решения имеет наивысший порядок точности. Однако для ее построения требуется интегрирование граничной задачи для системы двух уравнений (58) на каждом шаге по времени, что гораздо сложнее интегрирования одного уравнения (например, (50)). Чтобы соразмерить вычислительные затраты, необходимые, например, для реализации метода средней точки (кривая 2 на Рис. 2а), с затратами на реализацию двустадийного метода Лобатто ПС, или трехстадийного метода Лобатто ПШВ, или двустадийного метода Радо IA (кривые $1'-3'$ на Рис. 2б), шаг по времени для них увеличен в 6 раз (см. кривые $2'', 3''$ на Рис. 2б). При этом решение, установленное двустадийным методом Лобатто ПС, полностью затухает и визуально не отличается от горизонтальной прямой $y = 0$ (на Рис. 2б эта линия не изображена), а решение, найденное двустадийным методом Радо IA, существенно отличается от аналитического (см. кривую $3''$ на Рис. 2б). По-прежнему удовлетворительно согласуется с аналитическим решением лишь решение (пунктирная линия $2''$), рассчитанное трехстадийным методом Лобатто ПШВ.

Кривые 2, 3 на рисунке 2а и кривая $1'$ на рисунке 2б сдвинуты вправо относительно точного решения (ломаная 1 на Рис. 2а). Это объясняется наличием фазовых погрешностей, присущих соответствующим численным схемам и вызванных дисперсионными свойствами этих схем. Для методов Ньюмарка (см. кривые 2, 3 на Рис. 2а) данный факт отмечен в [14], а для обобщенных МРК применительно к уравнению переноса — в [21] (см. там Замечание 1). Так как использование метода Даламбера (метода бегущих волн) для интегрирования рассматриваемого одномерного волнового уравнения приводит к представлению решения в виде суммы двух функций, описывающих прямую и обратную бегущие волны, каждая из которых удовлетворяет соответствующему уравнению переноса, то фазовая погрешность присуща и обобщенным МРК, обсуждаемым здесь (см. кривую $1'$ на Рис. 2б). Этим же объясняется и наличие «биений» на кривых 2, 3 рисунка 2а и на кривых $2', 2''$ рисунка 2б.

7. Заключение

Проведенные исследования показывают, что все явные обобщенные МРК спектрально неустойчивы при численном интегрировании начально-краевой задачи для волнового уравнения. Неявные же обобщенные МРК спектрально устойчивы, причем методы, основанные на формулах Радо, Лобатто ПС, Нёрсетта и Барриджа, кроме того, характеризуются ложным затуханием (асимптотической устойчивостью), а обобщенные методы Гаусса–Лежандра, Лобатто ША и ПШВ этим свойством не обладают. Выполненный сравнительный анализ приближенных численных решений разных порядков точности, найденных разными вариантами метода Ньюмарка и различными обобщенными МРК, с аналитическим решением начально-краевой задачи для волнового уравнения показывает, что при начальных условия с разрывными производными (качественно подобные условия возникают, например, в волновых процессах стержневых систем в случаях их динамического продольного нагружения ударного типа [2]) при больших значениях времени целесообразно прибегать к трехстадийному диагонально неявному методу Барриджа четвертого порядка точности; сложность его реализации примерно такая же, как у методов Ньюмарка, а точность на два порядка выше. Все полученные результаты полностью переносятся на начально-краевые задачи для уравнений параболического типа, содержащих вторые производные по времени и описывающих динамическое поведение изгибаемых балок или пластин. При этом для практического осуществления методов Ньюмарка, Нёрсетта и Барриджа необходимо в каждый момент времени решить граничную задачу для указанных тонкостенных элементов конструкций, формально совпадающую со статической задачей изгиба балок или пластин, покоящихся на упругом винклеровском основании.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102-а).

Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 424 с.
2. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Шаговый метод обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге–Кутты // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – № 75-3. – С. 178-184.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
4. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1997. – 195 с.

5. Фирсов Д.К. Устойчивость явных схем решения уравнений Максвелла методом контрольных объемов высокого порядка точности // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15, № 2. – С. 286-303.
6. Ведерникова Э.Ю., Корнев А.А. Структура устойчивого многообразия полностью неявных схем // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 44-49.
7. Баженов В.Г., Игоничева Е.В. Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1991. – 132 с.
8. Баженов В.Г., Павлѐнкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427-434. DOI
9. De Vogelaere R. A method for the numerical integration of differential equations of second order without explicit first derivatives // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1955. – Vol. 54, no. 3. – P. 119-125. DOI
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 2. – 620 с.
11. Левин В.А., Надкряничный Л.В. Численное исследование генерации волн на поверхности при погружении твердого тела в жидкость // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 65-73. DOI
12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
13. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 344 с.
14. Ву Р.В.Г., Уитмер Е.А. Устойчивость методов Де Вожеа численного интегрирования по времени // Ракетная техника и космонавтика. – 1973. – № 10. – С. 97-100. (English version DOI).
15. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
16. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Method. Appl. M. – 2012. – Vol. 245-246. – P. 90-101. DOI
17. Липанов А.М., Карсканов С.А. Применение схем высокого порядка аппроксимации при моделировании процессов торможения сверхзвуковых течений в прямоугольных каналах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 292-299. DOI
18. Романьков А.С., Роменский Е.И. Метод Рунге–Кутты/WENO для расчета уравнений волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде // СибЖВМ. – 2014. – Т. 17, № 3. – С. 259-271.
19. Окуонгае Р.И., Ихиле М.Н.О. $L(\alpha)$ -устойчивые неявные методы Рунге–Кутты переменного порядка со второй производной // СибЖВМ. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 373-387.
20. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Обобщение методов Рунге–Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики // СибЖВМ. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 57-76.
21. Янковский А.П. Исследование спектральной устойчивости обобщенных методов Рунге–Кутты применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 279-294. DOI
22. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
23. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
24. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
25. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.

References

1. Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye shemy gazovoi dinamiki* [Difference scheme of gas dynamics]. Moscow: URSS, 2009. 424 p.
2. Igumnov L.A., Rataushko Ya.Yu. Time-step method of Laplace transformation inversion based on the Runge–Kutta scheme nodes. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, no. 75-3. pp. 178-184.
3. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*. Dover Publications, 2011. 800 p.
4. Novikov E.A. *Yavnye metody dlya zhestkikh sistem* [Explicit methods for stiff systems]. Novosibirsk: Nauka, 1997. 195 p.
5. Firsov D.K. Stability of explicit schemes for solving Maxwell's equations by high-order finite volume methods. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Numerical Methods and Programming*, 2014, vol. 15, no. 2, pp. 286-303.
6. Vedernikova E.Yu., Kornev A.A. The structure of a stable manifold for fully implicit schemes. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Numerical Methods and Programming*, 2013, vol. 14, no. 1, pp. 44-49.
7. Bazhenov V.G., Igonicheva E.V. *Nelinejnye protsessy udarnogo vypuchivaniya uprugikh elementov konstruktij v vide ortotropnykh obolochek vrashcheniya* [Nonlinear processes of impact buckling of elastic structural elements in the form of orthotropic shells of revolution]. Nizhni Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 1991. 132 p.
8. Bazhenov V.G., Pavlyonkova E.V., Artemyeva A.A. Numerical solution of generalized dynamic axisymmetric problems for elastoplastic shells of revolution under large deformations. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 427-434. DOI
9. De Vogelaere R. A method for the numerical integration of differential equations of second order without explicit first derivatives. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1955, vol. 54, no. 3, pp. 119-125. DOI
10. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenij* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz, 1959, vol. 2. 620 p.
11. Levin V.A., Nadkrinichny L.V. Numerical investigation of surface wave generation during immersion of a rigid body into a liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 65-73. DOI
12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
13. Kuzmin M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. *Strength, toughness, resistance of structural elements. Theory and practical work. Strength calculations for multilayer composite structural elements*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2012. 344 p.

14. Wu R.W.-H., Witmer E.A. Stability of the De Vogelaere method for timewise numerical integration. *AIAA J.*, 1973, vol. 11, no. 10, pp. 1432-1435. DOI
15. Decker K., Verwer J.G. *Stability of Runge–Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*. North-Holland, Amsterdam, 1984.
16. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method. *Comput. Methods Appl. M.*, 2012, vol. 245-246, pp. 90-101. DOI
17. Lipanov A.M., Karskanov S.A. Application of high-order schemes for modeling the process of braking of supersonic flows in rectangular channels. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 292-299. DOI
18. Romankov A.S., Romenski E.I. The Runge–Kutta/WENO method for solving equations for small-amplitude wave propagation in a saturated porous medium. *Numerical Analysis and Applications*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 259-271.
19. Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O. $L(\alpha)$ -stable variable order implicit second derivative Runge–Kutta methods. *Numerical Analysis and Applications*, 2014, vol. 17, no. 4, pp. 373-387.
20. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Generalization of the Runge–Kutta methods and their application to integration of initial-boundary value problems of mathematical physics. *Numerical Analysis and Applications*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 57-76.
21. Yankovskii A.P. Study of the spectral stability of generalized Runge–Kutta methods applied to numerical integration of the initial-boundary value problem for the transport equation. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 279-294. DOI
22. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka, 1979. 744 p.
23. Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
24. Donnell L.H. *Beams, plates and shells*. New York: McGraw-Hill, 1976.
25. Vlasov V.Z., Leontiev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic foundation]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 492 p.

Поступила в редакцию 13.01.2015; опубликована в электронном виде 30.06.2015