

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.7
УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ДЛЯ ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗРАБОТКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

В.И. Астафьев¹, А.Е. Касаткин²

¹Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация

²Самарский государственный университет, Самара, Российская Федерация

Прогнозирование процесса движения границы водонефтяного контакта имеет большое значение в задачах проектирования разработки нефтяных месторождений методом заводнения: знание характера совместного движения нефти и вытесняющей ее воды в недрах пласта позволяет оптимизировать саму систему его разработки. Простейшим представлением о совместной фильтрации нефти и воды является модель «разноцветных» жидкостей, в которой предполагается, что нефть и вода имеют одинаковые или близкие физические свойства (плотность и вязкость). В настоящей работе рассматривается более сложная модель «поршневого» вытеснения нефти водой, которая учитывает различия в вязкости и плотности обеих жидкостей. Нефтеносный пласт полагается однородным и бесконечным, имеющим фиксированную толщину и постоянные значения коэффициентов пористости и проницаемости. Предполагается, что пласт разрабатывается при помощи периодически повторяющейся в двух направлениях группы из конечного числа добывающих и нагнетательных скважин (двойкопериодического кластера). Фильтрация жидкостей описывается законом Дарси. Жидкости считаются слабо сжимаемыми, а давление в пласте – удовлетворяющим квазистационарному уравнению пьезопроводности. Модель поршневого вытеснения приводит к разрывности касательной компоненты вектора скорости на границе водонефтяного контакта. Использование аппарата теории эллиптических функций совместно с обобщенными интегралами типа Коши позволяет свести задачу нахождения текущей границы водонефтяного контакта к системе сингулярных интегральных уравнений для касательной и нормальной компонент вектора скорости и задаче Коши для интегрирования дифференциального уравнения движения границы водонефтяного контакта. Разработан алгоритм численного решения этой задачи. Выполнен мониторинг процесса движения контактной границы при различных схемах заводнения (линейная рядная, четырехточечная, пятиточечная, семиточечная, девятиточечная и других).

Ключевые слова: математическое моделирование, поршневое вытеснение нефти водой, граница водонефтяного контакта, эллиптические функции Вейерштрасса, сингулярное интегральное уравнение

MODELING AND NUMERICAL CALCULATION OF PISTON-LIKE OIL DISPLACEMENT FOR DOUBLY-PERIODIC SYSTEMS OF FIELD DEVELOPMENT

V.I. Astafiev¹ and A.E. Kasatkin²

¹Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

²Samara State University, Samara, Russian Federation

Prediction of the oil-water boundary movement has great importance to the design problems of oilfield development by waterflooding: knowledge of the nature of the coupled motion between the displaced oil and the displacing water in the reservoir allows us to optimize the system of oil field development. The simplest model of joint oil/water filtering is the model of “multicolored” liquids, which assumes that oil and water have the same or similar physical properties (density and viscosity). In this paper, we consider a more complex model of “piston-like” oil-water displacement, which takes into account differences in the viscosity and density of two fluids. An oil reservoir is assumed to be homogeneous and infinite, of fixed thickness, and with constant values of porosity and permeability coefficients. The reservoir is developed by a group of a finite number of production and injection wells recurrent in two directions (doubly-periodic cluster). Filtration of liquids is described by Darcy's law. It is assumed that liquids are weakly compressible, and the pressure in the reservoir satisfies the quasi-stationary diffusion equation. The model of piston-like displacement leads to the discontinuity in the tangential component of the velocity vector at the boundary of oil-water contact. Use of the theory of elliptic functions in conjunction with the generalized Cauchy integrals reduces the problem of finding the current boundaries of oil-water contact to the system of singular integral equations for the tangential and normal components of the velocity vector and the Cauchy problem for the integration of the differential equations of motion of the oil-water contact boundary. An algorithm for the numerical solution of this problem is developed. The monitoring of oil-water boundary motion for different schemes of waterflooding (linear row, four-point, five-point, seven-point, nine-point, etc.) is carried out.

Key words: mathematical modeling, piston-like displacement of oil by water, oil-water boundary, Weierstrass elliptic functions, singular integral equation

1. Введение

Нефтедобыча представляет собой сложный процесс, требующий самых современных технологий. Существует множество способов извлечения нефти из пласта. Так, под первичными методами подразумеваются те, с помощью применения которых нефть самотеком поступает в ствол скважины под воздействием пластового давления. Среди вторичных методов, или методов улучшения нефтеотдачи (Improved Oil Recovery — IOR), широкое распространение получил метод заводнения. Заводнение — одна из старейших технологий в нефтяном промысле, за многие десятилетия доказавшая свою эффективность на месторождениях различных нефтедобывающих стран [1, 2]. Основная цель заводнения заключается в поддержании пластового давления, неизбежно падающего в процессе первичной разработки залежи. Для восстановления пластового давления в горную породу через специально пробуренные нагнетательные

(или ранее отключенные добывающие) скважины закачивается вытесняющий агент (как правило, вода), в результате чего пластовое давление повышается до необходимого уровня. Заводнение и в наши дни широко распространено в нефтяном промысле. В связи с этим актуальными остаются задачи повышения эффективности данной технологии, в том числе и на стадии ее проектирования. При проектировании весьма важной является оценка потенциальной эффективности заводнения при различных способах взаимного расположения разнопрофильных скважин — одного из ключевых аспектов технологии.

Моделирование процесса заводнения, анализ его качественных и количественных характеристик при различных схемах расстановки скважин — цель настоящего исследования, объект исследования — текущий фронт вытеснения, видоизменяющийся в процессе нагнетания воды в пласт и вытеснения ею нефти. В качестве базовой используется модель поршневого вытеснения нефти водой [3]. Эта модель, в отличие от модели «разноцветных» жидкостей [4], допускает различие в физических свойствах (в величинах плотности и вязкости) вытесняемой и вытесняющей жидкостей. Особенности процесса заводнения для двоякопериодических систем разработки месторождений в рамках модели «разноцветных» жидкостей рассмотрены в работе [5].

Задача продвижения фронта вытеснения при различных физических свойствах нефти и воды имеет более чем полувековую историю. Впервые поставленная в середине XX века М. Маскетом [6], в дальнейшем она вызвала интерес многих исследователей. Можно отметить метод недеформируемых трубок тока, описанный в общем виде И.А. Чарным [7]. В основе идеи автора лежало допущение о совпадении линий тока при фильтрации двух- и одножидкостной систем в некоторой области при неизменных граничных условиях. Иной подход, основанный на теории потенциалов, предложен В.Л. Даниловым [8], где исходная задача мониторинга фронта вытеснения во времени сведена к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению. Метод Данилова был распространен Р.Т. Фазлыевым [9] на случай площадного заводнения; автор построил и численно решил интегро-дифференциальное уравнение для пятиточечной схемы заводнения. В обзорной работе М.Х. Хайруллина [10] рассмотрены работы казанской научной школы в области подземной гидромеханики, в том числе и в области моделирования процессов заводнения.

Настоящая работа обобщает ранее полученные результаты на случай поршневого вытеснения. Согласно модели «разноцветных жидкостей» вектор скорости остается непрерывным на протяжении всего процесса заводнения. В случае же поршневого вытеснения — при совместном течении нефти и воды, указанная непрерывность нарушается: различие физических свойств жидкостей приводит к разрыву касательной компоненты вектора скорости фильтрации при сохранении непрерывности нормальной компоненты и значения давления на фронте вытеснения.

2. Математическая модель продвижения фронта вытеснения

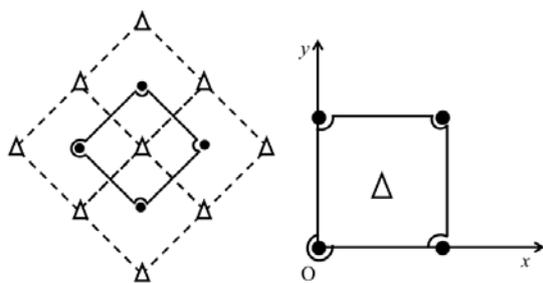


Рис. 1. Графическое представление системы разработки месторождения при пятиточечной обращенной схеме заводнения; границы повторяющихся элементов очерчены пунктиром; добывающие скважины выделены черными точками, нагнетательные – треугольниками

Рассмотрим плоское фильтрационное течение жидкости с вязкостью μ в бесконечном горизонтальном пласте толщиной h , имеющем постоянные величины проницаемости k и пористости m . Моделируемый пласт покроем двоякопериодической системой добывающих и нагнетательных скважин (Рис. 1).

Предполагается, что скважины рассматриваются как вертикальные точечные источники / стоки и являются совершенными по степени и характеру вскрытия [1–3]. Для квазистационарного режима фильтрации функция давления в пласте $p(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению пьезопроводности, а компоненты вектора скорости $V_x(x, y, t)$

и $V_y(x, y, t)$ вычисляются по закону фильтрации Дарси [1, 3]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$V_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Первое уравнение в (1), где χ — коэффициент пьезопроводности, является основным дифференциальным уравнением упругого режима фильтрации жидкости в пласте.

Двоякопериодическую сетку добывающих и нагнетательных скважин можно представить как достаточно большое (в математической модели — бесконечно большое) число повторений конечного числа скважин в двух направлениях. Такие повторения можно описать с помощью двоякопериодической решетки (Рис. 2; z_0 — центр нагнетательной скважины).

Двоякопериодическая решетка определяется двумя неколлинеарными векторами на плоскости (x, y) (двумя комплексными периодами ω_1 и ω_2 — на комплексной плоскости $z = x + iy$). Для простоты будем считать, что вектор ω_1 направлен вдоль оси x , то есть комплексный период ω_1 является вещественным числом. Все множество узлов решетки на комплексной плоскости формируется как $\omega = i\omega_1 + j\omega_2$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), величины λ и φ ($\omega_2/\omega_1 = \lambda \exp(i\varphi)$) характеризуют размеры и форму решетки, а $\Delta = \text{Im}(\bar{\omega}_1\omega_2)$ соответствует площади параллелограмма решетки (здесь и далее надчерком обозначена сопряженная величина).

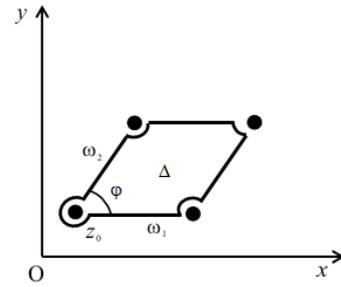


Рис. 2. Двоякопериодическая решетка и ее основные элементы

В работах [11, 12] представлено решение квазистационарной задачи (1) при разработке месторождения двоякопериодической системой только добывающих скважин, размещенных в узлах решетки. Распределение поля давлений и скоростей в этих работах выражено через сигма- и дзета-функции Вейерштрасса и имело вид:

$$p(x, y) = p_w + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left(\text{Re} \left(\ln \sigma(z) + \alpha \frac{z^2}{2} \right) - \beta \frac{|z|^2}{2} - \ln r_w \right), \tag{2}$$

$$V_x(x, y) - iV_y(x, y) = \bar{V}(z, \bar{z}) = -\frac{Q}{2\pi h} (\zeta(z) + \alpha z - \beta \bar{z}),$$

где p_w — давление на контуре добывающей скважины; r_w — радиус скважины; $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$ — сигма- и дзета-функции Вейерштрасса, то есть $\ln \sigma(z) = \ln z + \sum_{i, j=-\infty}^{\infty} \left[\ln \left(\frac{z - \omega}{\omega} \right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right]$; $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{i, j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$; символ «'» после знаков двойной суммы означает отсутствие слагаемого при $i = j = 0$; числовые параметры $\beta = \pi/\Delta$ и $\alpha = (\beta\bar{\omega}_1 - 2\zeta(\omega_1/2))/\omega_1$ обеспечивают двоякую периодичность функций $\zeta(z)$ и $\ln \sigma(z)$; Q — мощность (дебит) добывающей скважины.

В работе [13] решение (2) обобщено на случай двоякопериодической группы (кластера) из n добывающих скважин; распределение поля скоростей записывалось как

$$\bar{V}(z, \bar{z}) = -\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi h} (\zeta(z - z_k) + \alpha(z - z_k) - \beta(\bar{z} - \bar{z}_k)), \tag{3}$$

где z_k — расположение k -й добывающей скважины в параллелограмме периодов, а Q_k — мощность (дебит) этой скважины.

При наличии в параллелограмме периодов как добывающих, так и нагнетательных скважин в рамках модели «разноцветных» жидкостей представление (3) сохраняется. Только весь кластер из n скважин разбивается в этом случае на сумму из n_1 добывающих скважин, для которых мощность скважин Q_k положительна, и n_2 нагнетательных скважин, для которых мощность скважин Q_k отрицательна. В такой постановке задача нахождения поля скоростей и определения текущего положения фронта вытеснения в рамках модели «разноцветных» жидкостей рассмотрена в работе [5].

Как уже было отмечено, при описании вытеснения нефти водой поршневой моделью задача продвижения фронта вытеснения усложняется за счет нарушения непрерывности вектора скорости и преломления линий тока на фронте. Физические различия в вязкости вытесняемой и вытесняющей жидкостей обуславливают разрыв касательной компоненты V_t вектора скорости фильтрации; при этом нормальная компонента V_n , а также значения давления p на фронте остаются непрерывными. Совокупность перечисленных условий на фронте вытеснения можно представить как следующую систему [3, 6, 9] (индекс (o) относится к частицам нефти, а индекс (w) — к частицам воды):

$$\begin{cases} V_t^{(o)} \mu_{(o)} = V_t^{(w)} \mu_{(w)}, \\ V_n^{(o)} = V_n^{(w)}, \\ p^{(o)} = p^{(w)}. \end{cases} \quad (4)$$

Разрывную на фронте, но двойкопериодическую на комплексной плоскости функцию $\bar{V}(z, \bar{z})$ будем искать в виде:

$$\bar{V}(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \zeta(\tau - z) \gamma(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $\Phi(z, \bar{z})$ определяется выражением (3), характеризующим непрерывное распределение поля скоростей по «разноцветной» модели. Второе слагаемое в правой части формулы (5) представляет собой сингулярный интеграл по линии фронта вытеснения L с ядром типа Коши, заключенным в дзета-функции Вейерштрасса $\zeta(\tau - z)$. Представление в виде (5) впервые использовано Койтером в его работе [14], посвященной двойкопериодическим задачам теории упругости. Автор сводит исходную краевую задачу к сингулярному интегральному уравнению, включив в него двойкопериодические функции, построенные на базе дзета-функции $\zeta(z)$.

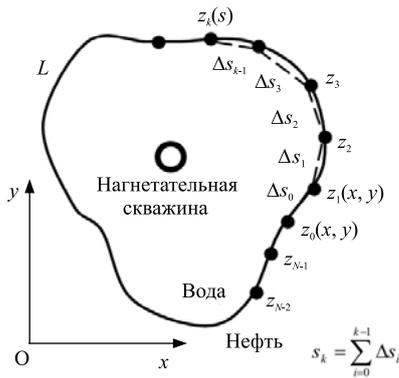


Рис. 3. Схема параметризации фронта вытеснения (линия L) и ее дискретного разбиения точками z_k ($k=1, \dots, N$); ввиду замкнутости контура L следует, что $z_0 = z_N$

Воспользуемся введенным представлением (5) для отыскания неизвестной на L функции $\gamma(\tau)$. Задавая естественную параметризацию контура L , основанную на длине дуги s (Рис. 3), и применяя к (5) формулы Сохоцкого–Племеля [15], получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{V}^{(w)}(z(s)) = \Phi(z(s)) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z(s)) \gamma(z(\sigma)) \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \frac{\gamma(z(s))}{2}, \\ \bar{V}^{(o)}(z(s)) = \Phi(z(s)) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z(s)) \gamma(z(\sigma)) \frac{dz}{d\sigma} d\sigma - \frac{\gamma(z(s))}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

Для неизвестной на L функции $\gamma(s)$, а также для комплексной скорости $\bar{V}(s)$ перемещения точек линии $z(s)$ из соотношений (6) следуют их представления через комплексные функции скоростей $\bar{V}^{(w)}(s)$ и $\bar{V}^{(o)}(s)$:

$$\gamma(s) = \bar{V}^{(w)}(s) - \bar{V}^{(o)}(s), \quad \bar{V}(s) = (\bar{V}^{(w)}(s) + \bar{V}^{(o)}(s)) / 2.$$

Принимая во внимание условия (4) на границе фронта вытеснения, а также представление комплексной функции скорости $\bar{V}^{(w)}(s)$ через ее касательную и нормальную компоненты $V_t^{(w)}(s), V_n^{(w)}(s)$ в виде $\bar{V}^{(w)}(s) = [V_t^{(w)}(s) + iV_n^{(w)}(s)]e^{-i\alpha}$, получим следующие выражения для функций $\gamma(s)$ и $\bar{V}(s)$:

$$\gamma(s) = \left(1 - \frac{\mu_{(w)}}{\mu_{(o)}}\right) V_t^{(w)}(s) e^{-i\alpha}, \quad \bar{V}(s) = \left(\left(1 + \frac{\mu_{(w)}}{\mu_{(o)}}\right) V_t^{(w)}(s) + 2iV_n^{(w)}(s) \right) e^{-i\alpha} / 2, \quad (7)$$

где α — угол между касательной к линии L и осью x .

Обозначим отношение вязкостей через коэффициент мобильности: $\kappa = \mu_{(w)} / \mu_{(o)}$, а касательную и нормальную компоненты вектора скорости воды, соответственно, как $T(s) = V_t^{(w)}(s)$ и $N(s) = V_n^{(w)}(s)$. Известно, что угол α между касательной к L и осью x , проведенной через некоторую точку $z(s)$,

связан с производной dz/ds по параметру s в этой точке соотношением $e^{i\alpha} = dz/ds$. В результате из соотношений (7) получим сингулярное интегральное уравнение в комплексной форме для неизвестных функций $T(s)$ и $N(s)$:

$$\frac{1+\kappa}{2}T(s) + iN(s) = \left[\Phi(s) + \frac{1-\kappa}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z(s))T(\sigma)d\sigma \right] \frac{dz}{ds}. \quad (8)$$

3. Алгоритм построения решения задачи продвижения фронта вытеснения

Интегральное уравнение (8) для касательной $T(s)$ и нормальной $N(s)$ компонент вектора скорости воды на фронте вытеснения необходимо дополнить дифференциальным уравнением, определяющим эволюцию этой границы во времени. Данное уравнение можно записать в следующем виде [5, 9]:

$$m \frac{\partial \bar{z}(s,t)}{\partial t} = \bar{V}(s,t), \quad (9)$$

где $z(s,0) = z_0 + r_w e^{i\theta}$ — начальное условие (z_0 — центр нагнетательной скважины радиуса r_w , через которую в пласт закачивается вода). Функция $\bar{V}(s,t)$ равняется скорости перемещения точки z , расположение которой на фронте обуславливается текущим значением параметра s этой границы в момент времени t . Условие для $z(s,0)$ в (9) указывает на положение точки на траектории ее движения в момент начала заводнения. Направление траектории определяется начальным значением угла θ соответствующего трассера на контуре нагнетательной скважины. Фактически по мере развития фронта вытеснения параметр s с течением времени становится функцией как θ , так и t .

С учетом представления (7) для функции $\bar{V}(s,t)$ в точках фронта вытеснения уравнение (9) можно переписать в виде:

$$m \frac{\partial \bar{z}(s,t)}{\partial t} = \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T(s,t) + iN(s,t) \right] e^{-i\alpha}, \quad (10)$$

где функции $T(s,t)$ и $N(s,t)$ для данного момента времени t находятся из решения сингулярного интегрального уравнения (8).

Рассмотрим алгоритм численного решения системы, состоящей из интегро-дифференциальных уравнений (8) и (10) и начального условия $z(s,0)$. Численное интегрирование уравнения (10) при найденных функциях $T(s,t)$ и $N(s,t)$ может осуществляться по одной из стандартных схем, например, по схеме Эйлера второго порядка точности или схеме Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

Для численного решения сингулярного интегрального уравнения (8) воспользуемся подходом, принятым в комплексном методе граничных элементов [16]. Разобьем контур L дискретным множеством точек на элементы $[z_i, z_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) (Рис. 3). Ввиду замкнутости фронта вытеснения первая и последняя точки разбиения совпадают, то есть $z_N = z_0$. Каждой из точек z_k соответствует значение длины дуги s_k . Выберем и зафиксируем некоторую точку $z_k = z(s_k)$ на контуре L . Интегральное слагаемое в (8) для точки z_k представим в виде суммы интегралов по элементам разбиения $[z_i, z_{i+1}]$:

$$\oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma)d\sigma = \sum_{i=k}^{N+k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma)d\sigma. \quad (11)$$

Сингулярный интеграл в (11) имеет интегральное ядро в виде дзета-функции $\zeta(z(\sigma) - z_k)$, то есть обладает особенностью вида $1/(z(\sigma) - z_k)$ при прохождении через точку z_k контура L . В связи с этим выделим особенность в отдельное слагаемое и представим сумму в правой части (11) в следующем виде:

$$\sum_{i=k}^{N+k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma)d\sigma = \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma)d\sigma + \sum_{i=k+1}^{N+k-2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma)d\sigma. \quad (12)$$

Выделив в $\zeta(z(\sigma) - z_k)$ сингулярную и регулярную составляющие, представим первое слагаемое в (12) как

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k) T(\sigma) d\sigma = \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \left[\frac{1}{z(\sigma) - z_k} + \zeta_*(z(\sigma) - z_k) \right] T(\sigma) d\sigma, \quad (13)$$

где $\zeta_*(z(\sigma) - z_k) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(z(\sigma) - z_k) - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{(z(\sigma) - z_k)}{\omega^2} \right]$ — регулярная часть дзета-функции.

Для вычисления в представлении (13) сингулярного интеграла $\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \left[\frac{T(\sigma)}{z(\sigma) - z_k} \right] d\sigma$ разложим функции $z(\sigma)$ и $T(\sigma)$ в окрестности точки s_k в ряд Тейлора и запишем его в следующем виде:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \left[\frac{1}{z_k + z'_k(\sigma - s_k) - z_k} \right] [T_k + T'_k(\sigma - s_k)] d\sigma = \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \left[\frac{T_k}{z'_k(\sigma - s_k)} + \frac{T'_k}{z'_k} \right] d\sigma, \quad (14)$$

где $T_k = T(s_k)$, $T'_k = T'(s_k)$, $z_k = z(s_k)$, $z'_k = z'(s_k)$. Учитывая, что сингулярный интеграл (14) в точке s_k понимается в смысле главного значения Коши, выражение (14) можно записать как

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{T_k}{z'_k(\sigma - s_k)} d\sigma + \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{T'_k}{z'_k} d\sigma = \frac{T_k}{z'_k} \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + \frac{T'_k}{z'_k} (s_{k+1} - s_{k-1}),$$

где $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$, $\Delta s_{k-1} = s_k - s_{k-1}$. Заменяв величину $T'_k = T'(s_k)$ ее центральной конечной разностью, преобразуем полученное выражение к виду:

$$\frac{T_k}{z'_k} \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + \frac{T'_k}{z'_k} (s_{k+1} - s_{k-1}) = \frac{1}{z'_k} \left[T_k \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + T_{k+1} - T_{k-1} \right].$$

Регулярную составляющую выражения (13) с помощью формулы трапеций можно записать как

$$\begin{aligned} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta_*(z(\sigma) - z_k) T(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2} [\zeta_*(z_{k-1} - z_k) T_{k-1} + \zeta_*(0) T_k] \Delta s_{k-1} + \frac{1}{2} [\zeta_*(0) T_k + \zeta_*(z_{k+1} - z_k) T_{k+1}] \Delta s_k = \\ &= \frac{1}{2} [\zeta_*(z_{k-1} - z_k) T_{k-1} \Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1} - z_k) T_{k+1} \Delta s_k]. \end{aligned}$$

Таким образом, приближенная формула для вычисления интеграла (13) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k) T(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{z'_k} \left[T_k \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + T_{k+1} - T_{k-1} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} [\zeta_*(z_{k-1} - z_k) T_{k-1} \Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1} - z_k) T_{k+1} \Delta s_k]. \end{aligned} \quad (15)$$

Второе из регулярных слагаемых в (12) также можно найти, применив формулу трапеций. Запишем его в виде:

$$\sum_{i=k+1}^{N+k-2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma) - z_k) T(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N+k-2} [\zeta(z_i - z_k) T_i + \zeta(z_{i+1} - z_k) T_{i+1}] \Delta s_i. \quad (16)$$

Объединяя формулы (15) и (16), приходим к итоговому выражению для сингулярного интеграла (11):

$$\begin{aligned} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k) T(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{z'_k} \left[T_k \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + T_{k+1} - T_{k-1} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} [\zeta_*(z_{k-1} - z_k) T_{k-1} \Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1} - z_k) T_{k+1} \Delta s_k] + \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N+k-2} [\zeta(z_i - z_k) T_i + \zeta(z_{i+1} - z_k) T_{i+1}] \Delta s_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что в выражении (17) значения T_{k-1} и T_{k+1} функции $T(s)$ присутствуют в каждом из трех слагаемых, перепишем последнее слагаемое в нем следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N+k-2} [\zeta(z_i - z_k)T_i + \zeta(z_{i+1} - z_k)T_{i+1}] \Delta s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=k+2}^{N+k-2} [\zeta(z_i - z_k)T_i] \Delta s_i + \frac{1}{2} \zeta(z_{k+1} - z_k)T_{k+1} \Delta s_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=k+2}^{N+k-2} [\zeta(z_j - z_k)T_j] \Delta s_{j-1} + \frac{1}{2} \zeta(z_{N+k-1} - z_k)T_{N+k-1} \Delta s_{N+k-2},$$

где $j = i+1$, а величины с индексами $N+k-2$, благодаря замкнутости контура L , совпадают с величинами с индексами $k-2$ и так далее. Принимая во внимание это замечание, запишем итоговую квадратурную сумму, сгруппировав по значениям искомой функции T_k :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N+k-2} [\zeta(z_i - z_k)T_i + \zeta(z_{i+1} - z_k)T_{i+1}] \Delta s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=k+2}^{N+k-2} \zeta(z_i - z_k)T_i (\Delta s_i + \Delta s_{i-1}) + \frac{1}{2} \zeta(z_{k+1} - z_k)T_{k+1} \Delta s_{k+1} + \frac{1}{2} \zeta(z_{k-1} - z_k)T_{k-1} \Delta s_{k-2}.$$

Подставим данное представление в формулу (17), сгруппируем все коэффициенты при значениях T_{k-1} и T_{k+1} . В результате получим соотношение (17) в следующем виде:

$$\oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma) d\sigma = \frac{1}{z'_k} T_k \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + T_{k+1} \left[\frac{1}{z'_k} + \frac{1}{2} \zeta(z_{k+1} - z_k) \Delta s_{k+1} + \frac{1}{2} \zeta_*(z_{k+1} - z_k) \Delta s_k \right] + T_{k-1} \left[-\frac{1}{z'_k} + \frac{1}{2} \zeta(z_{k-1} - z_k) \Delta s_{k-2} + \frac{1}{2} \zeta_*(z_{k-1} - z_k) \Delta s_{k-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=k+2}^{N+k-2} \zeta(z_i - z_k)T_i (\Delta s_i + \Delta s_{i-1}).$$

Функция $\zeta_*(z - z_k)$ отличается от $\zeta(z - z_k)$ на величину $1/(z - z_k)$. Поэтому дополним величины $\zeta_*(z_{k+1} - z_k)$ и $\zeta_*(z_{k-1} - z_k)$ до значений $\zeta(z_{k+1} - z_k)$ и $\zeta(z_{k-1} - z_k)$ и перепишем формулу как

$$\oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma) d\sigma = \frac{1}{z'_k} T_k \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + T_{k+1} \left[\frac{1}{z'_k} - \frac{1}{2} \frac{\Delta s_k}{z_{k+1} - z_k} \right] + T_{k-1} \left[-\frac{1}{z'_k} - \frac{1}{2} \frac{\Delta s_{k-1}}{z_{k-1} - z_k} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{N+k-1} \zeta(z_i - z_k)T_i (\Delta s_i + \Delta s_{i-1}).$$

В данном выражении слагаемые $\Delta s_k/(z_{k+1} - z_k)$ и $\Delta s_{k-1}/(z_{k-1} - z_k)$ представляют собой правую и левую конечные разности производной ds/dz в точке z_k . Следовательно, окончательная аппроксимация этого интеграла будет иметь следующий вид:

$$\oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2z'_k} \left[2T_k \ln \left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}} \right) + T_{k+1} - T_{k-1} + \sum_{i=k+1}^{N+k-1} \zeta(z_i - z_k)T_i (\Delta s_i + \Delta s_{i-1}) z'_k \right]. \quad (18)$$

Вернемся к исходному интегральному уравнению (8), вещественную и мнимую часть которого для выбранных на контуре L точек $z_k = z(s_k)$ можно записать как

$$\frac{1+\kappa}{2} T(s_k) = \text{Re} \left\{ \left[\Phi(s_k) + \frac{1-\kappa}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma) d\sigma \right] z'_k \right\}, \quad (19)$$

$$N(s_k) = \text{Im} \left\{ \left[\Phi(s_k) + \frac{1-\kappa}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z_k)T(\sigma) d\sigma \right] z'_k \right\}.$$

Как следует из уравнений (19), вещественная часть, учитывающая аппроксимацию (18), представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения значений искомой функции $T(s, t)$ в заданный момент времени t_n на дискретном множестве точек $z(s_k) = z_k$. Мнимая же часть

при найденных значениях T_k , также учитывающая аппроксимацию (18), является, по сути, формулой для вычисления значений функции $N(s,t)$ в заданный момент времени t_n на этом же дискретном множестве точек.

Полученные значения T_k и N_k используем далее при расчете перемещений точек z_k за промежутки времени $[t_n, t_{n+1}]$. Данные перемещения z_k определяются из численного решения задачи Коши (10) с помощью метода Рунге–Кутты, модифицированного с учетом комплексной природы дифференциального уравнения (10). В качестве переменной интегрирования выберем безразмерное время τ , которое связано с исходной временной переменной t как $\tau = 10^{-4} Qt / (2\pi mh\omega_1^2)$.

4. Результаты расчетов

Итогом решения рассмотренной задачи стал программный комплекс, позволяющий как отслеживать эволюцию границы контакта воды и нефти во времени, так и количественно оценивать эффективность той или иной схемы заводнения. Результаты работы программы представляются изображениями текущего положения заполненной водой области, а также такими числовыми характеристиками процесса, как время начала обводнения добывающих скважин и коэффициент охвата заводнением ($K_{\text{охв}}$), характеризующий момент появления воды в ближайших к нагнетательной скважине добывающих скважинах.

В рамках настоящего исследования проведен вычислительный эксперимент, целями которого стали как сравнительный анализ различных схем заводнения, так и оценка влияния разности вязкостей фильтрующихся фаз на эффективность вытеснения нефти водой. В процессе расчетов проводилось как визуальное сравнение картин заводнения области, так и сравнение указанных выше числовых параметров.

Рассмотрены лобовая рядная, четырехточечная, пятиточечная, семиточечная и девятиточечная схемы заводнения. Для мониторинга текущего положения фронта вытеснения было задействовано 180 трассеров, то есть 180 траекторий движения воды, выходящих в начальный момент времени под углами $\theta = (1, 2, \dots, 180)\pi/90$ из нагнетательной скважины (граничное условие для уравнения (10)). Положение заводненной области (трассеры выделены черным цветом) для четырехточечной схемы заводнения при значении коэффициента мобильности $\kappa = 1$ изображено на рисунке 4 для двух значений времени: $\tau = 0,0732$ и момента прорыва воды в скважину $\tau = 0,1025$.

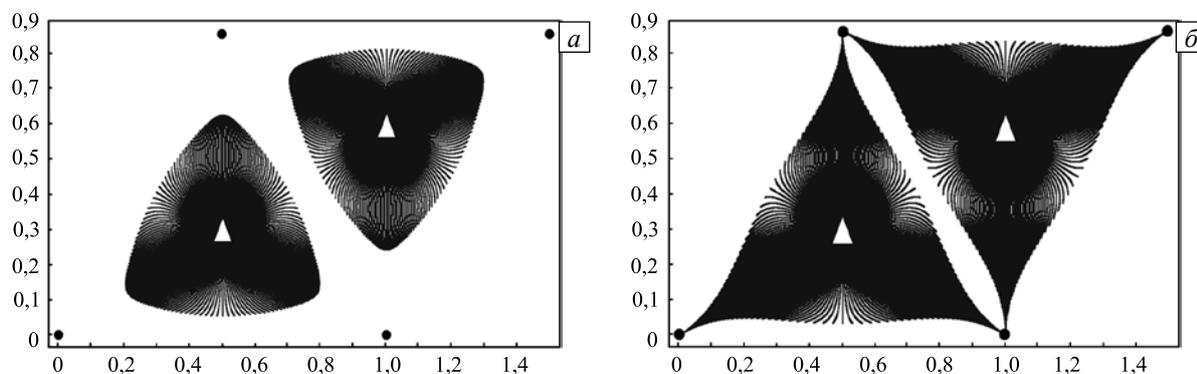


Рис. 4. Положение заводненной области, образованной 180 трассерами (выделены черным цветом), для четырехточечной схемы заводнения при $\kappa = 1$ в момент времени $\tau = 0,0732$ (а) и в момент прорыва воды в скважину при $\tau = 0,1025$ (б); добывающие скважины показаны черными точками, нагнетательные – треугольниками

Коэффициент охвата заводнением ($K_{\text{охв}}$) — одна из важнейших числовых характеристик процесса. Этот параметр определяется как отношение площади зоны, заполненной водой, к площади всего рассматриваемого участка. Он позволяет выявить так называемые «целики» нефти — те участки пласта, которые при выбранном расположении скважин не содержат воды к началу процесса обводнения добывающих скважин.

Алгоритм нахождения ($K_{\text{охв}}$) описан в работе [5] и заключается в следующем. На основании того, что фронт вытеснения остается гладким вплоть до начала обводнения добывающих скважин, заводненный на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ участок аппроксимируется набором четырехугольников, построенных на точках z_i и z_{i+1} в моменты времени t_k и t_{k+1} (Рис. 5). Площадь заводненной области определяется путем суммирования площадей получаемых четырехугольников, которые в свою очередь разбиваются на составляющие их треугольники (площади S_1 и S_2 на рисунке 5), а площадь последних вычисляется по правилам векторного произведения.

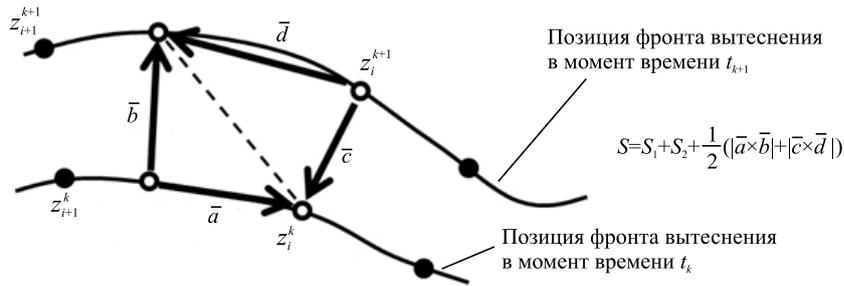


Рис. 5. Схема для расчета площади заводненной области за отрезок времени $[t_k, t_{k+1}]$

Известно [17], что отношение вязкостей κ оказывает негативное влияние на количественные показатели нефтеотдачи: с уменьшением параметра κ , при сохранении прочих равных условий разработки, наблюдается уменьшение объемов извлекаемых нефтяных запасов из-за растущей нестабильности вытеснения нефти водой. Кроме того, при определенных значениях κ возникает неустойчивость Саффмана–Тейлора [18, 19], которая часто называется «вязким пальцеобразованием» [20, 21]. При существенном различии вязкостей нефти и воды (то есть отличии величины κ от единицы) происходит нарушение устойчивости фронта вытеснения, в результате чего нагнетаемая вода как бы «пронзает» нефтяную область вытянутыми мысами (пальцами), оставляя за собой неосвоенные нефтяные запасы. Подобный эффект также был обнаружен в ходе проведенных численных экспериментов: при определенных значениях параметра κ наблюдалось нарушение гладкости фронта вытеснения с последующим образованием «вязких пальцев». Указанный эффект изображен на рисунке 6 для случая пятиточечной обращенной схемы заводнения (здесь трассеры изображены белым цветом на черном фоне). Для сравнения рисунок 6 дополнен картиной заводнения, полученной другими авторами экспериментально для аналогичной геометрии расстановки скважин (см. рисунок 6а в работе [22]).

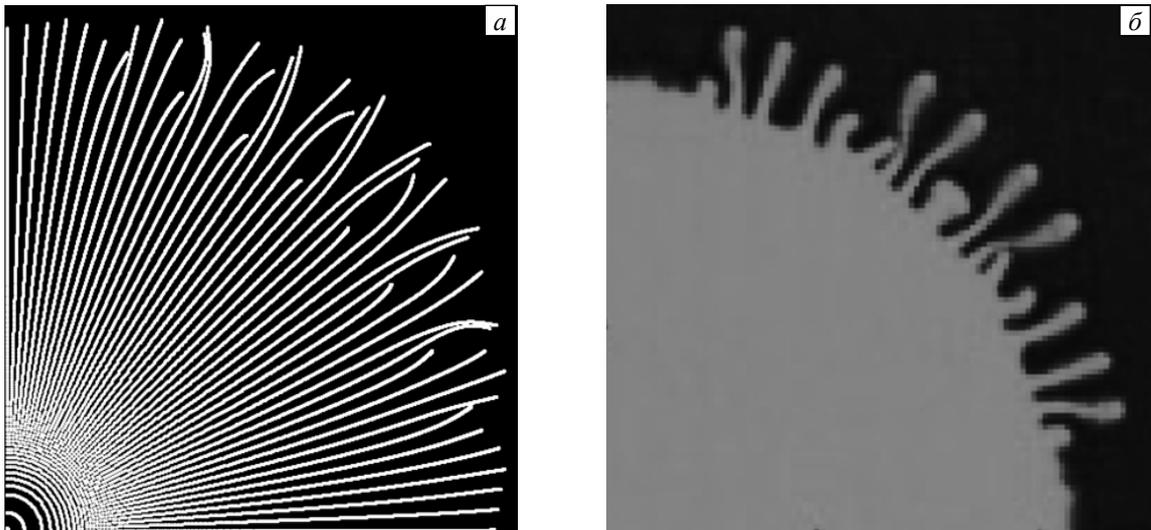


Рис. 6. Нарушение устойчивости фронта вытеснения для пятиточечной обращенной схемы расстановки скважин: численный расчет при значениях $\kappa=1/5$ и $\tau=0,0450$ (заводненная область образована 180 трассерами, изображенными белыми линиями на черном фоне) (а), данные из работы [22] (б)

Необходимо подчеркнуть, что изучение эффекта «вязкого пальцеобразования» не являлось предметом настоящего исследования: указанная проблема требует большего внимания к вопросам неустойчивости фронта вытеснения и будет рассмотрена отдельно в последующих работах.

Часть результатов численного мониторинга фронта вытеснения представлена ниже. Так, на рисунке 7 изображена заводненная область для семиточечной и девятиточечной обращенных схем расстановки скважин в момент прорыва воды в добывающую скважину при различных отношениях коэффициента мобильности κ : на картинах представлены окрестности добывающих скважин (белые точки), в сторону которых движется фронт вытеснения (траектории частиц воды обозначены белыми линиями). При сравнении изображений наблюдается похожесть в характерах изменений форм мысов, образуемых нагнетаемой водой, причем это имеет место для всех исследованных схем заводнения.

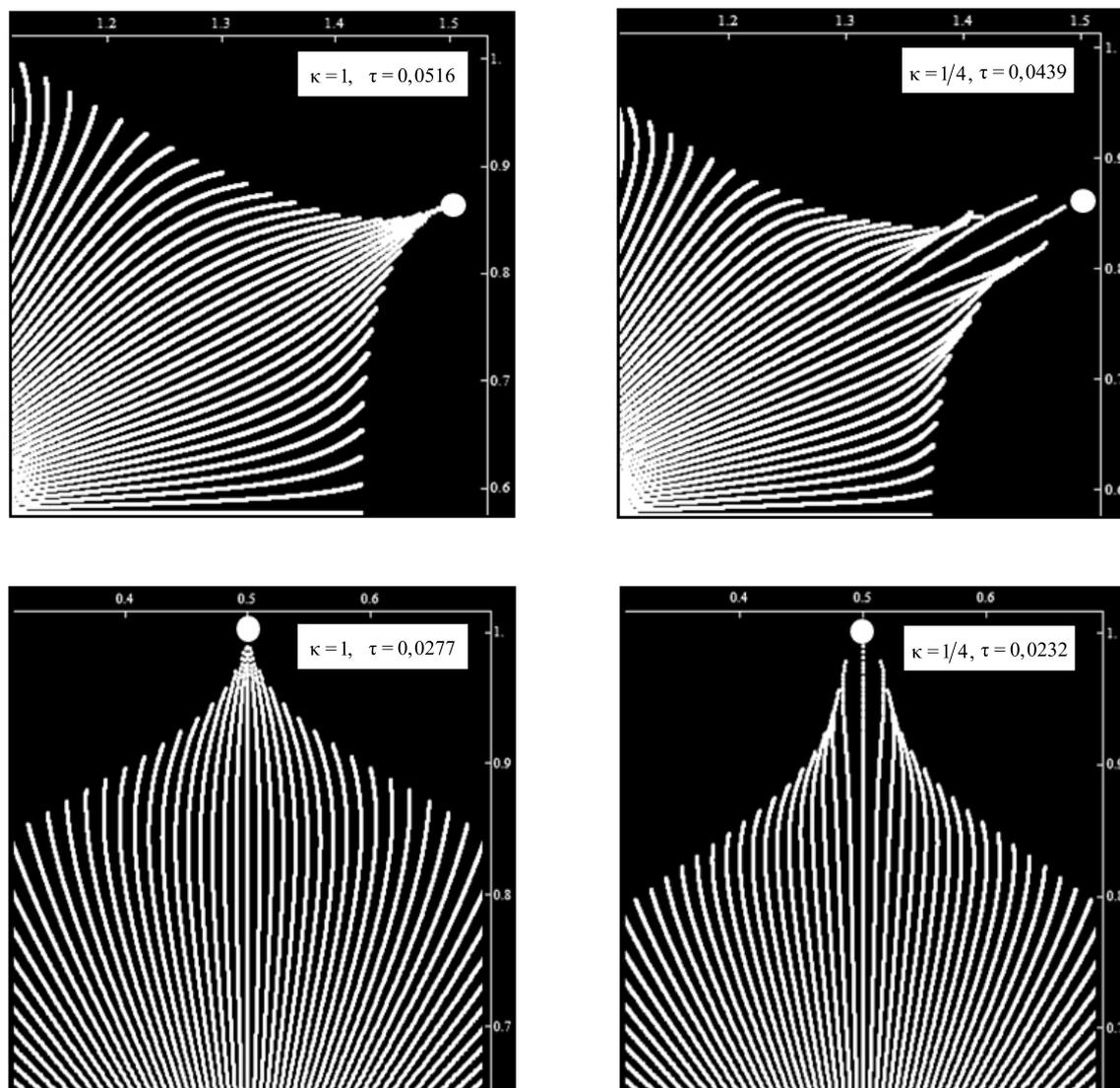


Рис. 7. Картины заводненной области в момент прорыва воды в скважину, образованные 180 трассерами (показаны белыми линиями) для семиточечной и девятиточечной обращенных схем заводнения при различных значениях параметра κ и безразмерного времени τ (добывающие скважины обозначены белыми точками)

В таблице 1 содержатся значения времени начала обводнения τ , рассчитанного для четырех схем заводнения при различных значениях вязкостей нефти и воды κ . Результаты определения коэффициента охвата заводнением $K_{\text{охв}}$ отражены в таблице 2. Аббревиатура VF (viscous fingers) указывает на появление «вязких пальцев» для выбранной схемы расстановки скважин при заданном отношении вязкостей; вследствие нарушения гладкости фронта вытеснения найти $K_{\text{охв}}$ для данного значения κ невозможно. Для большей наглядности столбцы таблицы 2 дополнены значениями, взятыми из монографии Ф. Крэйга [17] для случая $\kappa = 1$.

Таблица 1. Значения τ при различных значениях коэффициента мобильности κ

Схема заводнения	Значения τ при различном отношении вязкостей κ			
	$\kappa = 1$	$\kappa = 1/2$	$\kappa = 1/3$	$\kappa = 1/4$
Пятиточечная обращенная	0,1152	0,1017	0,0960	VF
Лобовая рядная	0,1820	0,1500	VF	VF
Семиточечная обращенная	0,0516	0,0472	0,0452	0,0439
Девятиточечная обращенная	0,0277	0,0252	0,0240	0,0232

Таблица 2. Значения $K_{\text{ов}}$ при различных значениях коэффициента мобильности κ

Схема заводнения	Значения $K_{\text{ов}}$ при различном значении коэффициента мобильности κ				
	$\kappa = 1$ (Ф. Крэйг)	$\kappa = 1$	$\kappa = 1/2$	$\kappa = 1/3$	$\kappa = 1/4$
Пятиточечная обращенная	70%	72,5%	63,5%	60%	VF
Лобовая рядная	58%	57,2%	47%	VF	VF
Семиточечная обращенная	73%	75,2%	68,5%	65,3%	63,3%
Девятиточечная обращенная	55%	52,7%	48%	45,5%	44%

Визуальный анализ картин заводненной области показал качественное совпадение результатов настоящего исследования с данными других авторов, полученными как при численном моделировании [23], так и в рамках физического эксперимента [6]. Результаты численного эксперимента подтверждаются также сделанными ранее другими авторами [17] выводами об отрицательном влиянии высокой разницы вязкостей воды и нефти на конечную нефтеотдачу. При численном эксперименте было получено, что с уменьшением значения коэффициента мобильности κ наблюдается как сокращение «безводного» периода добычи, так и площади, охватываемой заводнением, что негативно сказывается на величине $K_{\text{ов}}$ и, следовательно, на объеме извлекаемых запасов нефти.

5. Выводы и пути развития исследования

Настоящее исследование является продолжением работы [5] и обобщает ранее полученные результаты на случай поршневого вытеснения нефти водой, при котором физические свойства жидкостей полагаются различными. Итогом проделанной работы стал программный комплекс, функции которого во многом аналогичны его предшественнику [5]: основанная на решении задачи мониторинга фронта вытеснения программа предоставляет как графические данные (картины заводненной области), так и значения числовых характеристик (время прорыва воды τ , $K_{\text{ов}}$) для выбранной схемы расстановки скважин.

Разработанный программный комплекс представляет собой инструмент для сравнительного анализа различных схем заводнения при неизменных геофизических параметрах пласта: данные анализа могут применяться при проектировании разработки реальных месторождений в качестве рекомендаций к выбору схемы расстановки скважин из числа возможных вариантов, зависящих от геофизических особенностей нефтеносного участка. При этом учет физических различий совместно фильтрующихся фаз (нефти и воды) заметно приближает моделируемый процесс к реалиям нефтедобычи.

Возможности программного комплекса могут быть расширены в будущем. При дальнейшем развитии построенного представления о фильтрации воды и нефти в двоякопериодической области данные при переходе к модели двухфазной фильтрации могут быть уточнены и их количество увеличено при допущении переменных дебитов закачки вытесняющего агента (воды). Информация о процессах фильтрации для выбранной схемы заводнения также может быть дополнена прогнозами об изменениях таких характеристик производительности скважин и пласта, как суммарный дебит добычи, среднее пластовое давление, а также давление в призабойных зонах скважин.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР СамГТУ, финансируемого Минобрнауки России из федерального бюджета, а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-97041-р_поволжье_a).

Литература

1. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений. – М.: Недра, 1998. – 365 с.
2. Уиллхайт Г.П. Заводнение пластов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. – 788 с.
3. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
4. Герольд С.П. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин. – М.-Л.: Нефтеиздат, 1932.
5. Касаткин А.Е. Сравнительный анализ схем расстановки скважин при заводнении // Вестник СамГТУ. – 2013. – № 9-2 (110). – С. 196-207.
6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 640 с.
7. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
8. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. – М.: Недра, 1980. – 264 с.
9. Фазлыев Р.Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. – 256 с.
10. Хайруллин М.Х. Исследования по проблемам теории фильтрации в КНЦ РАН // Обзоры исследований по механике сплошной среды. К 50-летию КНЦ РАН. – Казань, 1995. – С. 60-78.
11. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин // Вестник СамГТУ. – 2010. – № 4 (78). – С. 5-11.

12. Астафьев В.И., Потерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. 2. Коэффициент продуктивности // Вестник СамГУ. – 2011. – № 8 (89). – С. 118-127.
13. Астафьев В.И., Потерс П.В. Моделирование и оптимизация разработки месторождений многоскважинными двоякопериодическими кластерами // Вестник СамГУ. – 2013. – № 9/2 (110). – С. 170-183.
14. Koiter W.T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions // Proc. Kon. Ned. Akad. Wt. Amsterdam. – 1959. – Vol. A62, no. 2. – P. 120-128.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.
16. Громадка И.Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. – М: Мир, 1990. – 303 с.
17. Крэйг Ф.Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении. – М.: Недра, 1974. – 192 с.
18. Saffman P.G. Viscous fingering in Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 173. – P. 73-84. DOI
19. Stone H.A. Philip Saffman and viscous flow theory // J. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 409. – P. 165-183. DOI
20. Заславский М.Ю., Пергамент А.Х. Исследование неустойчивости типа “fingers” в фильтрационных течениях: Препр. / Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2002. (URL: http://keldysh.ru/papers/2002/prep31/prep2002_31.html).
21. Chen C., Meiburg E. Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. Part 1. The homogeneous case // J. Fluid Mech. – 1998. – Vol. 371. – P. 233-268. DOI
22. Daripa P., Glimm J., Lindquist B., McBryan O. Polymer floods: A case study of nonlinear wave analysis and of instability control in tertiary oil recovery // SIAM J. Appl. Math. – 1988. – Vol. 48, no. 2. – P. 353-373. DOI
23. Корнилина М.А., Самарская Е.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Якобовский М.В. Моделирование разработки нефтяных месторождений на параллельных вычислительных системах // Матем. моделирование. – 1995. – Т. 7, № 2. – С. 35-48.

References

1. Zheltov Yu.P. *Razrabotka nefyanykh mestorozhdenij* [Development of oil fields]. Moscow: Nedra, 1998. 365 p.
2. Willhite G.P. *Waterflooding*. SPE Textbook. Vol. 3. Society of Petroleum Engineers, Richardson, Texas, 1986. 338 p.
3. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydromechanics]. Moscow: Nedra, 1993. 416 p.
4. Gerold S.P. *Analiticheskie osnovy dobychi nefi, gaza i vody iz skvazhin* [The analytical foundations of oil, gas and water development from wells]. Leningrad: Nefteizdat, 1932.
5. Kasatkin A.E. Comparative analysis of well location schemes at waterflooding. *Vestnik of Samara State University*, 2013, no. 9-2 (110), pp. 196-207.
6. Muskat M. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. New York: McGraw-Hill, 1937. 763 p.
7. Charny I.A. *Underground fluid dynamics*. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2006. 436 p.
8. Danilov V.L., Katz R.M. *Gidrodinamicheskie raschety vzaimnogo vytesneniya zhidkostej v poristoj srede* [Hydrodynamic calculations of mutual displacement of fluids in porous media]. Moscow: Nedra, 1980. 264 p.
9. Fazlyev R.T. *Waterflooding of oil fields*. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008. 256 p.
10. Hairullin M.H. *Issledovaniya po problemam teorii fil'tratsii v KSC RAS* [Investigations on the problems of fluid filtration]. *Reviews of the research on the continuum mechanics. On the 50th anniversary of the KSC RAS*, Kazan, 1995, pp. 60-78.
11. Astafiev V.I., Roters P.V. Modeling of doubly periodic system of producing wells. *Vestnik of Samara State University*, 2010, no. 4 (78), pp. 5-11.
12. Astafiev V.I., Roters P.V. Modeling of doubly periodic system of producing wells. 2. Productivity index. *Vestnik of Samara State University*, 2011, no. 8 (89), pp. 118-127.
13. Astafiev V.I., Roters P.V. Modeling and optimization of mining with multiwell doubly periodic clusters. *Vestnik of Samara State University*, 2013, no. 9-2 (110), pp. 170-183.
14. Koiter W.T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wt. Amsterdam*, 1959, vol. A62, no. 2, pp. 120-128.
15. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow: Nauka, 1973. 749 p.
16. Hromadka I. T.V., Lai C. *The complex variable boundary element method in engineering analysis*. New-York: Springer, 1987. 243 p.
17. Craig F.F. *The reservoir engineering aspects of waterflooding*. Society of Petroleum Engineers, Vol. 3, Dallas, 1971. 142 p.
18. Saffman P.G. Viscous fingering in Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 173, pp. 73-84. DOI
19. Stone H. A. Philip Saffman and viscous flow theory. *J. Fluid Mech.*, 2000, vol. 409, pp. 165-183. DOI
20. Zaslavsky M.Yu., Pergament A.Kh. *Issledovanie neustojchivosti tipa “fingers” v filtratsionnykh techeniyakh* [Investigation of “fingers” instability in filtration flows]. Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences. Moscow, 2002, no. 31. (URL: http://keldysh.ru/papers/2002/prep31/prep2002_31.html).
21. Chen C., Meiburg E. Miscible porous media displacement in the quarter five-spot configuration. Part 1. The homogeneous case. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 371, pp. 233-268. DOI
22. Daripa P., Glimm J., Lindquist B., McBryan O. Polymer floods: A case study of nonlinear wave analysis and of instability control in tertiary oil recovery. *SIAM J. Appl. Math.*, 1988, vol. 48, no. 2, pp. 353-373. DOI
23. Kornilina M.A., Samarskaya E.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Yakobovsky M.V. Simulation of oil fields development on the parallel computer systems. *Mathematical Simulation*, 1995, vol. 7, no. 2, pp. 35-48.

Поступила в редакцию 22.07.2014; опубликована в электронном виде 31.03.2015

Сведения об авторах

Астафьев Владимир Иванович, дфмн, проф., гнс, Самарский государственный технический университет (СамГТУ), 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244; e-mail: vladimir.astafev@mail.ru

Касаткин Андрей Евгеньевич, асп., Самарский государственный университет (СамГУ), 443011, Самара, ул. Академика Павлова, д. 1; e-mail: daranton_yar@mail.ru