

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.6
УДК 550.347.62

ТРЕХМЕРНАЯ СОВМЕСТНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МЕДЛЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В.В. Пак

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация

Разработана трехмерная совместная численная модель для описания медленного течения в расчетной области, состоящей из толстого вязкого слоя, покрытого тонким многослойным вязким пластом. Предполагалось, что пласт имеет меньшую плотность, чем слой. Модель соединяет в себе уравнения Стокса, описывающие течение в слое с уравнениями Рейнольдса в пласте. С помощью асимптотического метода для исследования эволюции течения на больших временах было получено обыкновенное дифференциальное уравнение относительно смещения границ пласта и скоростей на границе раздела между пластом и слоем. Это асимптотическое уравнение используется как внутреннее граничное условие, связывающее уравнения Стокса с уравнениями Рейнольдса. Численная реализация осуществлялась модифицированным методом конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента. Дискретизация расчетной области осуществлялась с помощью прямоугольных параллелепипедов. В качестве базовых функций использовались квадратичные элементы. Представленная модель дает возможность соединить разнотипные уравнения гидродинамики без использования какого-либо итерационного уточнения. Это позволяет значительно сократить вычислительные затраты по сравнению с большинством ранее разработанных комплексных моделей. Численные результаты подтвердили хорошую точность предлагаемой трехмерной совместной модели.

Ключевые слова: трехмерная совместная модель, уравнения Стокса, уравнения Рейнольдса, уравнения смазки, метод малого параметра, метод конечных элементов, метод проекции градиента

THREE-DIMENSIONAL COUPLED NUMERICAL MODEL OF CREEPING FLOW OF VISCOUS FLUID

V.V. Pak

Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation

A three-dimensional numerical coupled model is developed to describe creeping flow in a computational domain that consists of thick viscous layer overlaid by a thin multi-layered viscous sheet. The sheet is assumed to have the lower density than the layer. The model couples the Stokes equations describing the flow in the layer and the Reynolds equations describing the flow in the sheet. We investigate the long-time behavior of the flow in the sheet using the asymptotic method and derive an ordinary differential equation with respect to sheet boundary displacements and velocities at the interface between the sheet and layer. Applying the obtained equation as an internal boundary condition, we couple the Stokes and Reynolds equations. Numerical implementation is fulfilled by the modified finite element method combined with the projection gradient method. The computational domain is discretized with hexahedrons. Piecewise square basic functions are used. The proposed model enables different-type hydrodynamic equations to be coupled without any iterative improvements. This reduces significantly computational costs in comparison with the available coupled models. Numerical experiments confirm a good accuracy of the developed three-dimensional coupled model.

Key words: three-dimensional coupled model, Stokes equations, Reynolds equations, lubrication approximation, perturbation method, finite element method, gradient projection method

1. Введение

Характерной особенностью строения верхней оболочки Земли (литосферы) является ее ярко выраженная горизонтально-слоистая по вязкости и плотности приповерхностная структура. Поэтому в качестве реологической модели литосферы часто используют вязкую среду, на поверхности которой расположен относительно тонкий пограничный слой [1].

Численное моделирование движения такой среды во всей расчетной области с помощью одной и той же системы уравнений связано со значительными вычислительными затратами. В этом случае для достижения достаточной точности приближенного решения или задают пространственный шаг дискретизации, много меньший толщины погранслоя (что увеличивает размерность дискретной задачи), или используют адаптивные расчетные сетки, сгущающиеся в окрестности пограничного слоя. Однако построение адаптивных сеток для областей со сложной геометрией является отдельной численной задачей, которая требует дополнительных вычислительных ресурсов, особенно если границы пограничного слоя являются подвижными, и сетка перестраивается на каждом шаге по времени. И, наконец, необходимо численно решать эти уравнения в самом пограничном слое, где упрощенные уравнения гидродинамики позволяют получить решение с достаточно хорошей точностью.

В настоящее время для описания сложных течений вязкой жидкости с сильно меняющимися геометрическими характеристиками широко используются так называемые совместные модели

(“coupling models” в англоязычной литературе), соединяющие в себе упрощенные уравнения в погранслоном приближении с более общими уравнениями вязкой жидкости. При построении таких моделей возникает проблема сопряжения уравнений. Для этой цели, как правило, применяются многоступенчатые итерационные процедуры, с помощью которых достигается выполнение условий непрерывности полей скоростей и напряжений в узлах расчетной сетки, расположенных на границе сочленения разнородных уравнений [2–4]. Однако использование таких процедур требует существенных вычислительных затрат.

В [5] автором разработана численная модель двумерного течения в области, состоящей из тонкого поверхностного многослойного пласта переменной мощности и относительно толстого вязкого слоя; модель соединяет в себе уравнения смазки [6] с уравнениями Стокса. В качестве дополнительного условия на границе сопряжения разнородных уравнений было использовано асимптотическое уравнение, полученное с помощью метода малого параметра при исследовании эволюции течения в многослойном пласте на больших временах. Для численной реализации этого условия применялся метод проекции градиента [7]. Результаты моделирования показали, что подобное ограничение позволяет получить хорошее приближение для скоростей без проведения каких-либо уточняющих итерационных процедур.

В данной работе предлагается трехмерная совместная численная модель течения в области, состоящей из толстого вязкого слоя, покрытого тонким многослойным пластом переменной толщины. Для описания течения в многослойном пласте используются уравнения смазки (уравнения Рейнольдса), а для течения в подстилающем вязком слое — уравнения Стокса. Как и в двумерной модели [5], на границе сопряжения используется дополнительное условие, однако вследствие трехмерности моделируемого течения при реализации возникает ряд трудностей. Представлены результаты численного решения модельной задачи и проведено их сравнение с точным аналитическим решением.

2. Система уравнений

Рассмотрим трехмерную расчетную область, состоящую из относительно толстого слоя вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ и вязкостью μ , покрытого тонким N -слойным вязким пластом, границы которого обозначим через Z_k ($k = \overline{0, N}$). Так как течение жидкости имеет субгоризонтальный характер не только в самом пласте, но и в подстилающей его окрестности, аналогично [5] поставим ниже границы Z_N на расстоянии порядка $Z_0 - Z_N$ фиктивную горизонтальную неподвижную границу Z_{N+1} , которая разделит расчетную область на верхнюю (D_1) и нижнюю (D_2) подобласти. Схема расчетной области показана на рисунке 1.

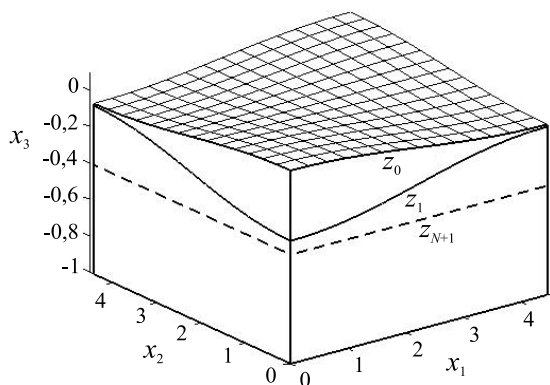


Рис. 1. Общая схема расчетной области

Для описания движения жидкости в нижней подобласти D_2 используем уравнения Стокса:

$$\left[\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \right]_i - p_{,i} - \rho g \delta_{i3} = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести, u_i — компоненты скорости, p — давление, δ_{ij} — символы Кронекера; $u_{i,j}$ обозначает производную скорости u_i по координате x_j . Скорости в (1) должны удовлетворять уравнению неразрывности:

$$u_{i,i} = 0. \quad (2)$$

На нижней и боковых границах подобласти D_2 зададим условие гладкого контакта:

$$u_j n_j = 0. \quad (3)$$

Движение жидкости в каждом слое подобласти D_1 опишем упрощенными уравнениями в приближении смазки (уравнения Рейнольдса) [6]:

$$\begin{aligned} p_{,1} &= \mu_k u_{1,33}, & 1 \\ p_{,2} &= \mu_k u_{2,33} \quad (k = \overline{1, N+1}), & 2 \\ p_{,3} &= -\rho_k g, & 3 \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ_k и μ_k — плотности и коэффициенты вязкости жидкости в слоях, причем $\rho_{N+1} = \rho$ и $\mu_{N+1} = \mu$. Скорости в (4) также должны удовлетворять уравнению неразрывности (2).

На границах раздела слоев зададим следующие условия:

– на поверхности $z = Z_0$ — отсутствие внешних напряжений:

$$p = 0, \quad \mu_1 u_{1,3} = 0, \quad \mu_1 u_{2,3} = 0; \quad (5)$$

– на границах раздела слоев $z = Z_k \quad (k = \overline{1, N})$ — непрерывность скоростей и напряжений:

$$[u_i]_-^+ = 0, \quad [p]_-^+ = 0, \quad [\mu u_{1,3}]_-^+ = 0, \quad [\mu u_{2,3}]_-^+ = 0, \quad (6)$$

где скобки $[]_-^+$ означают скачок функции на границе раздела, n_j — направляющие косинусы нормали к границе расчетной области;

– на боковых границах каждого слоя подобласти D_1 — непроницаемость стенки:

$$u_i = 0 \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (4)₃ по x_3 с учетом краевых условий (5), (6), получим давление в слоях:

$$\begin{aligned} p &= p_k - \rho_k z, \quad Z_k < z < Z_{k-1}, \\ p_k &= \sum_{j=1}^k \rho_j (Z_j - Z_{j-1}) + \rho_k Z_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Затем, дважды проинтегрировав уравнения (4)₁ и (4)₂ по x_3 с учетом краевых условий (5), (6), найдем горизонтальные скорости $u_i \quad (i = \overline{1, 2})$:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i|_{z=Z_{N+1}} + p_{k,i} \frac{(z - Z_k)^2}{2} + \sum_{j=1}^k \frac{p_{j,i}}{\mu_j} (Z_j - Z_{j+1}) (z - Z_k) + \\ &+ \sum_{j=N+1}^k h_j \left(\frac{1}{2} \frac{(Z_j - Z_{j-1})}{\mu_k} + \sum_{l=j+1}^N \frac{(Z_l - Z_{l-1})}{\mu_l} \right) p_{k,i}, \quad Z_k < z < Z_{k-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вертикальную скорость u_3 можно определить интегрированием по x_3 уравнения неразрывности (2):

$$u_3 = u_3|_{z=Z_{N+1}} - \int_{Z_{N+1}}^z (u_{1,1} + u_{2,2}) dz. \quad (10)$$

На границе сопряжения подобластей Z_{N+1} условия непрерывности полей скоростей и напряжений принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} [u_i]_-^+ &= 0, \\ \mu(u_{1,3} + u_{3,1})|_{Z_{N+1}-0} &= \mu u_{1,3}|_{Z_{N+1}+0}, \quad \mu(u_{2,3} + u_{3,2})|_{Z_{N+1}-0} = \mu u_{2,3}|_{Z_{N+1}+0}, \\ -p + 2\mu u_{3,3}|_{Z_{N+1}-0} &= -p|_{Z_{N+1}+0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (8), (9) в (11), получим:

$$\begin{aligned}
[u_i]_-^+ &= 0, \\
\mu(u_{1,3} + u_{3,1})|_{Z_{N+1}=0} &= -\sum_{i=1}^N \left(\rho_i Z_{i,1} + \sum_{k=2}^i (\rho_k - \rho_{k-1}) Z_{k,1} \right) (Z_i - Z_{i+1}), \\
\mu(u_{2,3} + u_{3,2})|_{Z_{N+1}=0} &= -\sum_{i=1}^N \left(\rho_i Z_{i,2} + \sum_{k=2}^i (\rho_k - \rho_{k-1}) Z_{k,2} \right) (Z_i - Z_{i+1}), \\
-p + 2\mu u_{3,3}|_{Z_{N+1}=0} &= -\sum_{i=1}^N \rho_i (Z_i - Z_{i+1}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Чтобы решить задачу численно, методом конечных элементов, используем вариационную формулировку уравнений (1). Умножим их скалярно на соленоидальное поле v_i и преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса. Используя симметричность тензора деформаций и краевые условия (3) и (12), получим:

$$J(u_i, v_i) = C(u_i, v_i) - F_1(v_i) - F_2(v_i) = 0, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
C(u_i, v_i) &= \iint_D \mu(u_{i,j} + u_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) dx \quad (i = \overline{1,3}), \\
F_1(v_i) &= -\iint_D \rho g v_3 dx, \\
F_2(v_i) &= -\int_{Z_{N+1}} \sum_{k=1}^N \left(\rho_i Z_{k,j} + \sum_{l=2}^k (\rho_l - \rho_{l-1}) Z_{l,j} \right) (Z_k - Z_{k+1}) v_j d\Gamma - \int_{Z_{N+1}} \sum_{k=1}^N \rho_k (Z_k - Z_{k+1}) v_3 d\Gamma \quad (j = \overline{1,2}).
\end{aligned}$$

Искомое поле скоростей является минимумом функционала $J(u_i, u_i)$ на пространстве соленоидальных полей, удовлетворяющих условию несжимаемости (2).

Для численного решения вариационной задачи, получающейся на основе функционала (13), применялся модифицированный метод проекции градиента. Для перехода к дискретному виду функционала (13) расчетная область разбивалась на прямоугольные параллелепипеды; узлы сетки обозначались как x_k^l, x_k^m, x_k^s [7, 8]:

$$x_1^{2l-1} < x_1 < x_1^{2l+1}, \quad x_2^{2m-1} < x_2 < x_2^{2m+1}, \quad x_3^{2s-1} < x_3 < x_3^{2s+1} \quad (l = \overline{1, L}, m = \overline{1, M}, s = \overline{1, S}).$$

В качестве базисных функций использовались тензорные произведения квадратичных одномерных лагранжевых функций формы. Путем введения дискретного аналога векторного потенциала достигалось точное выполнение дискретного аналога условия несжимаемости (2) с сохранением разреженной структуры матрицы жесткости. Подробное изложение этого метода приводится в [8].

3. Асимптотическое условие

Как было показано в работе [5], эволюция течения на больших временах полностью связана с многослойным пластом. Для того чтобы улучшить точность приближения, необходимо исследовать особенности эволюции течения в пласте. Для этого получим уравнения, описывающие движение границ пласта Z_k ($k = \overline{1, N-1}$).

Подставим (9), (10) в кинематическое условие отсутствия потока массы через границу:

$$u_3(x_1, x_2, Z_i, t) - Z_{i,1} u_1(x_1, x_2, Z_i, t) - Z_{i,2} u_2(x_1, x_2, Z_i, t) - \frac{L}{u_0 t_0} Z_{k,i} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1}), \tag{14}$$

где L , u_0 и t_0 — это, соответственно, масштабы длины, скорости и времени. Выберем в качестве масштаба времени величину $t_0 = L/(u_0 \Delta \rho_k)$, где $\Delta \rho_k$ — перепад плотности на границе Z_k , тогда получим следующие уравнения относительно $Z_k(x_i, t)$:

$$\Delta \rho_k Z_{k,t} = \left((\gamma A_{kj} Z_{j,i}) - u_i (Z_k - Z_{N+1}) \right)_{,i} + u_3 \quad (i = \overline{1,2}, \quad k = \overline{1, N-1}), \tag{15}$$

где

$$A_{kj} = A_{jk} = \sum_{l=k}^N h_l \sum_{m=j}^N h_m \sum_{q=m}^N \frac{1}{\mu_k} \frac{h_l}{1 + \delta_{mq} + \delta_{lm}} \quad (k \leq j, \quad k, j = \overline{1, N}),$$

$$h_k = Z_{i-1} - Z_i,$$

$$\Delta \rho_1 = 1, \quad \Delta \rho_k = \frac{(\rho_k - \rho_{k-1})}{\rho_1}.$$

Для верхних слоев Земли и других твердых планет безразмерную разность плотностей можно представить в виде: $\Delta \rho_k = \varepsilon \gamma_k$, где $\varepsilon \sim 0,1$ является малым параметром [1]. Произведем асимптотическое разложение системы уравнений (15) по ε . Подробное изложение применяемого асимптотического метода приводится в работе [9]. В результате получается асимптотическое уравнение для больших значений времени:

$$(\gamma_j A_{1j} Z_{j,i})_{,i} - ((Z_1 - Z_{N+1}) u_i)_{,i} + u_3 = 0, \quad x_3 = Z_i. \quad (16)$$

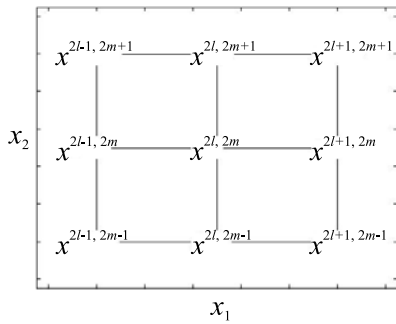


Рис. 2. Нумерация узлов расчетной области на грани элемента, расположенного на границе сопряжения z_{N+1}

Уравнение (16), связывающее положения границ слоев и скорости на границе сопряжения на больших временах и не зависящее от предыстории течения, использовалось в качестве дополнительного ограничения на минимизируемый функционал $J(u_i, u_i)$ для сопряжения разнородных уравнений в слое и пласте. Численная реализация этого сопряжения осуществлялась следующим образом. В принятых обозначениях узлы разностной сетки (x_1^l, x_2^m, x_3^s) располагаются на границе сопряжения. Тогда грани элементов F_{lm} , принадлещие границе сопряжения, включают в себя следующие узлы: $x^{l, m_1} = (x_1^l, x_2^m, x_3^s)$ ($l = 2l-1, 2l+1, m_1 = 2m-1, 2m+1$) (см. Рис. 2).

Заменим условие (16) его интегральным эквивалентом:

$$\iint_{F_{lm}} [(\gamma_j A_{1j} Z_{j,i})_{,i} - ((Z_1 - Z_{N+1}) u_i)_{,i} + u_3] dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{\partial F_{lm}} (\gamma_j A_{1j} Z_{j,i} - (Z_1 - Z_{N+1}) u_i) n_i dx + \iint_{F_{lm}} u_3 dx_1 dx_2 = 0, \quad x_3 = Z_i. \quad (17)$$

где ∂F — граница грани F , n_k — компоненты нормали к ∂F . Для вычисления двойного интеграла в (17) используем сеточную функцию Ψ , определяемую в узлах, расположенных на серединах ребер расчетной сетки, и в каждом узле равную значению интеграла от векторной функции тока вдоль этого ребра с произвольно заданным направлением интегрирования [3]. Подставляя ее в (17), получим:

$$\int_{x^{2l-1, 2m-1}}^{x^{2l+1, 2m-1}} (\gamma_j A_{1j} Z_{j,i} - (Z_1 - Z_{N+1}) u_i) n_i dx + \int_{x^{2l-1, 2m-1}}^{x^{2l+1, 2m-1}} (\gamma_j A_{1j} Z_{j,i} - (Z_1 - Z_{N+1}) u_k) n_k dx +$$

$$+ \int_{x^{2l+1, 2m+1}}^{x^{2l-1, 2m+1}} (\gamma_j A_{1j} Z_{j,k} - (Z_1 - Z_{N+1}) u_i) n_i dx + \int_{x^{2l-1, 2m+1}}^{x^{2l+1, 2m+1}} (\gamma_j A_{1j} Z_{j,k} - (Z_1 - Z_{N+1}) u_i) n_i dx -$$

$$-\varepsilon^{2l, 2m-1} \Psi^{2l, 2m-1} - \varepsilon^{2l+1, 2m} \Psi^{2l+1, 2m} - \varepsilon^{2l, 2m+1} \Psi^{2l, 2m+1} - \varepsilon^{2l-1, 2m} \Psi^{2l-1, 2m} = 0, \quad (18)$$

где ε — знак ориентации ребра.

Учитывая, что $\Psi = 0$, $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$ на краях границы сопряжения, и заменяя в (18) производные границ $Z_{j,i}$ центральными разностями, приходим к системе сеточных уравнений:

$$A_{1j} \Big|_{x=x^{2l, 2m-1}} \frac{Z_j^{2l+1, 2m-1} - Z_j^{2l-1, 2m-1}}{x^{2l+1, 2m-1} - x^{2l-1, 2m-1}} -$$

$$- (Z_1^{2l, 2m-1} - Z_{N+1}^{2l, 2m-1}) u_1^{2l, 2m-1} - \varepsilon^{2l, 2m-1} \Psi^{2l, 2m-1} = 0 \quad (l = \overline{2, L-1}, m = \overline{2, M-1}),$$

$$A_{lj} \Big|_{x=x^{2l-1,2m}} \frac{Z_j^{2l-1,2m+1} - Z_j^{2l-1,2m-1}}{x^{2l-1,2m+1} - x^{2l-1,2m-1}} -$$

$$-\left(Z_1^{2l-1,2m} - Z_{N+1}^{2l-1,2m}\right) u_2^{2l-1,2m} - \varepsilon^{2l-1,2m} \Psi^{2l-1,2m} = 0 \quad (l = \overline{2, L-1}, m = \overline{2, M-1}). \quad (19)$$

Так как систему ограничений (19) можно явно разрешить относительно значений $u_1^{2l,2m-1}$ и $u_2^{2l-1,2m}$, то условная минимизация функционала $J(u_i, u_i)$ может быть осуществлена методом проекции градиента [7].

4. Численные результаты

В качестве тестового примера проведено исследование аналитического решения в расчетной области с однослойным поверхностным пластом в предположении малых деформациях границ слоев. Для описания течения в верхней (D_1) и нижней (D_2) подобластях использовались уравнения Стокса (1), которые представлялись в безразмерном виде. Для этого задавались масштабы длины, плотности, вязкости, давления, скорости и времени, характерные для геологических процессов [1]: $L = 400 \cdot 10^3$ м, $\rho_0 = 1000$ кг·м⁻³, $\mu_0 = 10^{22}$ Па·с, $p_0 = \rho_0 g L$, $u_0 = 0,001 \cdot \rho_0 g L^2 \cdot \mu_0^{-1}$, $t_0 = L \cdot u_0^{-1}$. Исходя из этого, безразмерные параметры слоев были следующими: $H_1 = 0,1$, $H_2 = 0,9$ — толщина верхнего и нижнего слоев, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 3,3$ — плотности слоев, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$ — вязкости слоев.

В начальный момент времени на границах Z_0 и Z_1 задавались малые деформации z_{10} и z_{20} соответственно. С помощью преобразований Фурье и Лапласа (см., например, [10]) получалось аналитическое решение для скоростей:

$$U_1 = (B_{11} \exp(-0,388401t) + B_{12} \exp(-0,000484t)) \sin x_1 \sin x_2,$$

$$U_2 = (B_{21} \exp(-0,388401t) + B_{22} \exp(-0,000484t)) \cos x_1 \cos x_2, \quad (20)$$

где коэффициенты $B_{i,j}$ составляют:

– в верхнем слое

$$B_{11} = ((0,399476x_3 + 0,07956)z_{10} + (0,00695 + 0,03491x_3)z_{20}) \operatorname{ch} x_3 +$$

$$+ ((0,37680 - 0,74164x_3)z_{10} + (-0,06482x_3 + 0,03293)z_{20}) \operatorname{sh} x_3,$$

$$B_{12} = ((0,08459x_3 - 0,07956)z_{10} + (0,09103 - 0,09679x_3)z_{20}) \operatorname{ch} x_3 +$$

$$+ ((0,10726 - 0,11109x_3)z_{10} + (0,12273x_3 - 0,12711)z_{20}) \operatorname{sh} x_3,$$

$$B_{21} = ((1,04884x_3 + 0,03206)z_{10} + (0,00280 + 0,09167x_3)z_{20}) \operatorname{ch} x_3 +$$

$$+ ((-1,16136 - 0,564945x_3)z_{10} + (-0,049376x_3 - 0,101502)z_{20}) \operatorname{sh} x_3,$$

$$B_{22} = ((0,15711x_3 - 0,03206)z_{10} + (0,03668 - 0,17976x_3)z_{20}) \operatorname{ch} x_3 +$$

$$+ ((-0,04459 - 0,11963x_3)z_{10} + (0,13688x_3 + 0,05102)z_{20}) \operatorname{sh} x_3;$$

– в нижнем слое:

$$B_{11} = ((0,04264z_{20} + 0,48788z_{10})x_3) \operatorname{ch} x_3 + ((-0,86506z_{10} - 0,07560z_{20})x_3 + 0,04264z_{20} + 0,48788z_{10}) \operatorname{sh} x_3,$$

$$B_{12} = (0,00436z_{20} - 0,00381z_{10})x_3 \operatorname{ch} x_3 + ((0,0123z_{10} - 0,01410z_{20})x_3 + 0,00436z_{20} - 0,00381z_{10}) \operatorname{sh} x_3,$$

$$B_{21} = (0,10692z_{20} + 1,2234z_{10})x_3 \operatorname{ch} x_3 + ((-0,68997z_{10} - 0,060303z_{20})x_3 - 1,2234z_{10} - 0,10692z_{20}) \operatorname{sh} x_3,$$

$$B_{22} = (0,01995z_{20} - 0,01743z_{10})x_3 \operatorname{ch} x_3 + ((0,00539z_{10} - 0,00617z_{20})x_3 - 0,01995z_{20} + 0,01743z_{10}) \operatorname{sh} x_3.$$

Деформации границы слоев находились по формулам:

$$z_1 = ((0,92903z_{10} + 0,08120z_{20}) \exp(-0,388401t) +$$

$$+ (-0,08120z_{20} + 0,07097) \exp(-0,000484t)) \cos x_1 \cos x_2,$$

$$z_2 = ((0,07097z_{20} + 0,81197z_{10}) \exp(-0,388401t) +$$

$$+ (0,92903z_{20} - 0,81197z_{10}) \exp(-0,000484t)) \cos x_1 \cos x_2. \quad (21)$$

При вычислении приближенного решения возмущения границ слоев в начальный момент времени находились по формулам (21) со значениями $z_{10}=0,00005$ и $z_{20}=-0,0006$. Затем по полю скоростей в нижней подобласти D_2 определялись скорости и давление в верхней подобласти D_1 с учетом скорости на границе сопряжения Z_{N+1} в соответствии с формулами (8)–(10). Задача решалась на сетке $15 \times 15 \times 11$. Размерность системы разностных уравнений получилась равной 7842.

Для сравнения данных численного решения без применения и с применением асимптотического условия на рисунке 3 показана проекция поля скоростей движения жидкости на боковой границе $x_2 = 0$ в момент времени $t = 100$. Как видно из графиков, наблюдается значительное расхождение результатов в приповерхностной области, где вертикальная скорость меняет знак на противоположный. Поля скоростей на остальных боковых границах не приводятся, так как там получается аналогичная рисунку 3 картина.

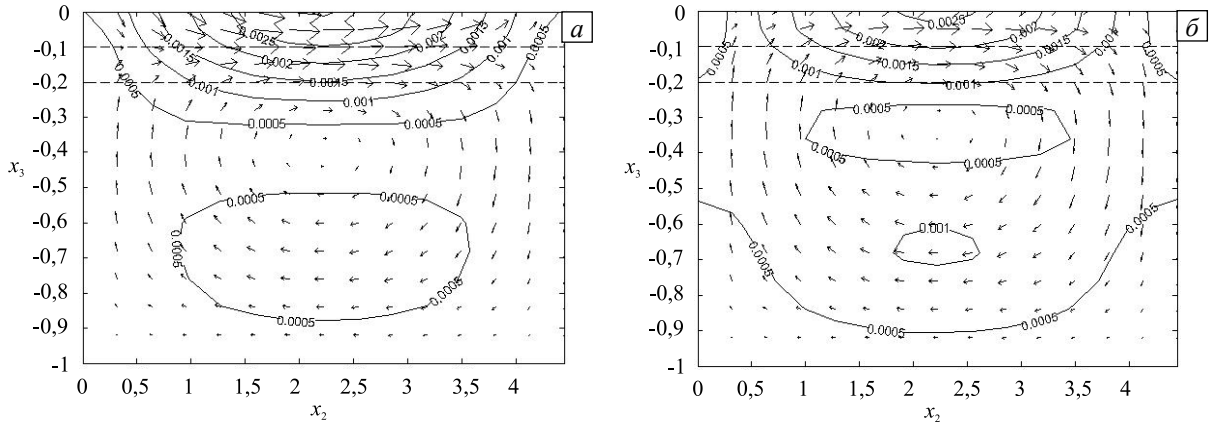


Рис. 3. Проекция поля скоростей на боковой границе $x_2 = 0$ в момент времени $t = 100$, полученного без применения (а) и с применением (б) асимптотического условия

На рисунке 4 показана проекция поля скоростей движения жидкости на поверхности z_0 в момент времени $t = 100$. Из сравнения результатов следует, что направления скоростей в обоих вариантах расчета почти совпадают, расхождения наблюдаются лишь в модуле скорости.

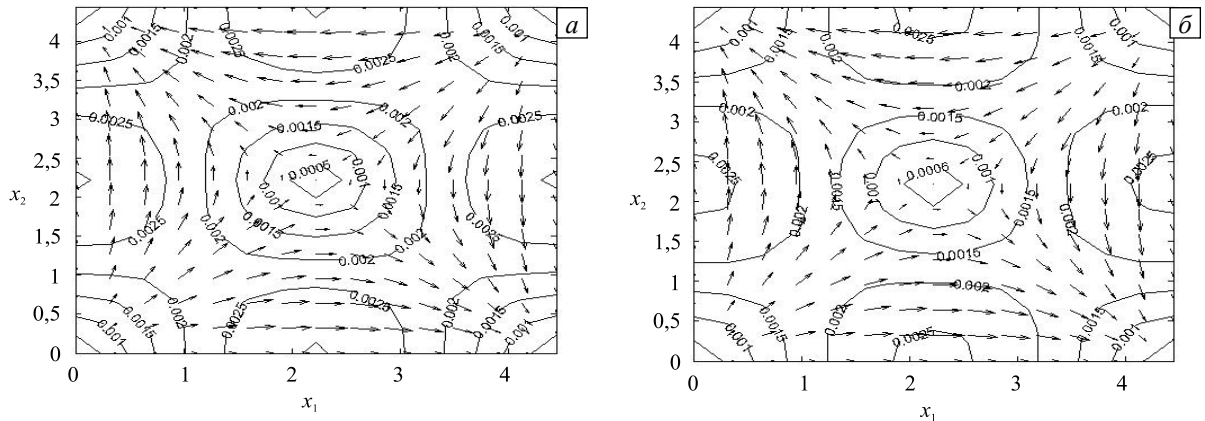


Рис. 4. Проекция поля скоростей на поверхности z_0 в момент времени $t = 100$, полученного без применения (а) и с применением (б) асимптотического условия

Для наглядного представления погрешности аппроксимации численного решения на рисунке 5 приведены профили горизонтальной скорости u_1 (вдоль линии $x_1 = 2,22, x_2 = 0$) и вертикальной скорости u_3 (вдоль линии $x_1 = 0, x_2 = 0$) в момент времени $t = 100$. Сплошной линией обозначено точное аналитическое решение, сплошной линией с круглыми маркерами — численное решение, полученное с применением асимптотического условия, сплошной линией с квадратными маркерами — численное решение, полученное без применения асимптотического условия, пунктирными линиями — уровни границ слоев. Таким образом, применение асимптотического условия позволяет получить численное решение с большей точностью. Максимальная погрешность аппроксимации горизонтальных скоростей, которая вычислялась по формуле

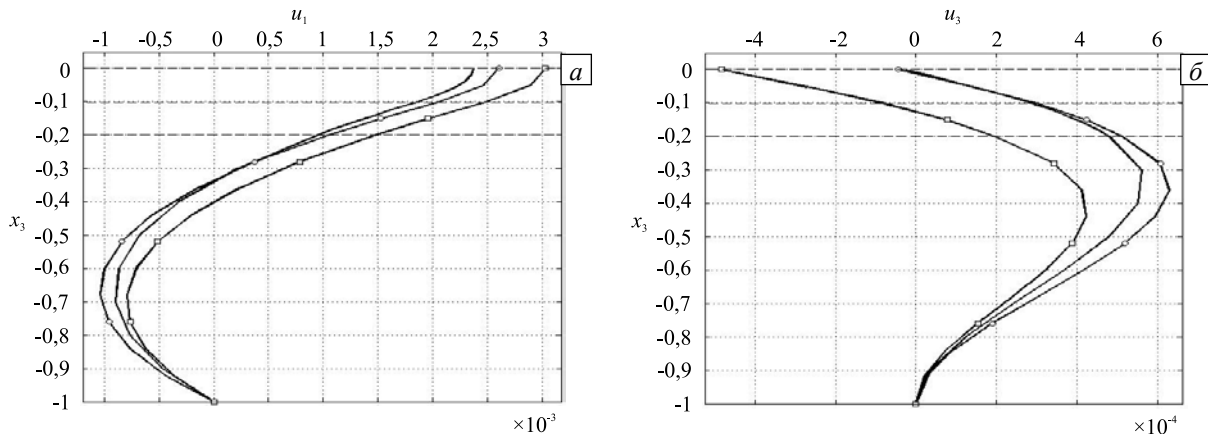


Рис. 5. Профили скорости в момент времени $t=100$: u_1 (а) вдоль линии $x_1=0$, $x_2=0$ и u_3 (б) вдоль линии $x_1=0$, $x_2=0$

$$\eta = \frac{\max |U_i - u_i|}{\max |U_i|}, \quad (22)$$

без применения асимптотического условия получилась равной $\eta=9,7\%$, а без применения этого условия — $\eta=27,78\%$. Сравнение профилей вертикальной скорости u_3 вдоль линии $x_1=0$, $x_2=0$ в момент времени $t=100$ показывает, что применение асимптотического условия позволяет получить хорошую точность аппроксимации численного решения. Без применения этого условия имеет место значительное расхождение с точным решением. Максимальная погрешность аппроксимации вертикальной скорости с применением асимптотического условия по формуле (22) получилась равной $\eta=13,15\%$, без применения этого условия — $\eta=82,47\%$.

В работе [11] получены аналитические решения для уравнения Стокса при различных вариантах задания вязкости и плотности с целью тестирования программ численного расчета вязких течений. Один из таких тестов использовался здесь для сравнительного анализа точности предлагаемой модели. Распределение вязкости задавалось в виде функций $\mu = 1000 - 999 / (1 + \exp(-100(x_3 - 0,5)))$ со скачком на три порядка на уровне $x_3 = 0,5$. Верхняя подобласть разбивалась на два слоя, в каждом из которых задавались усредненные значения вязкости и плотности. На рисунке 6 представлены поле скоростей и графики максимума модуля скорости течения, полученные с помощью предлагаемой модели, и данные из [11]. В расчетах число узлов расчетной сетки по координатам x_2 и x_3 задавалось одинаковым, а по координате x_1 оно равнялось 9. Как видно из сравнения этих графиков, данная модель позволяет получить решение с хорошей точностью на сетках меньшей размерности, чем с помощью схемы сквозного счета, представленной в [11], так как численная задача решается только для нижней подобласти D_2 .

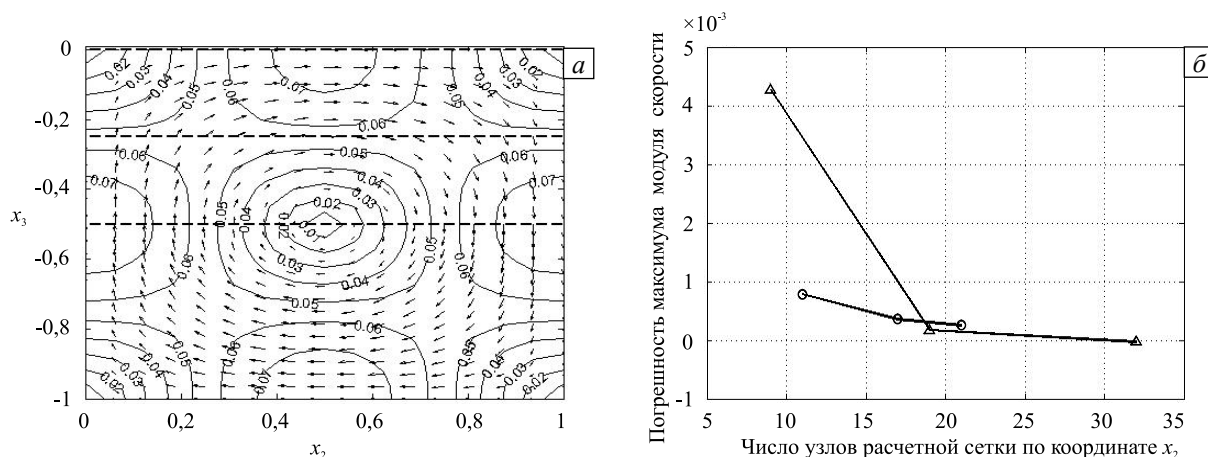


Рис. 6. Результаты решения тестовой задачи: проекция поля скоростей на боковой границе $x_2=0$ (а); численные решения при различных сетках (б); сплошной линией с круглыми маркерами показано решение, полученное с помощью предлагаемой модели, линией с треугольными маркерами – решение из [11]

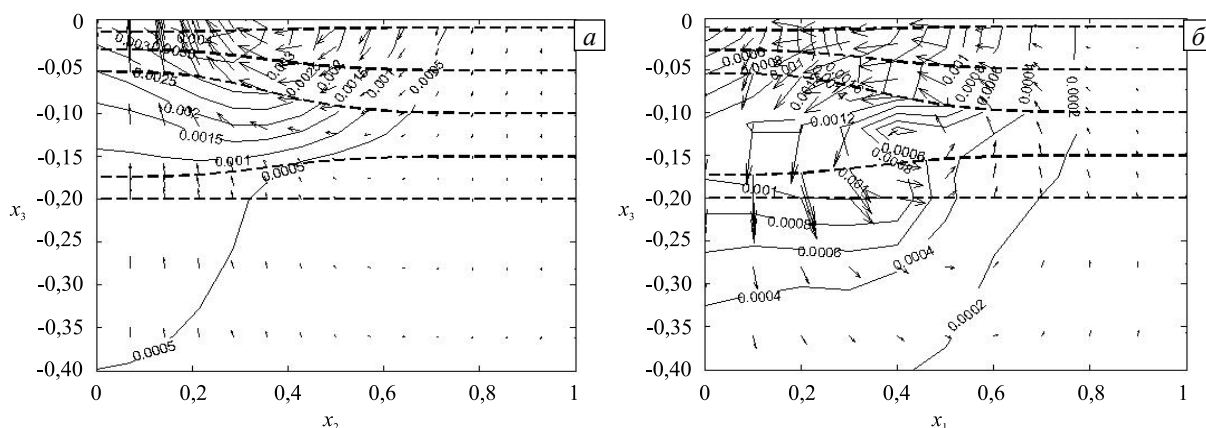


Рис. 7. Проекция поля скоростей на боковой границе $x_2=0$, полученного для области с 3-слойным пластом: без применения (а) и с применением (б) асимптотического условия; пунктирными линиями обозначены границы пласта, тонкими сплошными линиями – изолинии модуля скорости, стрелками – направления скорости

На рисунке 7 приводятся результаты расчетов поля скоростей с помощью асимптотического условия (16) для расчетной области с трехслойным пластом при вязкостях слоев $[0,1; 1; 0,1]$

и плотностях $[3; 3,2; 3,3]$. Рельеф границ задавался в виде функций $z_i = C_i \exp\left(-\frac{x_1^2}{0,08}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{0,08}\right)$, где $C_i = [-0,005; 0,025; 0,05; -0,025]$ — амплитуды возмущения границы z_i . Из-за малой толщины пласта поле скоростей показано только в верхней части расчетной области. Результаты свидетельствуют, что разработанная модель позволяет учитывать подробную слоистую структуру поверхностного пласта.

Таким образом, с помощью асимптотического условия (16) получено численное решение с хорошей точностью без какого-либо итерационного уточнения, применяемого в большинстве ранее разработанных комплексных моделей [2, 3].

5. Заключение

Разработана совместная численная модель для описания трехмерного течения в области, состоящей из относительно толстого вязкого слоя и тонкого поверхностного многослойного пласта переменной мощности, которая соединяет в себе уравнения Стокса с уравнениями Рейнольдса. В качестве дополнительного условия сопряжения разнородных уравнений используется уравнение, связывающее смещения границ пласта со скоростями на границе между пластом и слоем. Выполнена численная реализации этого условия с помощью метода проекции градиента при трехмерном варианте расчетной области. Для оценки точности численной модели получено аналитическое решение в области с однослойным пластом. Результаты моделирования показали, что использование асимптотического ограничения позволяет получить поле скоростей на больших временах с хорошей точностью без использования каких-либо уточняющих итерационных процедур.

Литература

1. Schubert G., Turcotte D.L., Olsen P. Mantle convection in the Earth and planets. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 956 p. DOI
2. Tan E., Choi E., Nhoutreddy P., Gurnis M., Aivazis M. GeoFramework: Coupling multiple models of mantle convection within a computational framework // Geochemistry. Geophysics. Geosystems. – 2006. – Vol. 7, no. 6. – Q06001. DOI
3. Lavier L.L., Manatschal G. A mechanism to thin the continental lithosphere at magma-poor margins // Nature. – 2006. – Vol. 440, no. 7082. – P. 324-328. DOI
4. Bonnardot M.-A., Hassani R., Tric E. Numerical modelling of lithosphere-asthenosphere interaction in a subduction zone // Earth Planet. Sc. Lett. – 2008. – Vol. 272, no. 3-4. – P. 698-708. DOI
5. Пак В.В. Применение метода проекции градиента к численному решению совместной системы уравнений Стокса и уравнений Рейнольдса // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 23-29. DOI
6. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81, no. 3. – P. 1131-1198. DOI
7. Пак В.В. Применение метода проекции градиента к численному решению трехмерной задачи Стокса // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 93-102. DOI
8. Fortin M. Old and new finite-elements for incompressible flows // Int. J. Numer. Meth. Fl. – 1981. – Vol. 1, no. 4. – P. 347-364. DOI

9. Борисов В.Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t // Матем. сб. – 1988. – Т. 131(173), № 3(11). – С. 293-308. (English version [DOI](#)).
10. Hu J., Millet S., Botton V., Ben Hadid H., Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification // Phys. Fluids. – 2006. – Vol. 18, no. 10. – 104101. [DOI](#)
11. Трубицын В.П., Баранов А.А., Евсеев А.Н., Трубицын А.П. Точные аналитические решения уравнения Стокса для тестирования уравнений мантийной конвекции с переменной вязкостью // Физика Земли. – 2006. – № 7. – С. 3-11. (English version [DOI](#)).

References

1. Schubert G., Turcotte D.L., Olsen P. *Mantle convection in the Earth and planets*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 956 p. [DOI](#)
2. Tan E., Choi E., Nhoutireddy P., Gurnis M., Aivazis M. GeoFramework: Coupling multiple models of mantle convection within a computational framework. *Geochemistry. Geophysics. Geosystems*, 2006, vol. 7, no. 6, Q06001. [DOI](#)
3. Lavier L.L., Manatschal G. A mechanism to thin the continental lithosphere at magma-poor margins. *Nature*, 2006, vol. 440, no. 7082, pp. 324-328. [DOI](#)
4. Bonnardot M.-A., Hassani R., Tric E. Numerical modelling of lithosphere-asthenosphere interaction in a subduction zone. *Earth Planet. Sc. Lett.*, 2008, vol. 272, no. 3-4, pp. 698-708. [DOI](#)
5. Pak V.V. Using the projection gradient method for the numerical solution of the coupled system of Stokes and Reynolds equations. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 23-29. [DOI](#)
6. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131-1198. [DOI](#)
7. Pak V.V. Application of the gradient projection method for numerical solving the three-dimensional Stokes problem. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 93-102. [DOI](#)
8. Fortin M. Old and new finite-elements for incompressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1981, vol. 1, no. 4, pp. 347-364. [DOI](#)
9. Borisov V.G. On parabolic boundary value problems with a small parameter on the derivatives with respect to t . *Mathematics of the USSR - Sbornik*, 1988, vol. 59, no. 2, pp. 287-302. [DOI](#)
10. Hu J., Millet S., Botton V., Ben Hadid H., Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, no. 10, 104101. [DOI](#)
11. Trubitsyn V.P., Baranov A.A., Evseev A.N., Trubitsyn A.P. Exact analytical solutions of the Stokes equation for testing the equations of mantle convection with a variable viscosity. *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, 2006, vol. 42, no 7, pp. 537-545. [DOI](#)

Поступила в редакцию 07.11.2014; опубликована в электронном виде 31.03.2015