

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.8.1.5

УДК 519.63

## БЕСПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕРМОКОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КАВЕРНАХ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ РЭЛЕЯ

В.М. Головизнин<sup>1</sup>, И.А. Короткин<sup>2</sup>, С.А. Финогенов<sup>2</sup><sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Российская Федерация

Представлены результаты численного решения двумерной и трехмерной задачи Дэвиса — задачи терموконвекции в квадратной (кубической) каверне с вертикальной подогреваемой стенкой при числах Рэлея от  $10^4$  до  $10^{14}$ . В этот диапазон попадают как ламинарные течения, так и сильно развитые турбулентные. Для описания турбулентных течений обычно используются модели турбулентности, параметры которых зависят от числа Рэлея и нуждаются в настройке. Альтернативой являются методы прямого численного моделирования (DNS), требующие экстремально больших расчетных сеток. В последнее время усилился интерес к методам DNS с неполным разрешением, которые в ряде случаев позволяют получать приемлемые результаты на масштабах больших, чем колмогоровские. На основе такого подхода строятся так называемые «беспараметрические» вычислительные алгоритмы, охватывающие широкий диапазон чисел Рэлея и предназначенные для расчета интегральных характеристик теплопереноса на относительно грубых сетках. В работе описан новый численный метод решения уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска на основе схемы КАБАРЕ. Этот метод не опирается на какие-либо модели турбулентности и не содержит настроечных параметров. Он обладает вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству на неравномерных расчетных сетках и довольствуется минимально возможным шаблоном разностной схемы. Тестирование метода на задаче Дэвиса и последовательности сгущающихся сеток показало, что он обладает способностью с высокой точностью находить интегральные тепловые потоки для ламинарных и сильно турбулентных течений. При этом точность в несколько процентов при числах Рэлея до  $10^{14}$  достигается на рекордно грубой, сгущающейся к границам области сетке размерностью  $20 \times 20$  ячеек. Однозначного и исчерпывающего объяснения этого вычислительного феномена пока не найдено. Выражается осторожный оптимизм относительно перспектив применения нового метода для расчетов термоконвекции при малых числах Прандтля, присущих жидким металлам.

*Ключевые слова:* естественная конвекция, турбулентные течения, беспараметрический вычислительный метод

## PARAMETER-FREE NUMERICAL METHOD FOR MODELING THERMAL CONVECTION IN SQUARE CAVITIES IN A WIDE RANGE OF RAYLEIGH NUMBERS

V.M. Goloviznin<sup>1</sup>, I.A. Korotkin<sup>2</sup> and S.A. Finogenov<sup>2</sup><sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation<sup>2</sup>Nuclear Safety Institute RAS, Moscow, Russian Federation

Some computational results for the two and three-dimensional Davis benchmark are presented. This benchmark represents thermal convection in a square (cubical) cavity with vertical active walls in a wide range of Rayleigh numbers ( $10^4$  to  $10^{14}$ ), which covers both laminar and highly turbulent flows. A turbulence model with parameters that depend on a Rayleigh number and require adjustment is usually used to describe turbulent flows. An alternative is Direct Numerical Simulation (DNS) methods, but they demand extremely large computational grids. Recently there has been an increasing interest in DNS methods with incomplete resolution, which are able to provide in some cases acceptable results without resolving Kolmogorov scales. On the basis of such an approach the so-called parameter-free computational techniques have been developed. These methods cover wide range of Rayleigh numbers and allow computing various integral properties of heat transport on relatively coarse computational grids. In this paper, a new numerical method based on the CABARET scheme is proposed for solving Navier–Stokes equations with Boussinesq approximation. This turbulent model-free technique includes no additional parameters and has a second-order approximation scheme in time and space on uniform and non-uniform computational grids with minimal computational stencil. Testing of the technique on the Davis benchmark and the sequence of refined grids shows that the method allows one to compute integral heat fluxes with a high degree of accuracy both for laminar and highly turbulent flows. For the Rayleigh numbers up to  $10^{14}$ , a several percent accuracy has been achieved on an extremely coarse grid consisting of  $20 \times 20$  cells refined toward boundary. There is no a definite and comprehensive explanation of this computational phenomenon. Cautious optimism exists regarding the perspectives of using the new method of thermal convection computations for low Prandtl numbers typical of liquid metals.

*Key words:* natural convection, turbulent flows, parameter-free computational method

### 1. Введение

Задача естественной конвекции в замкнутых областях при заданных температурах на поверхностях встречается во многих инженерно-технических приложениях: от обычных стеклопакетов в окнах до систем охлаждения атомных реакторов. Несмотря на длительную историю развития и большое число публикаций, посвященных численному моделированию естественной конвекции, проблема предсказательного моделирования свободноконвективного течения при очень больших числах Рэлея (порядка  $10^{11}$ - $10^{14}$ ) продолжает оставаться актуальной. Для решения таких задач требуются очень подробные сетки в пристеночной области для разрешения пограничного слоя. Именно в тонком пограничном слое сосредоточивается основной перепад температур и происходит вихревой теплообмен со стенкой. Толщину этого слоя можно оценить по формуле [1]:

$$\delta = \left( \frac{L_y L_x^3}{Gr} \right)^{1/4} = \left( \frac{L_y L_x^3}{Ra} Pr \right)^{1/4}. \quad (1)$$

Здесь:  $Gr$ ,  $Ra$ ,  $Pr$  — основные безразмерные параметры, характеризующие геометрию области, граничные условия и физические свойства теплоносителя;  $L_x$  и  $L_y$  — геометрические размеры области по горизонтали и вертикали соответственно.

Из (1) видно, что уже при числе Рэлея  $10^{11}$  в единичной квадратной области, заполненной воздухом ( $Pr = 0,71$ ), образуется пограничный слой толщиной в  $1/600$  ширины области. Иными словами, для корректного моделирования пристенного течения при данном числе Рэлея потребуется очень подробная сетка даже при двумерной постановке задачи. Между тем в промышленных установках встречаются конвективные течения с числом Рэлея до  $10^{17}$ .

Развитие технологии массивных параллельных вычислений позволяет на сегодняшний день рассчитывать задачи на сетках, состоящих из сотен миллионов ячеек. Так, в работе [2] приведены результаты прямого численного моделирования (DNS) тепловой конвекции в трехмерной прямоугольной камере при числе Рэлея  $10^{11}$  на сетке  $128 \times 682 \times 1278$  ячеек (порядка 100 миллионов расчетных узлов). Однако до сих пор такие расчеты являются очень дорогими и длительными, а при еще больших числах Рэлея выходят за пределы возможностей существующих вычислительных комплексов.

Таким образом, несмотря на значительные успехи в области прямого математического моделирования турбулентности, инженерная практика продолжает базироваться на полуэмпирических моделях турбулентности [3], параметры которых настраиваются и заметно отличаются для различных классов течений. Недостатком такого подхода является ограниченность его предсказательной силы, и, в идеале, хотелось бы освободиться от настроечных параметров не только в алгоритмах DNS, но и при расчетах на достаточно грубых сетках, когда все пространственные масштабы заведомо не разрешаются.

В работе [4] была предпринята попытка построения относительно грубой беспараметрической математической модели, описывающей термоконвекцию в прямоугольной полости с аспектным отношением 4 для чисел Рэлея вплоть до  $10^{17}$ , которая привела к верным количественным результатам при  $Ra \leq 10^{11}$  и описала асимптотику интегрального теплового потока при  $10^{11} \leq Ra \leq 10^{17}$ . Этот результат был получен посредством регуляризации конвективных потоков для сеток с заданным законом сгущения при фиксированном числе Прандтля  $Pr = 0,71$ . Хотя сама процедура регуляризации и содержала свободные параметры, однако они были настроены таким образом, что в дальнейшем не требовали уточнений. Следовательно, качество решения в предложенном алгоритме зависит только от числа расчетных точек по каждому из пространственных направлений, и число это много меньше необходимого для DNS расчетов.

Построение беспараметрических моделей термоконвекции в прямоугольных областях с различным аспектным отношением в широком диапазоне чисел Рэлея и различными (в том числе и малыми) числами Прандтля само по себе представляет актуальную задачу. Конечная же цель состоит в построении таких моделей для областей достаточно произвольной формы.

В работах [5], [6] предложена схема КАБАРЕ для численного решения уравнений Эйлера, обладающая рядом уникальных свойств. В частности, эта схема бездиссипативна для течений, в которых характеристические функции, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Двумерные вихри с неподвижной осью в расчетах по этой схеме не затухают. Для обеспечения монотонности в схеме КАБАРЕ применяется процедура нелинейной коррекции потоков, основанная на принципе максимума и не содержащая каких-либо настроечных параметров, то есть она является беспараметрической. В настоящей работе приводится обобщение схемы КАБАРЕ на случай вязкой несжимаемой жидкости и исследуется ее применимость для расчета задач термоконвекции в диапазоне чисел Рэлея, представляющем интерес для промышленных приложений.

## 2. Математическая модель

Рассмотрим естественную конвекцию несжимаемой жидкости (газа) в прямоугольнике (двумерная постановка) со сторонами  $H \times L$ , где  $H$  — высота области,  $L$  — ее ширина (Рис. 1). Температуры левой и правой стенок постоянны и равны, соответственно,  $T_L$  и  $T_R$ ,  $T_L < T_R$ . Верхняя и нижняя стенки теплоизолированы. Вектор силы тяжести  $\mathbf{g}$  направлен вниз вдоль оси  $y$ . На всех четырех стенках обе компоненты скорости жидкости обращаются в нуль (условие прилипания).

Термоконвекция описывается системой нестационарных уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска:

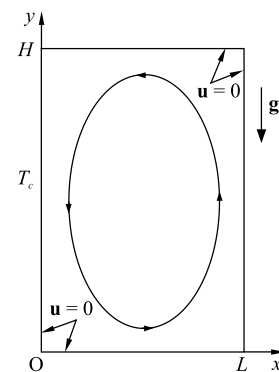


Рис. 1. Тепловая конвекция в прямоугольной области

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \beta \mathbf{g}(T - T_0), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \Delta T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ T(t, x, y)|_{x=0} = T_c, \quad T(t, x, y)|_{x=L} = T_h, \\ \mathbf{u}(t, x, y)|_{\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(t, x, y)|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь:  $T(t, x, y)$  — температура;  $\mathbf{u}(t, x, y)$  — вектор скорости;  $\nu$  — кинематическая вязкость ( $\nu = \mu/\rho$ , где  $\mu$  и  $\rho$  — динамическая вязкость и плотность);  $\alpha$  — коэффициент температуропроводности ( $\alpha = \kappa \cdot (c_p \rho)^{-1}$ , где  $\kappa$  и  $c_p$  — коэффициент теплопроводности и теплоемкость);  $\beta$  — коэффициент объемного теплового расширения;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $T_0$  — равновесная температура;  $P(t, x, y)$  — давление.

Характер течения определяется главным образом двумя основными безразмерными параметрами. Это, соответственно, числа Рэлея и Прандтля:

$$\text{Ra} = \frac{\beta g (T_h - T_c) L^3}{\alpha \nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Возникающий между изотермическими стенками теплообмен характеризуется безразмерным параметром — числом Нуссельта. Среднее число Нуссельта, например, левой стенки вычисляется следующим образом:

$$\text{Nu}_{\text{wall}} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\rangle \frac{L}{T_h - T_c}.$$

Число Нуссельта представляет собой отношение среднего потока тепла при наличии конвекции к потоку тепла, переносимому молекулярной теплопроводностью.

### 3. Дискретизация задачи

Будем рассматривать как двумерные, так и трехмерные задачи. Для компактности изложения постановку дискретной задачи и вычислительного алгоритма опишем в двумерном виде. Обобщение на трехмерный случай представляется достаточно тривиальным.

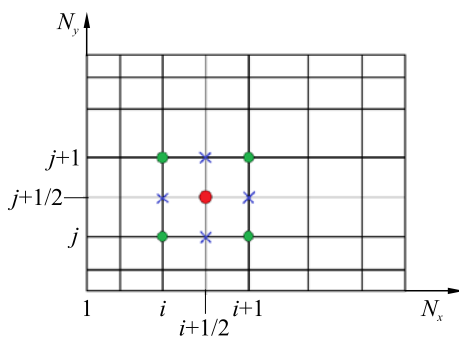


Рис. 2. Наложение на расчетную область регулярной прямоугольной сетки

На расчетную область  $H \times L$  наложим прямоугольную расчетную сетку с  $N_y$  узлами по вертикали и  $N_x$  узлами по горизонтали (Рис. 2). Пронумеруем узлы по горизонтальной оси от 1 до  $N_x$ , а по вертикальной — от 1 до  $N_y$ . Таким образом, получим прямоугольную сетку, содержащую  $N_x \times N_y$  узлов или  $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$  ячеек.

Сетка может сгущаться к границам расчетной области. В таком случае координаты узлов, например по направлению  $x$ , будут определяться по формуле:

$$x_i = \frac{L}{2 \text{th}(R)} \text{th} \left( \frac{2R[i - 1 - (N_x - 1)/2]}{N_x - 1} \right) + \frac{L}{2} \quad (i = 1, \dots, N_x),$$

где  $R$  — положительный коэффициент сгущения; чем больше  $R$ , тем сильнее сгущение сетки к краям области.

Схема КАБАРЕ оперирует двумя типами переменных: консервативными — относящимися к центрам ячеек, и потоковыми — относящимися к центрам граней ячеек (Рис. 2). Консервативные переменные будут иметь дробную нумерацию, потоковые — смешанную. При численном решении уравнений Навье–Стокса

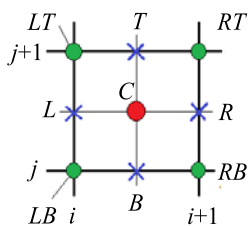


Рис. 3. Локальные обозначения переменных

потребуется решение уравнения для давления. Давление, как и дивергенция скорости, рассчитанная по консервативным переменным, будет относиться к узлам расчетной сетки и иметь целочисленную нумерацию. В ряде случаев для упрощения записи будем использовать также буквенную индексацию.

Пусть у каждой переменной верхний индекс отвечает номеру слоя по времени, нижний — пространственному положению на расчетной сетке, для чего введем локальные буквенные индексы, как показано на рисунке 3. Обозначим консервативные переменные (компоненты скорости и температуру, соответственно) прописными буквами  $U, V, T$ , потоковые компоненты скорости и температуру — строчными буквами  $u, v, \theta$ , горизонтальный шаг сетки (расстояние между узлами) —  $h_x$ , вертикальный —  $h_y$ , шаг по времени —  $\tau$ .

Использование схемы КАБАРЕ при описании термоконвекции системой нестационарных уравнений (2) удобно представить в виде трех этапов (фаз).

Фаза 1. Вычисляются значения консервативных переменных на промежуточном временном слое:

$$\frac{T_C^{n+1/2} - T_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n \theta_R^n - u_L^n \theta_L^n}{h_x} + \frac{v_T^n \theta_T^n - v_B^n \theta_B^n}{h_y} = \alpha \cdot \Delta_h T_C^n, \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\tilde{U}_C^{n+1/2} - U_C^n}{\tau/2} + \frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{u_T^n v_T^n - u_B^n v_B^n}{h_y} = v \cdot \Delta_h U_C^n + \beta \cdot g_x (T_C^n - T_0), \\ \frac{\tilde{V}_C^{n+1/2} - V_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n v_R^n - u_L^n v_L^n}{h_x} + \frac{(v_T^n)^2 - (v_B^n)^2}{h_y} = v \cdot \Delta_h V_C^n + \beta \cdot g_y (T_C^n - T_0), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{U_C^{n+1/2} - \tilde{U}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(p_{RT}^{n+1/2} + p_{RB}^{n+1/2}) - (p_{LT}^{n+1/2} + p_{LB}^{n+1/2})}{2h_x}, \\ \frac{V_C^{n+1/2} - \tilde{V}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(p_{RT}^{n+1/2} + p_{LT}^{n+1/2}) - (p_{RB}^{n+1/2} + p_{LB}^{n+1/2})}{2h_y}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\operatorname{div}_h(\mathbf{W}_C^{n+1/2}) = 0; \quad \mathbf{W}_C^{n+1/2} = (U_C^{n+1/2}, V_C^{n+1/2}). \quad (6)$$

Здесь  $\Delta_h(\cdot)_C$  — разностный лапласиан, и  $\operatorname{div}_h(\cdot)$  — разностная дивергенция есть

$$\begin{aligned} \Delta_h(F)_C &= \frac{1}{(h_x)_C} \cdot \left[ \frac{F_{i+3/2, j+1/2} - F_{i+1/2, j+1/2}}{(h_x)_{i+1}} - \frac{F_{i+1/2, j+1/2} - F_{i-1/2, j+1/2}}{(h_x)_i} \right] + \\ &+ \frac{1}{(h_y)_C} \cdot \left[ \frac{F_{i+1/2, j+3/2} - F_{i+1/2, j+1/2}}{(h_y)_{j+1}} - \frac{F_{i+1/2, j+1/2} - F_{i+1/2, j-1/2}}{(h_y)_j} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h(\mathbf{W}_C^{n+1/2}) &= \operatorname{div}_h(\mathbf{W}_C^{n+1/2})_{i,j} = \frac{1}{(h_x)_i} \cdot \left( \frac{U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + U_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2}}{2} - \frac{U_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2, j-1/2}^{n+1/2}}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{(h_y)_j} \cdot \left( \frac{V_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + V_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{2} - \frac{V_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2} + V_{i-1/2, j-1/2}^{n+1/2}}{2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $(h_x)_C = (h_x)_{i+1/2}$ ;  $(h_x)_i = 0,5 \cdot [(h_x)_{i+1/2} + (h_x)_{i-1/2}]$ ;  $(h_y)_C = (h_y)_{j+1/2}$ ;  $(h_y)_j = 0,5 \cdot [(h_y)_{j+1/2} + (h_y)_{j-1/2}]$ .

Разностные уравнения (3), (4) разрешаются явно. Подстановка соотношений (5) в (6) приводит к сеточному уравнению Пуассона для давления:

$$(\Delta_h p^{n+1/2})_{i,j} = \frac{2}{\tau} \operatorname{div}_h(\mathbf{W}_C^{n+1/2})_{i,j}, \quad (9)$$

в котором сеточный оператор Лапласа отличен от (7) и имеет вид:

$$\begin{aligned} (\Delta_h p^{n+1/2})_{i,j} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(h_x)_i} \cdot \left[ \frac{(p_{i+1, j+1}^{n+1/2} + 2p_{i+1, j}^{n+1/2} + p_{i+1, j-1}^{n+1/2}) - (p_{i, j+1}^{n+1/2} + 2p_{i, j}^{n+1/2} + p_{i, j-1}^{n+1/2})}{(h_x)_{i+1/2}} - \right. \\ &\left. - \frac{(p_{i, j+1}^{n+1/2} + 2p_{i, j}^{n+1/2} + p_{i, j-1}^{n+1/2}) - (p_{i-1, j+1}^{n+1/2} + 2p_{i-1, j}^{n+1/2} + p_{i-1, j-1}^{n+1/2})}{(h_x)_{i-1/2}} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(h_y)_j} \cdot \left[ \frac{(p_{i+1,j+1}^{n+1/2} + 2p_{i,j+1}^{n+1/2} + p_{i-1,j+1}^{n+1/2}) - (p_{i+1,j}^{n+1/2} + 2p_{i,j}^{n+1/2} + p_{i-1,j}^{n+1/2})}{(h_y)_{j+1/2}} - \frac{(p_{i+1,j}^{n+1/2} + 2p_{i,j}^{n+1/2} + p_{i-1,j}^{n+1/2}) - (p_{i+1,j-1}^{n+1/2} + 2p_{i,j-1}^{n+1/2} + p_{i-1,j-1}^{n+1/2})}{(h_y)_{j-1/2}} \right]. \quad (10)$$

Фаза 2. Рассчитываются потоковые величины скоростей и температур на новом временном слое. Для вертикальных граней путем линейной экстраполяции вычисляются пары  $\{(\tilde{u}_L)_i^{n+1}, (\tilde{u}_R)_i^{n+1}\}$ ,  $\{(\tilde{v}_L)_i^{n+1}, (\tilde{v}_R)_i^{n+1}\}$ ,  $\{(\tilde{\theta}_L)_i^{n+1}, (\tilde{\theta}_R)_i^{n+1}\}$ , в которых одна из величин прилегает к данной грани слева, а другая — справа:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_L)_i^{n+1} &= 2U_{CL} - u_{i-1}^n, & (\tilde{v}_L)_i^{n+1} &= 2V_{CL} - v_{i-1}^n, & (\tilde{\theta}_L)_i^{n+1} &= 2T_{CL} - \theta_{i-1}^n, \\ (\tilde{u}_R)_i^{n+1} &= 2U_{CR} - u_{i+1}^n, & (\tilde{v}_R)_i^{n+1} &= 2V_{CR} - v_{i+1}^n, & (\tilde{\theta}_R)_i^{n+1} &= 2T_{CR} - \theta_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Затем эти значения подвергаются нелинейной коррекции, базирующейся на принципе максимума:

$$(f_L)_i^{n+1} = \begin{cases} (\tilde{f}_L)_i^{n+1} & \text{если } \min(f)_{i-1/2}^{n+1} \leq (\tilde{f}_L)_i^{n+1} \leq \max(f)_{i-1/2}^{n+1}, \\ \min(f)_{i-1/2}^{n+1} & \text{если } \min(f)_{i-1/2}^{n+1} > (\tilde{f}_L)_i^{n+1}, \\ \max(f)_{i-1/2}^{n+1} & \text{если } \max(f)_{i-1/2}^{n+1} \leq (\tilde{f}_L)_i^{n+1}; \end{cases}$$

$$(f_R)_i^{n+1} = \begin{cases} (\tilde{f}_R)_i^{n+1} & \text{если } \min(f)_{i+1/2}^{n+1} \leq (\tilde{f}_R)_i^{n+1} \leq \max(f)_{i+1/2}^{n+1}, \\ \min(f)_{i+1/2}^{n+1} & \text{если } \min(f)_{i+1/2}^{n+1} > (\tilde{f}_R)_i^{n+1}, \\ \max(f)_{i+1/2}^{n+1} & \text{если } \max(f)_{i+1/2}^{n+1} \leq (\tilde{f}_R)_i^{n+1}, \end{cases}$$

где  $f$  — любая из переменных  $\{u, v, \theta\}$ , при этом

$$\begin{aligned} \min(f)_{i-1/2}^{n+1} &= \min\{f_{i-1}^n, F_{i-1/2}^n, f_i^n\} + \tau \cdot Q_{f, i-1/2}, & \max(f)_{i-1/2}^{n+1} &= \max\{f_{i-1}^n, F_{i-1/2}^n, f_i^n\} + \tau \cdot Q_{f, i-1/2}, \\ \min(f)_{i+1/2}^{n+1} &= \min\{f_{i+1}^n, F_{i+1/2}^n, f_i^n\} + \tau \cdot Q_{f, i+1/2}, & \max(f)_{i+1/2}^{n+1} &= \max\{f_{i+1}^n, F_{i+1/2}^n, f_i^n\} + \tau \cdot Q_{f, i+1/2}, \\ Q_{f, i-1/2} &= \frac{F_{i-1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^n}{\tau/2} + \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} \cdot \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{(h_x)_{i-1/2}}, & Q_{f, i+1/2} &= \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \cdot \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{(h_x)_{i+1/2}}. \end{aligned}$$

После нелинейной коррекции из каждой пары величин  $\{(u_L)_i^{n+1}, (u_R)_i^{n+1}\}$ ,  $\{(v_L)_i^{n+1}, (v_R)_i^{n+1}\}$ ,  $\{(\theta_L)_i^{n+1}, (\theta_R)_i^{n+1}\}$  формируется одна потоковая переменная по следующему правилу:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = 0, \quad v_i^{n+1} = 0,5(V_{i-1/2}^{n+1/2} + V_{i+1/2}^{n+1/2}), \quad \theta_i^{n+1} = 0,5(T_{i-1/2}^{n+1/2} + T_{i+1/2}^{n+1/2}), \quad \text{если } U_{i-1/2}^{n+1/2} < 0 \text{ и } U_{i+1/2}^{n+1/2} > 0;$$

в противном случае

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{n+1} &= (u_L)_i^{n+1}, & v_i^{n+1} &= (v_L)_i^{n+1}, & \theta_i^{n+1} &= (\theta_L)_i^{n+1} & \text{при } U_{i-1/2}^{n+1/2} + U_{i+1/2}^{n+1/2} > 0, \\ \tilde{u}_i^{n+1} &= (u_R)_i^{n+1}, & v_i^{n+1} &= (v_R)_i^{n+1}, & \theta_i^{n+1} &= (\theta_R)_i^{n+1} & \text{при } U_{i-1/2}^{n+1/2} + U_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично производится расчет новых потоковых переменных по другому пространственному направлению.

Вычисленные потоковые скорости на новом временном слое  $\tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1}$ ,  $\tilde{v}_{i+1/2,j}^{n+1}$  не будут, вообще говоря, дивергентными. Построение их проекции на соленоидальное подпространство скоростей осуществляется следующим образом:

$$u_{i,j+1/2}^{n+1} = \tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1} - \frac{(P_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - P_{i-1/2,j+1/2}^{n+1})}{(h_x)_i}, \quad v_{i+1/2,j}^{n+1} = \tilde{v}_{i+1/2,j}^{n+1} - \frac{(P_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - P_{i+1/2,j-1/2}^{n+1})}{(h_y)_j}.$$

Здесь величины  $P_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$  находятся из решения сеточного аналога уравнения Пуассона:

$$\Delta_h (P^{n+1})_C = \text{div}_h (\tilde{\mathbf{w}}_C^{n+1})_C, \quad (11)$$

где сеточный лапласиан имеет вид (7), а сеточная дивергенция выражается как

$$\text{div}_h (\tilde{\mathbf{w}}_C^{n+1})_C = \frac{\tilde{u}_{i+1,j+1/2}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1}}{(h_x)_{i+1/2}} + \frac{\tilde{v}_{i+1/2,j+1}^{n+1} - \tilde{v}_{i+1/2,j}^{n+1}}{(h_y)_{j+1/2}}. \quad (12)$$

**Фаза 3.** Вычисляются окончательные значения консервативных скоростей и температур на новом временном слое. При этом шаг по времени, в отличие от Фазы 1, берется целый:

$$\frac{T_C^{n+1} - T_C^n}{\tau} + \frac{(\overline{\theta \cdot u})_R - (\overline{\theta \cdot u})_L}{h_x} + \frac{(\overline{\theta \cdot v})_T - (\overline{\theta \cdot v})_B}{h_y} = \alpha \cdot \Delta_h T_C^n,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_C^{n+1} - U_C^n}{\tau} + \frac{(\overline{u^2})_R - (\overline{u^2})_L}{h_x} + \frac{(\overline{u \cdot v})_T - (\overline{u \cdot v})_B}{h_y} + \frac{(P_{RT}^{n+1/2} + P_{RB}^{n+1/2}) - (P_{LT}^{n+1/2} + P_{LB}^{n+1/2})}{2h_x} = \nu \Delta_h U_C^n + \beta g_x (\overline{T_C} - T_0), \\ \frac{V_C^{n+1} - V_C^n}{\tau} + \frac{(\overline{u \cdot v})_R - (\overline{u \cdot v})_L}{h_x} + \frac{(\overline{v^2})_T - (\overline{v^2})_B}{h_y} + \frac{(P_{RT}^{n+1/2} + P_{LT}^{n+1/2}) - (P_{RB}^{n+1/2} + P_{LB}^{n+1/2})}{2h_y} = \nu \Delta_h V_C^n + \beta g_y (\overline{T_C} - T_0). \end{array} \right.$$

Далее при заданных граничных условиях (см. ниже) по известным значениям консервативных и потоковых переменных на временном слое  $n$  однозначно определяются значения консервативных и потоковых переменных на слое  $n+1$ . Затем цикл, состоящий из трех описанных фаз, повторяется.

### 3.1. Граничные условия

При решении дискретной задачи используются следующие условия на границах расчетной области:

– нормальные к границам компоненты потоковых скоростей полагаются равными нулю (условие непротекания):  $u_{1,j+1/2}^{n+1} = u_{N_x,j+1/2}^{n+1} = v_{i+1/2,1}^{n+1} = v_{i+1/2,N_y}^{n+1} = 0$ ;

– касательные к границам компоненты потоковой скорости также нулевые (условие прилипания):

$$v_{1,j+1/2}^{n+1} = v_{N_x,j+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2,1}^{n+1} = u_{i+1/2,N_y}^{n+1} = 0;$$

– потоковые значения температуры на левой и правой границах соответствуют температурам стенок:

$$\theta_{1,j+1/2}^{n+1} = T_{left}^{n+1}, \quad \theta_{N_x,j+1/2}^{n+1} = T_{right}^{n+1}; \quad \text{на верхней и нижней стенках они считаются равными консервативным значениям температуры в центрах прилегающих ячеек на промежуточном временном слое } \theta_{i+1/2,1}^{n+1} = T_{i+1/2,3/2}^{n+1/2},$$

$$\theta_{i+1/2,N_y}^{n+1} = T_{i+1/2,N_y-1/2}^{n+1/2} \quad (\text{часть условия адиабатичности});$$

– при вычислении консервативных значений температуры на теплоизолированных стенках тепловой поток задается равным нулю;

– на изотермических границах градиент температуры находится с вторым порядком аппроксимации по консервативным переменным в прилегающей к границе ячейке и ячейке второго слоя.

– граничные условия для сеточных уравнений Пуассона (9) и (11) следуют из описанных граничных условий для консервативных и потоковых скоростей и определения соответствующих операторов дивергенции (8), (12) для граничных узлов и ячеек.

### 3.2. Особенности вычислительного алгоритма

Следует отметить, что в схеме КАБАРЕ используется большее по сравнению с классическими схемами количество переменных. Наряду с «консервативными» значениями скоростей и температуры, относящимися к центрам расчетных ячеек, вводятся также их «потоковые» величины, относящиеся к граням. Это приводит к увеличению общего числа основных переменных в двумерном случае в три раза, в трехмерном — в четыре.

Условие несжимаемости среды налагается в алгоритме КАБАРЕ как на консервативные скорости, так и на потоковые. Сеточные аналоги уравнения Пуассона на каждом шаге по времени также приходится решать дважды. При этом сеточный оператор (10) обладает сильно вырожденным ядром, поскольку представляет собой так называемый «косой крест».

#### 4. Верификация двумерного алгоритма при различных числах Рэлея.

##### Численные эксперименты

##### 4.1. Задача Дэвиса. Течение в квадратной каверне

Рассмотрим двумерное течение в квадрате со сторонами  $1 \times 1$ . Ускорение силы тяжести направлено вниз и равно 1; число Прандтля составляет  $Pr = 0,71$ . Обе компоненты скорости на всех границах расчетной области равны нулю (условие прилипания). Помимо этого на горизонтальных стенках выполняются адиабатические граничные условия, вертикальные стенки имеют постоянную температуру  $T_L = 1$  и  $T_R = 0$ .

Данная задача подробно исследована Дэвисом (Davis) [7] в 1983 году с помощью тщательно верифицированного разностного метода второго порядка точности при числах Рэлея:  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  и  $10^6$  на сгущающихся сетках  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$ ,  $62 \times 62$  и  $80 \times 80$  ячеек. Получены максимальные значения компонент скоростей, средние и максимальные тепловые потоки (числа Нуссельта). Представленные Дэвисом результаты, экстраполированные по сгущению сетки, совпадают с экспериментальными данными в пределах 1% для сравнительно больших чисел Рэлея (порядка  $10^6$ ), и в пределах 0,1% — для малых (порядка  $10^3$ ), что подтверждают более поздние расчеты и эксперименты. Эти результаты являются эталонными для многих исследователей до сих пор [8-10]. Поэтому при тестировании схемы КАБАРЕ в ламинарном случае естественно было взять за основу задачу Дэвиса и полученные им результаты.

При  $Ra > 10^6$ , когда течение становится заведомо турбулентным, задача Дэвиса решалась другими авторами, например [8, 9]. Их результаты также будут использованы для верификации схемы КАБАРЕ при числах Рэлея вплоть до  $10^{11}$ . Хорошим ориентиром для проверки результатов вычислений в тех случаях, когда нет ни экспериментальных данных, ни других расчетных результатов, может служить эмпирический закон [4, 11], согласно которому среднее число Нуссельта в турбулентном режиме зависит от числа Рэлея как

$$Nu = 0,182Ra^{0,275} . \quad (13)$$

В первой серии расчетов по схеме КАБАРЕ выберем равномерную квадратную сетку  $50 \times 50$  ячеек. Ширина ячейки при этом составляет 0,02, что соответствует, согласно формуле (1), ширине пограничного слоя при  $Ra \approx 4 \cdot 10^6$ . Таким образом, следует ожидать, что на данной сетке тест Дэвиса пройдет успешно вплоть до значений  $Ra \approx 10^6$ .

В таблице 1 представлены результаты численных экспериментов Дэвиса (экстраполированные при сгущении сетки), современные данные для чисел Рэлея  $10^7 - 10^9$  (на сетках размерностью вплоть до  $512 \times 512$ ) [8] и результаты, полученные по схеме КАБАРЕ на равномерной сетке  $50 \times 50$  ячеек. Максимальные значения скоростей вычислялись на линиях, перпендикулярных соответствующим компонентам скоростей и проходящих через центр области (в скобках приведены  $x$  и  $y$  координаты точек, в которых найдены максимумы). Также приведены значения средних чисел Нуссельта и их отклонения в процентах от эталонных результатов, полученных Дэвисом [7] и Дикситом [8].

Таблица 1. Верификационная таблица к задаче Дэвиса

Ra	Эксперименты Davis [7] с экстраполяцией			Схема КАБАРЕ, сетка $50 \times 50$ ячеек		
	$u_{\max}; (y)$	$v_{\max}; (x)$	Nu	$u_{\max}; (y)$	$v_{\max}; (x)$	Nu ; отклонения от данных [7], [8]
$10^3$	3,469 (0,813)	3,697 (0,178)	1,117	3,605 (0,81)	3,645 (0,17)	1,112 (0,4%)
$10^4$	16,178 (0,823)	19,617 (0,119)	2,238	16,038 (0,83)	19,521 (0,13)	2,221 (0,8%)
$10^5$	34,730 (0,855)	68,590 (0,066)	4,509	34,870 (0,85)	68,403 (0,07)	4,526 (0,4%)
$10^6$	64,630 (0,850)	219,36 (0,0379)	8,817	63,0 (0,85)	212,56 (0,03)	8,868 (0,6%)
	Dixit [8]			Схема КАБАРЕ, сетка $50 \times 50$ ячеек		
$10^7$	164,236 (0,851)	701,922 (0,02)	16,790	137,4 (0,91)	569,9 (0,03)	17,179 (2,3%)
$10^8$	389,877 (0,937)	2241,37 (0,0112)	30,506	535 (0,93)	1920 (0,01)	34,73 (14%)
$10^9$	503,24 (0,966)	6820,1 (0,0064)	57,350	1640 (0,93)	5200 (0,01)	54,9 (4,3%)

Из таблицы видно, что на рассмотренной сетке схема КАБАРЕ демонстрирует результаты, прекрасно согласующиеся с данными Дэвиса до чисел Рэлея порядка  $10^6$ , при более же высоких его значениях недостаточно хорошо разрешается градиент температуры как пристеночный, так и в области с максимальной скоростью теплоносителя. Это не является следствием недостатков используемой разностной схемы. Ниже будет показано, что сгущение сетки вблизи стенок позволяет решить эту проблему без увеличения общего числа ячеек.

На примере задачи Дэвиса с числом Рэлея  $10^6$  исследуем сходимость результатов по схеме КАБАРЕ на последовательности сгущающихся сеток — от  $10 \times 10$  до  $400 \times 400$  ячеек. В таблице 2 представлены данные расчетов при  $Ra = 10^6$ .

Таблица 2. Сходимость результатов на последовательности сгущающихся сеток при  $Ra = 10^6$

Размерность расчетной сетки	$h$	$u_{\max}; (y)$	$v_{\max}; (x)$	Nu	Отклонения от данных Davis [7]
$10 \times 10$	0,1	51,6 (0,85)	187,8 (0,05)	9,191	5%
$20 \times 20$	0,05	56,3 (0,925)	197,4 (0,025)	9,670	10%
$30 \times 30$	0,0333	59,18 (0,883)	192,4 (0,05)	9,040	2,5%
$40 \times 40$	0,025	62,3 (0,862)	212,7 (0,037)	8,889	0,8%
$50 \times 50$	0,02	63,0 (0,85)	212,6 (0,03)	8,868	0,6%
$70 \times 70$	0,0143	63,15 (0,85)	218,9 (0,036)	8,848	0,35%
$100 \times 100$	0,01	64,14 (0,855)	220,14 (0,035)	8,840	0,26%
$200 \times 200$	0,005	64,74 (0,8525)	221,15 (0,0375)	8,837	0,23%
$400 \times 400$	0,0025	64,79 (0,8513)	220,81 (0,0388)	8,821	0,05%
Davis	–	64,63 (0,850)	219,36 (0,0379)	8,817	–

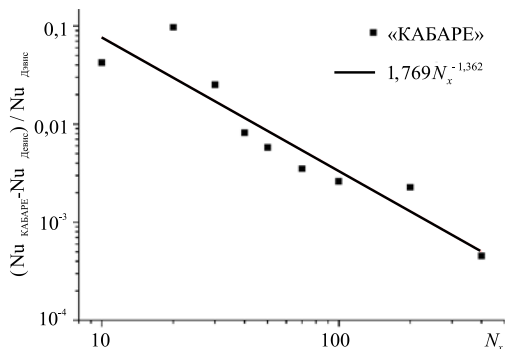


Рис. 4. Относительное отклонение среднего числа Нуссельта от эталонного значения в зависимости от числа узлов вдоль одной из координат при  $Ra = 10^6$

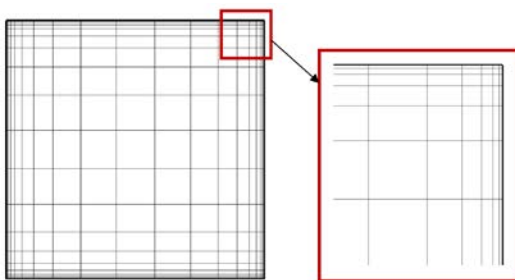


Рис. 5. Пример сгущающейся расчетной сетки  $20 \times 20$  ячеек для задачи Дэвиса

Как видно из таблицы 2, максимальные скорости, координаты соответствующих им точек и средние числа Нуссельта при измельчении сетки приближаются к эталонным данным Дэвиса. На самой подробной сетке расхождение значений не превышает 0,1%. На рисунке 4 в логарифмическом масштабе представлена зависимость относительного отклонения среднего числа Нуссельта, полученного по схеме КАБАРЕ, от эталонного значения в зависимости от числа узлов  $N_x$  по одному из координатных направлений при  $Ra = 10^6$ . Четко прослеживается сходимость результата при сгущении сетки; апостериорный порядок аппроксимации при этом составляет около 1,4.

Рассмотрим результаты работы схемы КАБАРЕ на сгущенной к стенкам, но при этом достаточно грубой сетке —  $20 \times 20$  ячеек (Рис. 5). Видно, что внутри области ячейки грубые, а на границах — очень вытянутые. Соотношение сторон вытянутых ячеек достигает 125, что не мешает предложенному алгоритму успешно воспроизводить основные характеристики течения.

В таблице 3 представлены минимальные шаги расчетной сетки вблизи стенок, максимальные значения компонент скорости с координатами соответствующих им точек, средние числа Нуссельта и получившиеся отклонения от результатов Дэвиса (при  $Ra \leq 10^6$ ) и Диксита (при  $Ra > 10^6$ ). Следует отметить, что Дэвис и Диксит решали задачу на более подробных сгущающихся сетках. При  $Ra \geq 10^9$  сетка у Диксита достигала 512 узлов по каждому из координатных направлений, то есть общее число узлов более чем в 600 раз превышало аналогичный параметр в демонстрационных расчетах по схеме КАБАРЕ.



Таблица 3. Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на сгущающейся сетке 20×20 ячеек

Ra	$h_{\min}$	$u_{\max}; (y)$	$v_{\max}; (x)$	Nu	Отклонения от данных [7–10]
$10^3$	0,0297	3,596 (0,829)	3,677 (0,171)	1,117	0%
$10^4$	0,0297	15,927 (0,829)	19,516 (0,125)	2,236	0,09%
$10^5$	0,00893	38,542 (0,872)	67,265 (0,0531)	4,516	0,16%
$10^6$	0,00203	74,125 (0,893)	219,941 (0,0333)	8,822	0,06%
$10^7$	0,00203	167 (0,893)	701 (0,0175)	16,63	1,0%
$10^8$	0,00203	482 (0,939)	2100 (0,0086)	30,3	0,7%
$10^9$	0,00203	1020 (0,9667)	6700 (0,0086)	55,6	3,1%
$10^{10}$	0,00203	2100	22000	100,3	3,2%
$10^{11}$	0,00203	5100	50100	174	1,8% [10], 5,4% [9]
$10^{12}$	0,00203	—	—	367	1,1% (формула (13))
$10^{13}$	0,00203	—	—	608	11% (формула (13))
$10^{14}$	0,00121	—	—	1031	20% (формула (13))

При высоких числах Рэлея в установившемся режиме течение теплоносителя происходит в основном в тонком слое вблизи стенок. Этот пристеночный слой уверенно разрешает предложенная методика до тех пор, пока его толщина превышает соответствующий размер тонкой ячейки вблизи стенки. Из формулы (1) и данных о минимальной ширине пристеночной ячейки (Табл. 3) можно получить следующую оценку: для данной сетки «переломный момент» наступает при числах Рэлея порядка  $10^{11}$ – $10^{12}$ . Действительно, даже при  $Ra = 10^{11}$  результаты расчетов по схеме хорошо согласуются с данными [9] и [10], а при  $Ra = 10^{12}$  — с эмпирической формулой (13).

При увеличении числа Рэлея до  $10^{13}$  и  $10^{14}$  результат на сетке 20×20 ячеек становится на 10–20% ниже асимптотических значений. Проведем аналогичные расчеты для двух значений числа Рэлея, но на более подробных сетках — 30×30 и 40×40 ячеек. Как видно из таблицы 4, расчетные средние числа Нуссельта слегка приближаются к асимптотическим значениям, и результаты при  $Ra$ , равных  $10^{13}$  и  $10^{14}$  на сетке 20×20 ячеек, не являются случайностью.

Таблица 4. Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на сгущающихся сетках 30×30 и 40×40 ячеек

Ra	Сетка	$h_{\min}$	Nu (формула (13))	Nu (КАБАРЕ)	Отклонения от значений, полученных по формуле (13)
$10^{13}$	30×30	0,00122	684	614	10%
	40×40	0,00087		616	10%
$10^{14}$	30×30	0,00122	1288	1060	18%
	40×40	0,00087		1095	15%

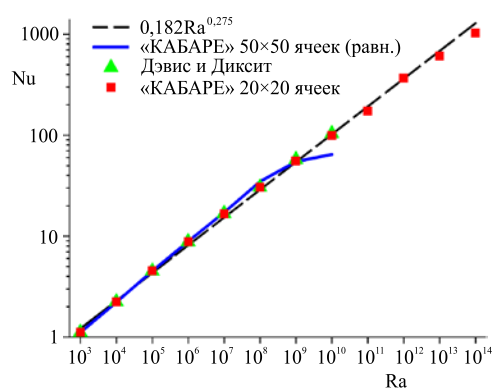


Рис. 6. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея, полученная по схеме КАБАРЕ на сетке 20×20 ячеек со сгущением, на сетке 50×50 ячеек без сгущения, по формуле (13), Дэвисом [7] и Дикситом [8]

На рисунке 6 представлены известные вычисленные и эмпирические данные по средним числам Нуссельта и результаты, полученные по схеме КАБАРЕ на равномерной сетке 50×50 ячеек без сгущения и на грубой сетке 20×20 ячеек со сгущением. Видно, что вплоть до чисел Рэлея  $10^{14}$  методика КАБАРЕ демонстрирует на сгущающихся сетках совпадение результатов как с данными других авторов, так и с эмпирической формулой (13).

Таким образом, схема КАБАРЕ в двумерном случае уверенно воспроизводит такие базовые характеристики термоконвективного течения, как, например, средний тепловой поток и распределение пиковых значений скоростей даже на исключительно грубых сетках с сильно вытянутыми ячейками.

#### 4.2. Трехмерная задача Дэвиса. Течение в кубе

Рассмотрим трехмерное течение газа в кубе со сторонами  $1 \times 1 \times 1$  с теми же параметрами, что и в двумерном случае. Проведем сравнение результатов двумерных расчетов Дэвиса [7] и Диксита [8] с результатами работы трехмерного алгоритма КАБАРЕ на сгущающейся расчетной сетке  $20 \times 20 \times 20$  ячеек (Рис. 7).

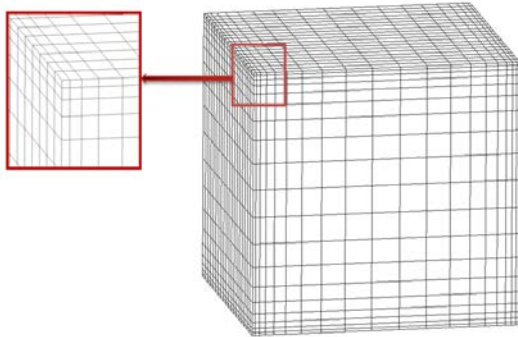


Рис. 7. Сгущающаяся расчетная сетка  $20 \times 20 \times 20$  ячеек

В таблице 5 представлены результаты численных экспериментов Дэвиса [7] (экстраполированные при сгущении сетки), современные данные Диксита [8] (полученные на сетках вплоть до  $512 \times 512$ ), оценки по эмпирической формуле (13) и результаты, полученные по схеме КАБАРЕ на сгущающейся к границам сетке  $20 \times 20 \times 20$  ячеек. Приведены средние числа Нуссельта и соответствующие отклонения в процентах от эталонных результатов обоих авторов. На рисунке 8 полученные данные представлены в графическом виде.

Таблица. 5. Средние числа Нуссельта в зависимости от числа Рэлея: данные других авторов, расчет по формуле (13) и по схеме КАБАРЕ на сетке  $20 \times 20 \times 20$  со сгущением

Ra	Davis [7], Dixit [8]	$0,182Ra^{0,275}$	Схема КАБАРЕ, сетка $20 \times 20 \times 20$ ячеек со сгущением (отклонения от данных [7], [8])
$10^3$	1,117	1,216	1,115 (0,2%)
$10^4$	2,238	2,291	2,234 (0,2%)
$10^5$	4,509	4,316	4,529 (0,4%)
$10^6$	8,817	8,130	8,893 (0,9%)
$10^7$	16,79	15,31	17,26 (2,8%)
$10^8$	30,506	28,85	31,55 (3,4%)
$10^9$	57,35	54,33	60,9 (6,2%)
$10^{10}$	103,66	102,3	108,1 (4,3%)

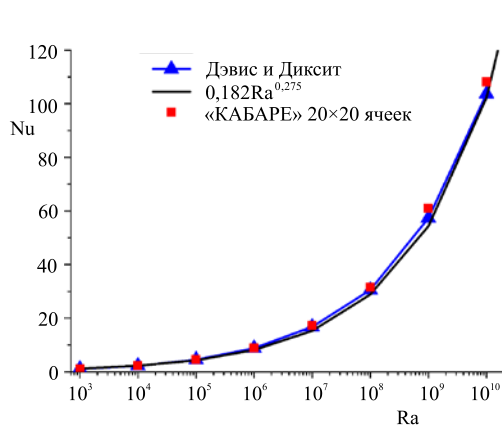


Рис. 8. Зависимость среднего числа Нуссельта от Рэлея, полученная по схеме КАБАРЕ на сетке  $20 \times 20 \times 20$  со сгущением, по формуле (13), Дэвисом и другими авторами

Трехмерный алгоритм КАБАРЕ демонстрирует хорошую согласованность с данными Дэвиса и Диксита. Причем, начиная с чисел Рэлея порядка  $10^6$ - $10^7$ , наблюдаются слегка завышенные оценки средних значений чисел Нуссельта. Это связано с тем, что при  $Ra > 10^6$  течение переходит в турбулентный режим и становится полностью трехмерным. Вихревое течение имеет место не только в вертикальном и горизонтальном направлениях, но и в глубину расчетной области. Это обстоятельство не могло не повлиять на теплообмен в области с изотермическими стенками. Теплопередача, вызванная конвекцией по всем трем пространственным направлениям, возросла по сравнению с чисто двумерным случаем, что и привело к увеличению числа Нуссельта.

## 5. Заключение

Использование вихреразрешающей беспараметрической схемы КАБАРЕ для решения как двумерной, так и трехмерной задачи Дэвиса приводит к удивительно хорошему совпадению результатов расчетов на очень грубых сетках ( $20 \times 20$ ) с результатами экспериментов и прецизионных расчетов для чисел Рэлея вплоть до  $10^{14}$ .

При конструировании вычислительного алгоритма по схеме КАБАРЕ никакие представления о физике турбулентных течений не привлекались. Коррекция конвективных потоков осуществлялась исключительно на математическом принципе — принципе максимума. Следует отметить, что похожие результаты получаются и для других аспектных отношений и чисел Прандтля. К сожалению, жесткие требования к объему публикации не позволяют включить эти результаты в данную статью. Их подробному описанию будет посвящена следующая работа.

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – Т. 6. – 736 с.
2. Trias F.X., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – Part I: Numerical methods and time-averaged flow // *Int. J. Heat Mass Tran.* – 2010. – Vol. 53, no. 4. – P. 665-673. DOI
3. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2012. – 88 с.
4. Trias F.X., Verstappen R.W.C.P., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Parameter-free symmetry-preserving regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity // *Comput. Fluids.* – 2010. – Vol. 39, no. 10. – P. 1815-1831. DOI
5. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. – М.: Изд-во Московского университета, 2013. – 472 с.
6. Головизнин В.М., Канаев А.А. Принцип минимума парциальных локальных вариаций для определения конвективных потоков при численном решении одномерных нелинейных скалярных гиперболических уравнений // *ЖВММФ.* – 2011. – Т. 51, № 5. – С. 881-897. (English version DOI)
7. De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 1983. – Vol. 3, no. 3. – P. 249-264. DOI
8. Dixit H., Babu V. Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method // *Int. J. Heat Mass Tran.* – 2006. – Vol. 49, no. 3-4. – P. 727-739. DOI
9. Barakos G., Mitsoulis E., Assimacopoulos D. Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 1994. – Vol. 18, no. 7. – P. 695-719. DOI
10. Henkes R.A.W.M., van der Vlugt F.F., Hoogendoorn C.J. Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models // *Int. J. Heat Mass Tran.* – 1991. – Vol. 34, no. 2. – P. 377-388. DOI
11. Trias F.X., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – Part II: Heat transfer and flow dynamics // *Int. J. Heat Mass Tran.* – 2010. – Vol. 53, no. 4. – P. 674-683. DOI

## References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. *Course of theoretical physics*, vol. 6. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987.
2. Trias F.X., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – Part I: Numerical methods and time-averaged flow. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2010, vol. 53, no. 4, pp. 665-673. DOI
3. Garbaruk AV, Strelets M.Kh., Shur M.L. *Modelirovanie turbulentsosti v raschetakh slozhnykh techenij* [Modeling of turbulence in complex flow calculations]. St. Petersburg: State Polytechnical University, 2012. 88 p.
4. Trias F.X., Verstappen R.W.C.P., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Parameter-free symmetry-preserving regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity. *Comput. Fluids*, 2010, vol. 39, no. 10, pp. 1815-1831. DOI
5. Goloviznin V.M., Zajtsev M.A., Karabasov S.A., Korotkin I.A. New algorithms in computational fluid dynamics for multiprocessor computing systems. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 2013. 472 p.
6. Goloviznin V.M., Kanaev A.A. The principle of minimum of partial local variations for determining convective flows in the numerical solution of one-dimensional nonlinear scalar hyperbolic equations. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 5, pp. 824-839. DOI
7. De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1983, vol. 3, no. 3, pp. 249-264. DOI
8. Dixit H., Babu V. Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2006, vol. 49, no. 3-4, pp. 727-739. DOI
9. Barakos G., Mitsoulis E., Assimacopoulos D. Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1994, vol. 18, no. 7, pp. 695-719. DOI
10. Henkes R.A.W.M., van der Vlugt F.F., Hoogendoorn C.J. Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1991, vol. 34, no. 2, pp. 377-388. DOI
11. Trias F.X., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – Part II: Heat transfer and flow dynamics. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2010, vol. 53, no. 4, pp. 674-683. DOI

Поступила в редакцию 23.07.2014; опубликована в электронном виде 31.03.2015

## Сведения об авторах

Головизнин Василий Михайлович, дфмн, проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1; e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Короткин Иван Александрович, кфмн, нс, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (ИБРАЭ РАН), 115191, Москва, ул. Большая Тульская, д. 52; e-mail: korotkin@ibrae.ac.ru

Финогенов Сергей Александрович, кфмн, внс, ИБРАЭ РАН; e-mail: saf@ibrae.ac.ru