

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.3

УДК 533

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМ ТИПА DRP ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ И МЕТОДА КРУПНЫХ ВИХРЕЙ С РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИЕЙ ДЛЯ РАСЧЁТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА НА ПРИМЕРЕ РАСПАДА ВИХРЯ ТЕЙЛОРА–ГРИНА

Е.В. Коромыслов^{1,2,3}, М.В. Усанин¹, Л.Ю. Гомзиков¹, А.А. Синер^{1,3}¹ОАО «Авиадвигатель», Пермь, Российская Федерация²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация³Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

В работе рассмотрен метод крупных вихрей с релаксационной фильтрацией, реализованный с помощью схем типа DRP. Метод представляет собой альтернативу классическим методам, использующим вихревую вязкость. В его основе лежит комбинация схемы высокого порядка аппроксимации и высокого разрешения с узкополосной фильтрацией, диссипирующей энергию с малых масштабов, плохо разрешаемых схемой. С помощью метода осуществляются расчёты для задачи о распаде вихря Тейлора–Грина при числах Рейнольдса $Re = 1600$ и $Re = 3000$ на различных расчётных сетках (от 64^3 до 256^3 ячеек). Задача заключается в исследовании трёхмерного периодического течения, распадающегося на мелкомасштабные турбулентные структуры в силу неустойчивости. Расчёт проводится с помощью уравнений Навье–Стокса, дополненных уравнением состояния совершенного газа, при малом числе Маха $M = 0,09$ для минимизации эффектов сжимаемости. Также варьируется сила применяемого фильтра, которая является единственным свободным параметром выбранной схемы. Результаты расчётов сопоставляются с результатами прямого численного моделирования, проведённого другими авторами. Сравнение показывает хорошее совпадение результатов, а также их малую зависимость от силы фильтра при её достаточно большом значении и фиксированной величине шага интегрирования по времени, выбранном из следующего условия для числа Куранта: $CFL \sim 0,45$. Однако оказалось, что при значительном уменьшении размера шага по времени качество решения задачи меняется в зависимости от него, что фактически означает отсутствие сходимости схемы по времени для турбулентных течений и её малую пригодность для расчёта реальных конфигураций при сильно варьирующемся размере ячеек сетки.

Ключевые слова: вихрь Тейлора–Грина, LES-RF, высокий порядок, DRP, турбулентность

UTILIZATION OF HIGH ORDER DRP-TYPE SCHEMES AND LARGE EDDY SIMULATION BASED ON RELAXATION FILTERING FOR TURBULENT GAS FLOW COMPUTATIONS IN THE CASE OF TAYLOR-GREEN VORTEX BREAKDOWN

E.V. Koromyslov^{1,2,3}, M.V. Usanin¹, L.Yu. Gomzikov¹ and A.A. Siner^{1,3}¹OJSC «Aviadvigatel», Perm, Russian Federation²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation³Perm State University, Perm, Russian Federation

The paper considers Large Eddy Simulation based on the relaxation filtering technique (LES-RF) and implemented by high order DRP-type schemes. This technique is an alternative to the classical eddy-viscosity-type methods. It can be expressed as the composition of a high-order and high-resolution numerical scheme and an explicit selective filtering, which dissipates the energy from small scales poorly resolved by the scheme. With this technique, simulations of the Taylor–Green vortex breakdown problem have been performed for Reynolds numbers 1600 and 3000 and different computational meshes varying from 64^3 to 256^3 cells. The problem of periodic three-dimensional flow decaying to small-scale turbulent structures because of the inherent instability has been studied. The simulation employs a compressible formulation at small Mach number ($Ma = 0.09$) for minimization of compressibility effects. Filter strength, the only free parameter in the scheme, is varied as well. The obtained results are in good agreement with the Direct Numerical Simulations performed by other authors. It has been found that the filter strength, if taken sufficiently high and at a fixed time step size chosen from the condition $CFL \sim 0.45$, has insignificant effect on the results. However, the quality of the results begins to degrade if the time step size decreases significantly. This indicates the need for modification of the scheme for practical applications.

Key words: Taylor–Green vortex, LES-RF, high order, DRP, turbulence

1. Введение

В настоящее время в связи с ростом вычислительных ресурсов и необходимостью более точного моделирования течений газа в различных устройствах всё большую популярность приобретают методы высокого порядка аппроксимации. В качестве одного из подклассов данных методов можно выделить те, которые основаны на схемах с высокой разрешающей способностью, не только имеющих высокую точность описания решения, но и сохраняющих её для более широкого диапазона волновых чисел. Примерами таких схем служат компактно-разностные схемы и центрально-разностные схемы высокого порядка. Существуют также оптимизированные версии этих схем: DRP [1] и CDRP [2], где DRP означает Dispersion-Relation Preserving — сохраняющие дисперсионное соотношение. Изначально названные схемы предназначались для задач акустики, где зачастую нужно обеспечить максимально возможное разрешение волн различной длины на достаточно грубых сетках. В схемах типа DRP (при сохранении одного и того же

числа точек в шаблоне) их формальный порядок понижается, а волновые характеристики улучшаются. Такие схемы называют подобными спектральным (spectral-like).

Кроме применения к описанию распространения волн, схемы DRP могут быть использованы и для исследования турбулентных течений. При этом основной идеей является разрешение вихревых структур вплоть до самых мелких, доступных на имеющейся расчётной сетке. Так, к примеру, для 13-точечной оптимизированной схемы DRP 4-го порядка аппроксимации [1] пределом точности можно считать 3,36 точек на длину волны возмущения, что значительно меньше 32 точек, необходимых для стандартных схем 2-го порядка. Все возмущения, имеющие меньше точек на длину волны, чем требуется схемой, удаляются специальным узкополосным фильтром, слабо влияющим на крупные масштабы. Таким образом реализуется метод крупных вихрей. При этом вместо вихревой вязкости, которая зачастую явно присутствует в уравнении, диссипация энергии с мелких масштабов осуществляется фильтрацией. Этот подход называют методом крупных вихрей с релаксационной фильтрацией (LES-RF). Его также можно отнести к классу неявных методов крупных вихрей (ILES), в которых диссипация обеспечивается за счёт свойств самой схемы, а не модификацией решаемого уравнения.

Метод крупных вихрей с релаксационной фильтрацией имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным, использующим вихревую вязкость, — это отсутствие в нём каких-либо параметров (кроме силы фильтра), что ведёт к большей универсальности метода, сохранение величины эффективного числа Рейнольдса течения [3], а также простота в реализации.

Целью данной работы является исследование возможностей метода крупных вихрей с релаксационной фильтрацией на основе оптимизированных схем типа DRP при применении его для расчёта турбулентных течений, а также проведение анализа зависимости решения от силы фильтра и размера шага по времени. В качестве тестовой задачи рассматривается распад вихря Тейлора–Грина. Это течение, представленное Тейлором и Грином в 1937 году [4], широко изучено теоретически, поэтому многие авторы прибегают к нему для тестирования адекватности описания турбулентности различными методами. В частности, в работах [5, 6] обсуждаются спектральные методы, публикации [7, 8] посвящены неявным методам крупных вихрей, [9] — схеме КАБАРЕ, [10] — квазигидродинамическому подходу. В работе [11] задача решается с помощью центральных конечно-разностных схем высокого порядка аппроксимации. В [12] вихрь Тейлора–Грина рассчитывается псевдоспектральным и вихревым методами на подробных расчётных сетках. Кроме того, подобному течению посвящены публикации [13] и [14].

2. Постановка задачи

Вихрь Тейлора–Грина представляет собой течение, определяемое в периодичной кубической расчётной области размерами $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$ при следующих начальных условиях ($t = 0$):

$$\begin{cases} u = V_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right), \\ v = -V_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right), \\ w = 0, \\ p = p_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{16} \left(\cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{2z}{L}\right) + 2 \right), \end{cases} \quad (1)$$

где V_0 — максимальная начальная скорость; ρ_0 и p_0 — средние начальные плотность и давление. Вихрь, определяемый условиями (1), является неустойчивым, в силу чего происходит его распад, и в некоторый момент времени течение становится турбулентным. Переход к турбулентности сопровождается уменьшением масштабов вихрей, находящихся в области, и диссипацией кинетической энергии.

В работе рассмотрены два случая течения с разными значениями числа Рейнольдса: $Re = 1600$ и $Re = 3000$. Числа Рейнольдса вычислялись по характерному размеру области L , максимальной начальной скорости V_0 , начальной плотности ρ_0 и вязкости μ (в данном случае — постоянной). На рисунке 1 показана эволюция течения для $Re = 3000$. Видно, что изначально в расчётной области присутствуют только крупные вихри (Рис. 1а). Далее наблюдается их локальный распад на более мелкие структуры (Рис. 1б), и впоследствии происходит турбулизация всей области (Рис. 1в). Аналогичная картина имеет место и для числа Рейнольдса $Re = 1600$.

Для расчётов применялся решатель, использующий «сжимаемые уравнения» Навье–Стокса (compressible N–S equations) с уравнением состояния совершенного газа. В обоих случаях число Маха $M = V_0/c_0$, где $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, равнялось 0,09 (здесь γ — газовая постоянная: $\gamma = 1,4$). Как известно, влияние сжимаемости среды на её течение для малых чисел Маха ($M < 0,3$) является слабым [5].

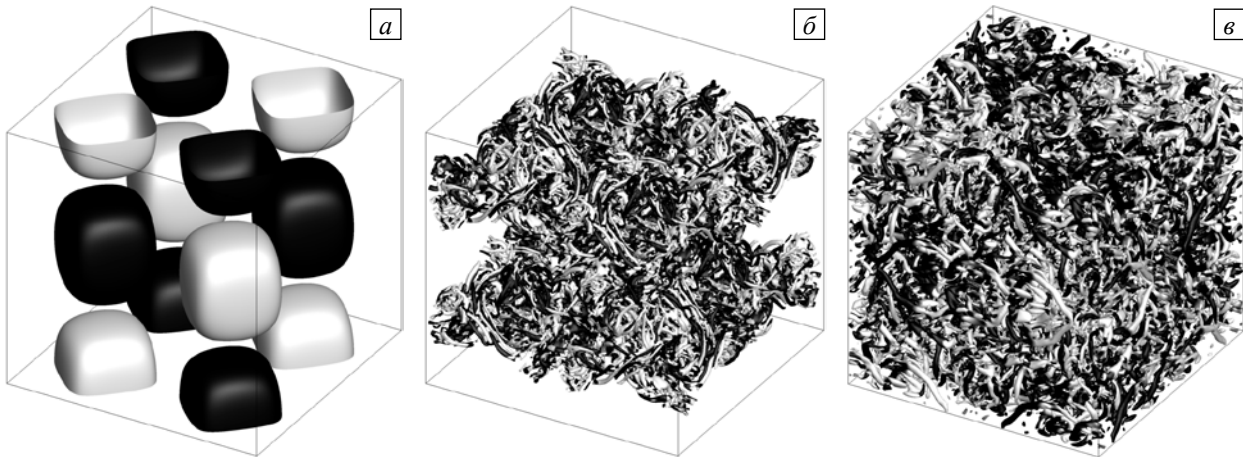


Рис. 1. Эволюция вихря Тейлора–Грина для $Re = 3000$; структура течения соответствует моментам времени t^* : 0 (а), 9 (б), 20 (в); показаны положительные изоповерхности Q -критерия, раскрашенные z -компонентой вектора завихренности

Фактически максимальное отклонение плотности от среднего значения составило около 0,4%. Таким образом, влияние сжимаемости на результаты в данной работе не принималось во внимание. Число Прандтля $Pr = \mu c_p / \kappa$ равнялось 0,71 (где κ — коэффициент теплопроводности). В рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса наибольшая скорость диссипации энергии достигалась для безразмерного момента времени $t^* = V_0 t / L \approx 9$, при этом сам расчёт продолжался до $t^* = 20$.

3. Уравнения и схемы

3.1. Определяющие уравнения

В работе используются уравнения Навье–Стокса, записанные для совершенного газа в криволинейной системе координат в неконсервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\mathbf{A}_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} + \left(\mathbf{A}_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} + \left(\mathbf{A}_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \zeta} = \mathbf{F}^v, \quad (2)$$

где $\mathbf{U} = (\rho \ u \ v \ w \ p)^T$ — вектор примитивных переменных (T — символ операции транспонирования); $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$ — расчётная система координат, введённая таким образом, что значения координат ξ , η , ζ в узлах структурированной расчётной сетки совпадают со значениями индексов (i, j, k) данных узлов;

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & w \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \\ (\gamma - 1) \left[\kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (3)$$

Здесь $T = P/(\rho R)$ — температура; R — индивидуальная газовая постоянная (в работе — газовая постоянная воздуха: $R = 287,1$); $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, ... — метрические коэффициенты; τ_{ij} — компоненты тензора вязких напряжений: $\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$, где $u_i = \{u, v, w\}$, $x_i = \{x, y, z\}$.

Использование неконсервативной постановки задачи обусловлено, прежде всего, её вычислительной сложностью. Алгоритмы расчётов для неконсервативного случая требуют меньшего объёма оперативной памяти вычислительной машины, а также имеют меньшее число операций, что ведет к общему ускорению расчётов. При этом в отсутствие разрывов решения неконсервативная и консервативная постановки эквивалентны.

3.2. Схема DRP

Система уравнений (2), (3) решается методом конечных разностей со схемой DRP для расчёта производных по пространственным координатам (ξ, η, ζ) . Эта схема представляет собой оптимизированную центрально-разностную схему следующего вида: $(\partial U / \partial \xi)_{i,j,k} \approx \sum_{m=1}^N a_m (U_{i+m,j,k} - U_{i-m,j,k})$, где $(\partial U / \partial \xi)_{i,j,k}$ — производная искомой функции по ξ в точке расчётной сетки с индексами (i, j, k) , при этом $N = (N_{full} - 1) / 2$, где N_{full} — количество точек схемы по одному индексному направлению, a_m — коэффициенты схемы. В данном случае считается, что сетка в расчётной системе координат равномерна и имеет единичный шаг, то есть $\Delta \xi = 1$ (что справедливо в силу того, что расчётная система координат, по сути, представляет собой индексы ячеек сетки). Аналогично можно записать и производные по остальным двум координатам расчётной системы (η и ζ). Коэффициенты a_m схемы определяются исходя из двух условий: первое — это необходимость аппроксимации производной с нужным порядком точности, второе — минимальность дисперсионной ошибки, то есть разности между аналитическим (k) и численным (k^*) волновыми числами.

Связь волновых чисел для центрально-разностной аппроксимации можно записать как

$$k^* \Delta x = 2 \sum_{m=1}^N a_m \sin(mk \Delta x). \tag{4}$$

С использованием (4) условие минимизации относительной разности безразмерных волновых чисел $k^* \Delta x$ и $k \Delta x$ представляется в следующем виде:

$$E = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{|k^* \Delta x - k \Delta x|}{k \Delta x} d(k \Delta x) = \int_{\ln(\eta_1)}^{\ln(\eta_2)} |k^* \Delta x - k \Delta x| d(\ln(k \Delta x)) \rightarrow \min, \tag{5}$$

где η_1, η_2 — границы диапазона волновых чисел, для которых производится оптимизация. В качестве значения η_1 авторами [1] принималось число $\pi/16$ (для любых схем), η_2 выбиралось равным $\pi/2$ для 9- и 11-точечных схем (DRP4 и DRP5) и $3\pi/5$ для 13-точечной схемы (DRP6).

Во всех трёх схемах первые два коэффициента a_m обуславливались аппроксимацией производной, что давало формальный 4-й порядок аппроксимации. Остальные коэффициенты определялись из условия (5). Коэффициенты рассматриваемых схем представлены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты различных схем DRP 4-го порядка

	DRP4	DRP5	DRP6
a_1	0,841570125482	0,872756993962	0,907646591371
a_2	-0,244678931765	-0,286511173973	-0,337048393268
a_3	0,059463584768	0,090320001280	0,133442885327
a_4	-0,007650904064	-0,020779405824	-0,045246480208
a_5	–	0,002484594688	0,011169294114
a_6	–	–	-0,001456501759

Предельное разрешаемое схемами количество точек на длину волны составляло 4,22, 3,93 и 3,36 для DRP4, DRP5 и DRP6 соответственно. Для расчётов в данной работе из представленных трёх схем была выбрана схема DRP6, имеющая наилучшие волновые характеристики и, кроме того, приемлемую вычислительную сложность.

3.3. Фильтрация решения

Для обеспечения устойчивости схемы DRP и диссипации энергии мелких масштабов применяются оптимизированные селективные фильтры вида:

$$\tilde{U}_{i,j,k}^{\xi} = U_{i,j,k} - \sigma \left(d_0 U_{i,j,k} + \sum_{m=1}^N d_m (U_{i+m,j,k} + U_{i-m,j,k}) \right),$$

где $\tilde{U}_{i,j,k}^{\xi}$ и $U_{i,j,k}$ — фильтрованная по ξ координате расчётной системы функция в точке сетки с индексами (i, j, k) и её начальное (до фильтрации) значение в той же точке; $\sigma \in [0, 1]$ — сила фильтра; d_m — коэффициенты фильтра. Фильтрация по η и ζ записывается аналогично.

Коэффициенты d_m определяются путём минимизации следующего функционала:

$$\int_{\ln(\eta_1)}^{\ln(\eta_2)} D_{id}(k\Delta x) d(\ln(k\Delta x)) \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $D_{id}(k\Delta x)$ — идеальная демпфирующая кривая в пространстве волновых чисел, равная нулю при $k\Delta x = 0$ (то есть не модифицирующая хорошо разрешённые схемой волны) и единице при $k\Delta x = \pi$ (то есть полностью подавляющая высокочастотные волны, плохо разрешённые схемой). В качестве такой кривой авторами [1] использовалась следующая функция:

$$D_{id}(k\Delta x) = e^{-\ln(2) \left(\frac{k\Delta x - \pi}{0,2\pi} \right)^2}. \quad (7)$$

Границы интегрирования η_1 и η_2 в (6) для 9-, 11- и 13-точечных фильтров выбирались такими же, как и для соответствующих 9-, 11- и 13-точечных схем DRP. Коэффициенты фильтров, полученные с помощью (6) и (7), представлены в таблице 2. Фильтрация проводилась в конце каждого шага по времени последовательно по координатам расчётной системы ξ , η и ζ .

Таблица 2. Коэффициенты оптимизированных фильтров для схем DRP

	SFO4	SFO5	SFO6
d_0	0,24352749312	0,215044884112	0,190899511506
d_1	-0,20478888064	-0,187772883589	-0,171503832236
d_2	0,12000759168	0,123755948787	0,123632891797
d_3	-0,04521111936	-0,059227575576	-0,069975429105
d_4	0,00822866176	0,018721609157	0,029662754736
d_5	–	-0,002999540835	-0,008520738659
d_6	–	–	0,001254597714

3.4. Схема LDDRК

Для интегрирования по времени применялась оптимизированная схема Рунге–Кутты 4-го порядка LDDRК (Low Dispersion and Dissipation Runge–Kutta) [15], содержащая два слоя переменных: основной (U) и промежуточный (V). Оптимизация этой схемы основывалась на том же принципе, что и оптимизация схемы DRP, а именно путём минимизации дисперсионных ошибок улучшались её волновые свойства. Переход на новый шаг по времени в схеме LDDRК осуществляется с помощью шести последовательных подшагов (в отличие от 4-х для стандартной схемы RK4). При этом на каждом

из подшагов j с помощью схемы DRP вычисляется невязка $R_j(U)$, представляющая собой все слагаемые в (2) (кроме $\partial U/\partial t$), перенесённые в правую часть. Данную схему можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} V_j &= \alpha_j V_{j-1} + \Delta t R_j(U_{j-1}), \\ U_j &= U_{j-1} + \beta_j V_j \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, \dots, S),$$

где в фигурных скобках указана последовательность одного подшага j . Сначала с помощью невязки $R_j(U_{j-1})$, коэффициента α_j и значения V_{j-1} переменных промежуточного слоя с предыдущего шага рассчитываются соответствующие переменные V_j промежуточного слоя на текущем подшаге. Далее с учётом коэффициента β_j осуществляется пересчёт полей основного слоя U_j . При $j=1$ под величиной U_0 подразумевается переменная U_{j-1} до начала интегрирования на очередном подшаге по времени. Значение S определяет количество подшагов. Коэффициенты α_j и β_j используемой схемы представлены в таблице 3.

Таблица 3. Коэффициенты оптимизированной 6-шаговой схемы Рунге–Кутты 4-го порядка

j	α_j	β_j
1	0,0	0,032918605146
2	-0,737101392796	0,823256998200
3	-1,634740794341	0,381530948900
4	-0,744739003780	0,200092213184
5	-1,469897351522	1,718581042715
6	-2,813971388035	0,27

4. Результаты

Как сказано ранее, расчёты проводились для двух значений числа Рейнольдса: $Re = 1600$ и $Re = 3000$. При этом применялись равномерные расчётные сетки размерностью 64^3 , 128^3 и 256^3 ячеек. Также исследовалось влияние силы фильтра на получаемые результаты. Необходимо отметить, что для успешного применения описанных схем в расчётах турбулентных течений требовалась минимальность данного влияния. Расчёт (если обратное не оговаривалось) проводился с шагом по времени, выбранным из следующего условия для числа Куранта: $CFL \approx 0,45$.

Как известно, для прямого численного моделирования течения расчётная область (при решении спектральными методами) должна содержать не менее $Re^{9/4}$ ячеек [16], что соответствует сетке с числом ячеек 253^3 в случае $Re = 1600$ и числом ячеек 406^3 в случае $Re = 3000$. Исходя из этого, расчёт для $Re = 1600$ с сеткой 256^3 является прямым численным моделированием. Однако следует учитывать и разрешающую способность используемой схемы: поскольку точность решения значительно ухудшается для самых высоких волновых чисел, эффективное сеточное разрешение для мелких структур становится меньше. Таким образом, любой из описанных случаев может рассматриваться и как относящийся к методу крупных вихрей.

Сравнение результатов проводилось по профилю безразмерной скорости диссипации кинетической энергии ε . Величина ε находилась из следующего соотношения: $\varepsilon = -dE_k/dt^*$, где E_k — кинетическая энергия в расчётной области $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$ объёмом Ω , определяемая из следующего соотношения:

$$E_k = \frac{1}{\rho_0 \Omega} \int_{\Omega} \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} d\Omega.$$

4.1. Случай $Re = 1600$

На рисунке 2 представлены результаты расчётов для различных сеток и силы фильтра. Для сравнения приведены данные прямого численного моделирования, взятые из работы [12], полученные с помощью псевдоспектрального метода на сетке размерностью 512^3 ячеек. Из рисунка видно, что в случае сетки размерностью 256^3 ячеек наблюдается почти полное совпадение результатов схемы DRP и спектральной схемы, а также минимальная зависимость результатов схемы DRP от силы

фильтра. Последнее можно объяснить тем, что наибольший вклад в решение (при разрешении мелких масштабов) вносит молекулярная вязкость, а вклад фильтрации заметно уменьшается. Также можно отметить неплохую разрешающую способность схемы: вплоть до безразмерного момента времени порядка $t^* \approx 13$ расхождение со спектральным решением минимально. Данное обстоятельство говорит и о том, что до этого момента размер основных несущих энергию вихрей остаётся достаточно большим. Основное расхождение для сетки из 256^3 ячеек связано с диссипацией энергии мелких вихревых структур, заполняющих область ближе к концу расчёта. На сетке размерностью 128^3 ячеек результаты расчётов с разной силой фильтра несколько расходятся, а на сетке из 64^3 ячеек отличие становится ещё более заметным, оставаясь, тем не менее, небольшим. Прослеживается, что с уменьшением размерности сетки диссипация энергии на ранних этапах возрастает, что вызвано неудовлетворительным разрешением вихревых структур и усилением влияния фильтрации. При этом вплоть до сетки в 64^3 ячеек пик скорости диссипации энергии сохраняет форму и амплитуду, хотя и «раздваивается» с ростом значения силы фильтра (Рис. 2в). На сетке в 32^3 ячеек, приведённой для сравнения, видно, что пик скорости диссипации сильно сдвинут влево, и следовательно, диссипация происходит раньше и на более крупных масштабах, поскольку мелкие масштабы на этой сетке отсутствуют. В то же время амплитуда пика сохраняется довольно хорошо.

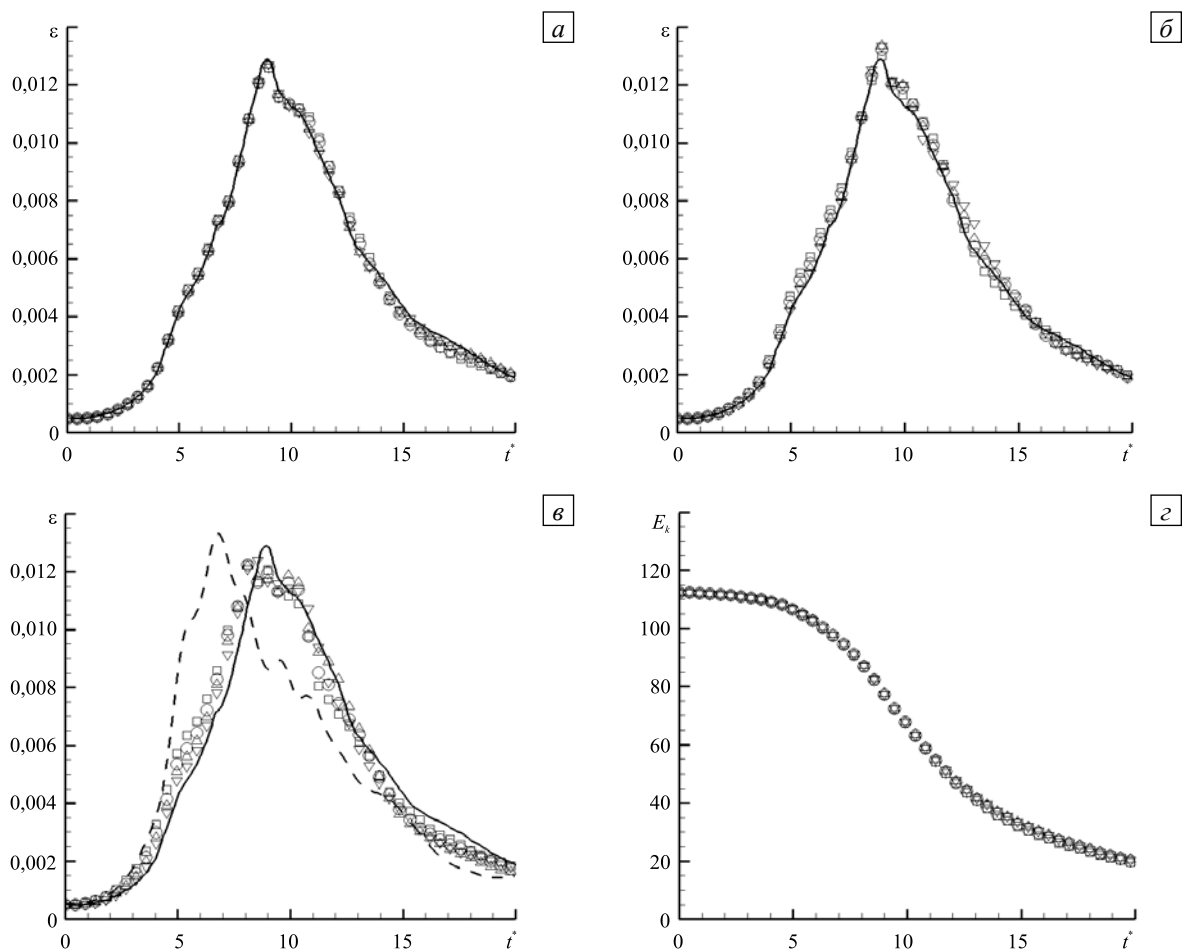


Рис. 2. Результаты расчётов для $Re=1600$: безразмерная скорость диссипации кинетической энергии ε согласно псевдоспектральному методу [12] (сплошная линия) и для схемы DRP при расчётных сетках размерностью 256^3 (а), 128^3 (б) и 64^3 (в) ячеек, а также кинетическая энергия E_k (з) при сетке размерностью 256^3 ячеек, полученные с учётом разной силы фильтра (символьные обозначения); сила фильтра составляет: $\sigma=0,2$ (∇), $\sigma=0,4$ (Δ), $\sigma=0,6$ (\circ), $\sigma=0,9$ (\square); на части (в) штриховой линией показан характер ε при сетке размерностью 32^3 и силе фильтра $\sigma=0,2$

4.2. Случай $Re = 3000$

Случаю $Re = 3000$ посвящена работа [7], в которой также рассматривается метод крупных вихрей с релаксационной фильтрацией, но основывается он на стандартных центрально-разностных схемах. При этом авторы [7] предполагают, что размер сетки 256^3 недостаточен для точного описания решения (это также вытекает из необходимого количества ячеек $Re^{9/4}$), поэтому он будет использован только для относительного сравнения результатов для различных разрешений сетки.

Результаты расчётов для $Re=3000$ представлены на рисунке 3. Для сравнения используются результаты прямого численного моделирования, полученные псевдоспектральным методом на сетках размерностью 256^3 [5] и 384^3 [11] ячеек. Как видно из рисунка, уже на сетке в 256^3 ячеек решение начинает зависеть от силы фильтра. Для фильтров с силой $\sigma > 0,2$ пик скорости диссипации в момент времени $t^* \approx 9$ уменьшается по амплитуде и «размывается» на более поздние моменты времени $10 < t^* < 12$. Аналогичное явление наблюдается и на сетке в 128^3 ячеек, только в этом случае для фильтров с силой $\sigma > 0,2$ амплитуда пика увеличивается, и диссипация в целом осуществляется несколько раньше, что приводит к её заметному снижению при $12 < t^* < 18$. Для фильтров же с силой $\sigma = 0,2$ полученные результаты довольно хорошо ложатся в диапазон псевдоспектральных (в частности, по положению и амплитуде пика) как для сетки размерностью 256^3 , так и для сетки в 128^3 ячеек.

Следует отметить, что поведение представленных результатов для сеток в 256^3 и 128^3 ячеек напоминает поведение результатов, вычисленных псевдоспектральными методами на сетках в 384^3 и 256^3 ячеек: на более грубой сетке амплитуда пика скорости диссипации становится больше. При сетках в 64^3 и 32^3 ячеек ситуация похожа на ту, что имела место для $Re=1600$, но при $Re=3000$ диссипация энергии происходит в более ранние моменты времени в силу недостаточного разрешения мелких вихревых структур.

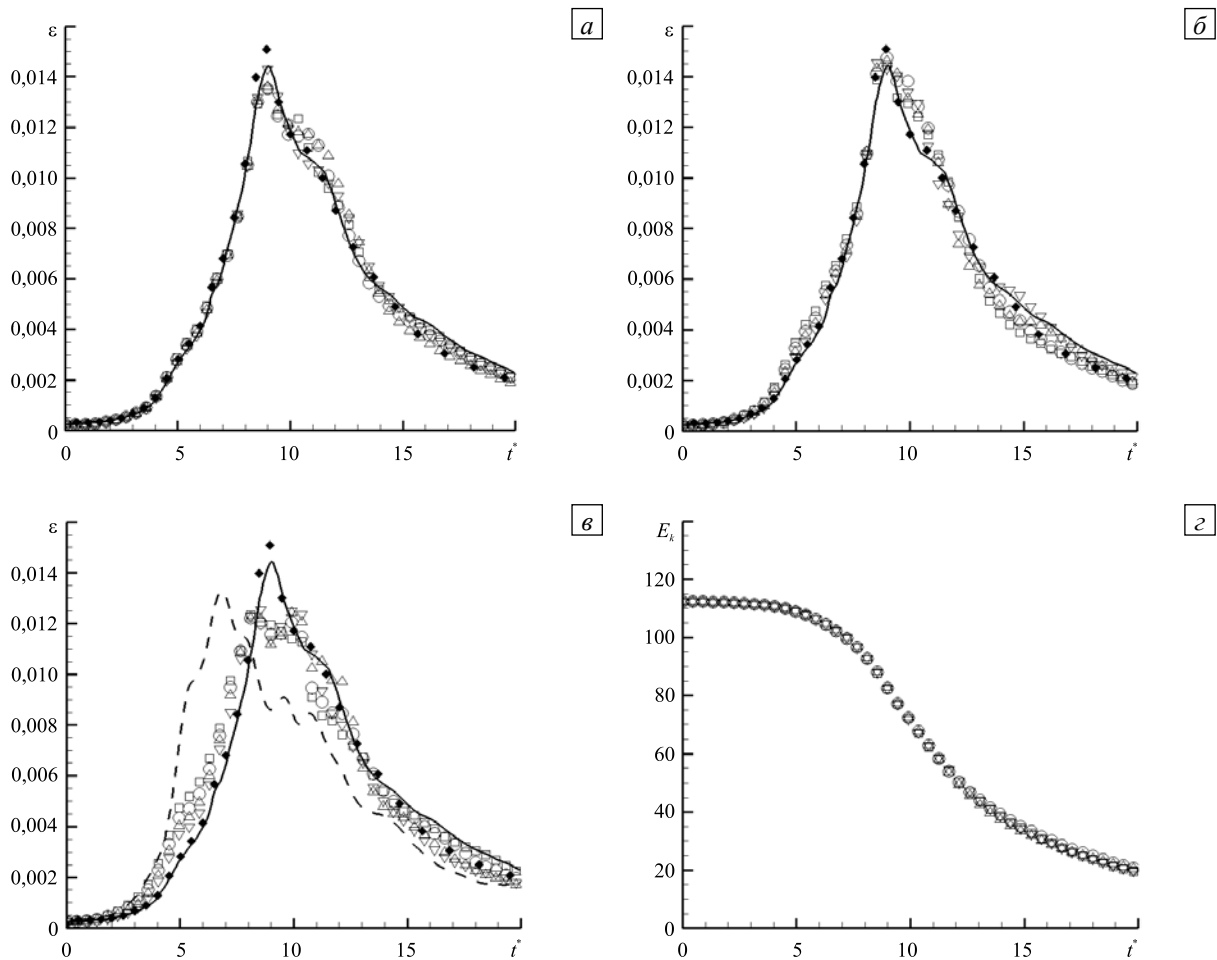


Рис. 3. Результаты расчётов для $Re=3000$: безразмерная скорость диссипации кинетической энергии ε для псевдоспектральной схемы на сетках из 384^3 [11] (сплошная линия), 256^3 [5] (символы \blacklozenge) ячеек и схемы DRP на сетках 256^3 (а), 128^3 (б) и 64^3 (в) ячеек, а также кинетическая энергия E_k (г) при сетке размерностью 256^3 ячеек, полученные с учётом разной силы фильтра (символьные обозначения); сила фильтра составляет: $\sigma=0,2$ (∇), $\sigma=0,4$ (Δ), $\sigma=0,6$ (\circ), $\sigma=0,9$ (\square); на части (в) штриховой линией показан характер ε при сетке размерностью 32^3 и силе фильтра $\sigma=0,2$

4.3. Зависимость решения от размера шага по времени

Результаты, описанные ранее, были получены при размере шага по времени, определённом согласно условию $CFL \approx 0,45$. При этом зависимость результатов от силы фильтра (в выбранном

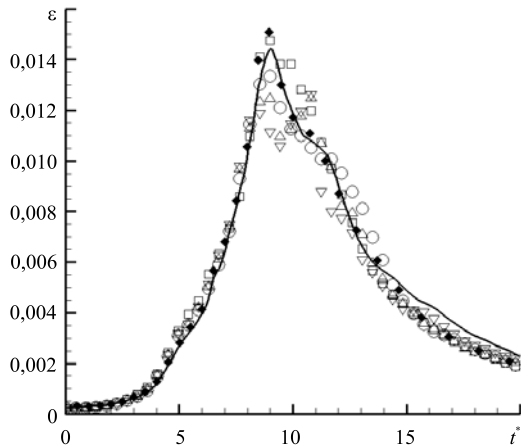


Рис. 4. Результаты расчётов для $Re = 3000$ зависимости от времени безразмерной скорости диссипации кинетической энергии ε при спектральной схеме на сетке 384^3 (сплошная линия) и 256^3 (♦) ячеек и схеме DRP с расчётной сеткой размерностью 128^3 ячеек и силой фильтра $\sigma = 0,6$ с разным временным шагом, то есть при $CFL \approx 0,06$ (▽), $CFL \approx 0,1$ (Δ), $CFL \approx 0,23$ (○), $CFL \approx 0,45$ (□)

значительно сильнее, чем в случае изменения силы фильтра σ (Рис 3б). Это объясняется тем, что при изменении величины шага по времени в m раз (в данном примере $m = 7,5$), общая диссипация за счёт фильтра будет отличаться также в m раз. К примеру, расчёт с $CFL = 0,2$ и $\sigma = 0,5$ эквивалентен, с точки зрения объёма фильтрации (8), расчёту при $CFL = 0,4$ и $\sigma = 1,0$, поскольку уменьшается эффективное разрешение схемы, что и делает результаты похожими. Таким образом, значение искомой величины в каждой конкретной ячейке области существенно зависит от числа Куранта в этой ячейке. Так, если бы в данной задаче использовалась неравномерная сетка с уменьшенным в несколько раз размером всего одной ячейки, результаты для всей области поменялись бы, как на рисунке 4, в силу того, что шаг по времени из условия Куранта также бы уменьшился. Аналогичное явление характерно для большинства практических задач, в которых сетка может быть сильно неравномерной и иметь вариации размеров ячеек в десятки, сотни и более раз.

В действительности это говорит о том, что используемая схема (по крайней мере, в задачах, похожих на рассмотренную здесь) не обеспечивает сходимости решения по времени. Однако, несмотря на это, данные схемы применяются в практических расчётах с достаточно хорошими результатами [3].

5. Заключение

Проведено исследование свойств метода крупных вихрей с релаксационной фильтрацией при реализации с помощью схем типа DRP применительно к моделированию турбулентных течений. С его помощью осуществлены расчёты распада вихря Тейлора–Грина. Вычислительные эксперименты для различных расчётных сеток и чисел Рейнольдса показали хорошее совпадение с данными спектральных расчётов других авторов. Оценено влияние единственного свободного параметра рассмотренной схемы DRP — силы фильтра. Обнаружено, что сила фильтра влияет на решение в меньшей степени при использовании подробной расчётной сетки, разрешающей довольно мелкие вихри. При этом на более грубых сетках, где зависимость результатов непосредственно от молекулярной вязкости меньше, сила фильтра проявляет несколько большее влияние. Тем не менее, при фиксированном размере шага по времени это влияние достаточно мало.

В работе также выявлена важная особенность метода крупных вихрей с релаксационной фильтрацией — это существенная зависимость решения от размера шага по времени (при фиксированной силе фильтра), которая фактически означает отсутствие его сходимости по времени. Эту особенность можно объяснить тем, что уменьшение размера шага по времени (при условии фиксированной силы фильтра) приводит к увеличению общей диссипации за счёт фильтрации и дополнительному «размазыванию» решения. Это в свою очередь может сказаться на результатах решения при использовании неравномерных сеток, которые зачастую применяются на практике. Примерами могут служить исследования любых течений, ограниченных стенками, где обычно прибегают

диапазоне $0,2 \leq \sigma \leq 0,9$) была минимальной. «Общий объём» фильтрации χ за некоторое время t можно выразить как

$$\chi = \sigma \cdot n, \quad (8)$$

где $n = t/\Delta t$ — количество шагов за время t , Δt — размер шага по времени [11]. Таким образом, при уменьшении Δt значение χ будет увеличиваться, и общая диссипация в области за тот же отрезок времени будет больше, что может повлиять на решение.

Рассмотрим случай $Re = 3000$ и проведём расчёты скорости диссипации кинетической энергии ε с фиксированной силой фильтра $\sigma = 0,6$ на сетке в 128^3 ячеек при нескольких условиях для числа Куранта: $CFL \approx (0,06; 0,11; 0,23; 0,45)$, то есть с разными величинами шага по времени. Полученные результаты представлены на рисунке 4.

Как видно из рисунка, результаты зависят от числа Куранта и отличаются друг от друга достаточно сильно, и разница проявляется

к сгущению расчётной сетки по направлению к стенке. По мере уменьшения размера пристеночных ячеек изменяется и допустимый размер шага по времени, что может привести к другим результатам.

Тем не менее, несмотря на эту особенность, данная схема успешно применяется в сложных задачах (см., например, расчёт шума турбулентных струй в [3]). Кроме того, возможна доработка рассмотренного метода крупных вихрей с релаксационной фильтрацией, например, с помощью дополнительного управления силой фильтра.

Литература

1. *Bogey C., Bailly C.* A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // *J. Comput. Phys.* – 2002. – Vol. 194, no. 1. – P. 194-214. DOI
2. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // *J. Comput. Phys.* – 1992. – Vol. 103, no. 1. – P. 16-42. DOI
3. *Bogey C., Bailly C.* Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering // *Comput. Fluids.* – 2006. – Vol. 35, no. 10. – P. 1344-1358. DOI
4. *Taylor G.I., Green A.E.* Mechanism of the production of small eddies from larger ones // *Proc. Royal Soc. A.* – 1937. – Vol. 158, no. 895. – P. 499-521. <http://www.jstor.org/stable/96892> (дата обращения: 28.01.2015).
5. *Brachet M.E., Meiron D.I., Orszag S.A., Nickel B.G., Morf R.H., Frisch U.* Small-scale structure of the Taylor–Green vortex // *J. Fluid Mech.* – 1983. – Vol. 130. – P. 411-452. DOI
6. *Brachet M.E.* Direct simulation of three-dimensional turbulence in the Taylor–Green vortex // *Fluid Dyn. Res.* – 1991. – Vol. 8, no. 1-4. – P. 1-8. DOI
7. *Drikakis D., Fureby C., Grinstein F., Youngs D.* Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor–Green vortex // *J. Turbul.* – 2007. – Vol. 8. DOI
8. *Aspden A., Nikiforakis N., Dalziel S., Bell J.B.* Analysis of implicit LES methods // *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.* – 2008. – Vol. 3, no. 1. – P. 103-126. DOI
9. *Глотов В.Ю., Головизнин В.М.* Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных «скорость–давление» // *ЖВММФ.* – 2013. – Т. 53, № 6. – С. 898-913. (English version DOI).
10. *Елизарова Т.Г., Широков И.А.* Ламинарный и турбулентный режимы распада вихря Тейлора–Грина // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2013. – Т. 63. (URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-63>).
11. *Fauconnier D., Bogey C., Dick E.* On the performance of relaxation filtering for large-eddy simulation // *J. Turbul.* – 2013. – Vol. 14, no. 1. – P. 22-49. DOI
12. *Van Rees W.M., Leonard A., Pullin D.I., Koumoutsakos P.* A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high Reynolds numbers // *J. Comput. Phys.* – 2011. – Vol. 230. – P. 2794-2805. DOI
13. *Ровенская О.И.* Исследование эволюции вихревой системы на основе решения уравнения Больцмана // *ЖВММФ.* – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1609-1615. (English version DOI).
14. *Хлопков Ю.И., Воронич И.В., Ровенская О.И.* Прямое статистическое моделирование эволюции вихревой системы в разреженном газе // *Матем. моделирование.* – 2007. – Т. 19, № 2. – С. 39-47.
15. *Berland J., Bogey C., Bailly C.* Optimized explicit schemes: matching and boundary schemes, and 4th-order Runge–Kutta algorithm // 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 10-12 May 2004, Manchester, Great Britain. – AIAA 2004-2814. DOI
16. *Orszag S.A.* Analytical theories of turbulence // *J. Fluid Mech.* – 1970. – Vol. 41, no. 2. – P. 363-386. DOI

References

1. *Bogey C., Bailly C.* A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comput. Phys.*, 2002, vol. 194, no. 1, pp. 194-214. DOI
2. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 1992, vol. 103, no. 1, pp. 16-42. DOI
3. *Bogey C., Bailly C.* Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering. *Comput. Fluids*, 2006, vol. 35, no. 10, pp. 1344-1358. DOI
4. *Taylor G.I., Green A.E.* Mechanism of the production of small eddies from larger ones. *Proc. Royal Soc. A.*, 1937, vol. 158, no. 895, pp. 499-521, available at: <http://www.jstor.org/stable/96892> (assessed 28 January 2015).
5. *Brachet M.E., Meiron D.I., Orszag S.A., Nickel B.G., Morf R.H., Frisch U.* Small-scale structure of the Taylor–Green vortex. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 130, pp. 411-452. DOI
6. *Brachet M.E.* Direct simulation of three-dimensional turbulence in the Taylor–Green vortex. *Fluid Dyn. Res.*, 1991, vol. 8, no. 1-4, pp. 1-8. DOI
7. *Drikakis D., Fureby C., Grinstein F., Youngs D.* Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor–Green vortex. *J. Turbul.*, 2007, vol. 8. DOI
8. *Aspden A., Nikiforakis N., Dalziel S., Bell J.B.* Analysis of implicit LES methods. *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2008, vol. 3, no. 1, pp. 103-126. DOI
9. *Glotov V.Y., Goloviznin V.M.* CABARET scheme in velocity-pressure formulation for two-dimensional incompressible fluids. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 6, pp. 721-735. DOI
10. *Elizarova T.G., Shirokov I.A.* Laminarnyj i turbulentnyj regimy raspada vikhrya Teilora–Grina [Laminar and turbulent regimes of the Taylor–Green vortex decay]. Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2013, vol. 63. (URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-63>).

11. Fauconnier D., Bogey C., Dick E. On the performance of relaxation filtering for large-eddy simulation. *J. Turbul.*, 2013, vol. 14, no. 1, pp. 22-49. DOI
12. Van Rees W.M., Leonard A., Pullin D.I., Koumoutsakos P. A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high Reynolds numbers. *J. Comput. Phys.*, 2011, vol. 230, pp. 2794-2805. DOI
13. Rovenskaya O.I. Analysis of the evolution of an eddy system based on the Boltzmann equation. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 9, pp. 1544-1550. DOI
14. Khlopkov Yu.I., Voronich I.V., Rovenskaya O.I. Direct numerical simulation of the vortical system evolution in rarefied gas. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Simulation*, 2007, vol. 19, no. 2, pp. 39-47.
15. Berland J., Bogey C., Bailly C. Optimized explicit schemes: matching and boundary schemes, and 4th-order Runge–Kutta algorithm. *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 10-12 May 2004, Manchester, Great Britain, AIAA 2004-2814*. DOI
16. Orszag S.A. Analytical theories of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 41, no. 2, pp. 363-386. DOI

Поступила в редакцию 21.05.2014; опубликована в электронном виде 31.03.2015

Сведения об авторах

Коромыслов Евгений Васильевич, асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: keltrivera@gmail.com

Усанин Михаил Владимирович, ктн, вед. констр., ОАО «Авиадвигатель», 614990, Пермь, Комсомольский пр., д. 93; e-mail: usanin@avid.ru

Гомзииков Леонид Юльевич, ктн, нач. бригады, ОАО «Авиадвигатель»; e-mail: gomzikov@avid.ru

Синер Александр Александрович, ктн, доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: siner@avid.ru