

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.1  
УДК 504.3.054:551.5

## ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОМАСШТАБНЫХ ПРОЦЕССОВ В НИЖНЕМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА

К.Г. Шварц, Ю.А. Шварц, В.А. Шкляев

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

С помощью новой двумерной модели мезомасштабных процессов оценивается влияние неоднородности температуры и влажности на образование вихревых структур в нижнем слое атмосферы. Вывод модели осуществляется на основе локально-равновесного подхода путем усреднения поперек слоя исходных трехмерных уравнений, описывающих мезомасштабные атмосферные процессы. Для замыкания системы, заключающегося в определении нелинейных слагаемых и значений на границах полей скорости, температуры и влажности через усредненные поля, используется точное решение исходной задачи, описывающее однородное по горизонтальным координатам течение. Это решение находится для бесконечного горизонтального вращающегося слоя в предположении несжимаемости воздуха в нижнем слое атмосферы и линейного распределения температуры и влажности подстилающей поверхности. Численные расчеты проводились методом сеток с помощью явной конечно-разностной схемы на сетке  $200 \times 200$  узлов. Рассматривалась площадка  $40 \times 40$  километров в северо-западной части города Перми и прилегающих окрестностях. Расчеты показали, что на фоне значительных горизонтальных градиентов температуры воздуха и влажности в нижнем слое атмосферы возникают вихревые структуры с вертикальной осью вращения. Появление вихревых структур обуславливается также конфигурацией зон значительных градиентов и их расположением относительно движущегося воздуха.

*Ключевые слова:* моделирование пограничного слоя атмосферы, неоднородность температуры и влажности, численные расчеты

## TWO-DIMENSIONAL MODEL OF MESOSCALE PROCESSES IN THE LOWER ATMOSPHERE WITH ALLOWANCE FOR INHOMOGENEITY OF TEMPERATURE AND AIR HUMIDITY

K.G. Shvarts, Yu.A. Shvarts and V.A. Shklyayev

*Perm State University, Perm, Russian Federation*

A new two-dimensional model of mesoscale processes is used to estimate the influence of temperature and air humidity heterogeneities on the formation of vortex structures in the lower atmosphere. The model has been developed on the basis of the local equilibrium approach by averaging the original three-dimensional equations for mesoscale atmospheric processes across the layer. To close the system of equations, an exact solution of the original problem describing the flow homogeneous with respect to horizontal coordinates is applied. The closure consists in determining the nonlinear terms and the values at the boundaries of velocity, temperature and humidity fields via the averaged field. The solution is obtained for an infinite horizontal rotating layer under the assumption of air incompressibility in the lower atmosphere and linear distribution of the temperature and humidity of the underlying surface. Numerical calculations were performed using a grid method, in which an explicit finite difference scheme is applied to a grid of  $200 \times 200$  nodes. Computations were carried out for the  $40 \times 40$  km area in the North-Western part of the city of Perm and its immediate vicinity with account for the underlying surface roughness. It has been found that the vortex structure with a vertical axis of rotation arises at significant horizontal gradients of temperature and humidity in the lower atmosphere. The formation of vortex structures also depends on the configuration of the zones of significant gradients and their location relative to the moving air.

*Key words:* atmospheric boundary layer modeling, temperature and humidity heterogeneity, numerical calculations

### 1. Введение

Известно, что свойства подстилающей поверхности в значительной степени определяют структуру пограничного слоя атмосферы (ПСА) [1, 2]. Например, летом его высота много больше, чем зимой, и одна из причин этого — существенная температурная неоднородность подстилающей поверхности. Зимой, при сравнительно небольшом потоке солнечной радиации, действующем на поверхность, покрытую снегом, и большом значении альбедо, температура поверхности изменяется мало. Летом же, кроме температурной неоднородности, велика неоднородность влажности поверхности. Действие этих факторов проявляется в том, что влияние подстилающей поверхности на прилегающий слой воздуха либо усиливается, либо ослабевает. Термическая неоднородность приводит к образованию местных систем циркуляции, когда вихревое движение возникает в вертикальной плоскости. Примером такой системы служит дневной и ночной бриз. Однако горизонтальная термическая неоднородность может служить причиной формирования циркуляционных систем и в горизонтальной плоскости, например, образование циклонов совершается при значительных горизонтальных градиентах температуры воздуха. Горизонтальные градиенты влажности могут усиливать этот процесс. Учет влажности особенно важен в случае изучения распространения живых биоаэрозольей.

Описание современных методов моделирования мезомасштабных атмосферных процессов, методов усвоения метеорологических данных, применяемых за рубежом, представлено в книге [3]. Г.И. Марчук с коллегами [4] сформулировал трехмерную модель микроклимата города в терминах скорости,

потенциальной температуры, удельной влажности. Параметризация приземного слоя производилась с помощью теории Мони́на–Обухова, температура на поверхности Земли определялась из уравнений теплового баланса. Учитывались длинноволновое излучение, коротковолновая солнечная радиация, поток тепла антропогенного характера. Для прогностических целей фоновые значения метеозадающих элементов брались из моделей крупномасштабных атмосферных процессов, а для диагностических целей использовались результаты обработки измерений в реальной атмосфере.

В [5] Н.С. Вельтищевой осуществлен обзор зарубежных работ, описывающих четырнадцать моделей для исследования городского острова тепла. Там же, в частности, представлена трехмерная негидростатическая модель атмосферной циркуляции над городским островом тепла. Уравнения рассматривались в приближении Буссинеска при условиях несжимаемости и статичности среды. Уравнение притока тепла не учитывало фазовые переходы. Уравнение теплового баланса на земной поверхности содержало слагаемые, описывающие как природные, так и антропогенные источники притока и стока тепла.

В работе М.Е. Берлянда, М.Н. Зашихина [6] на основе двумерной модели зонального типа предложена теория возникновения острова тепла и образования радиационных туманов в городе в результате антропогенного воздействия. С помощью двумерной модели мезометеорологических процессов зонального типа, обусловленных температурной неоднородностью подстилающей поверхности, в [7] (автор Л.П. Белова) изучалась бризовая циркуляция с учетом взаимодействия воздушного потока с элементами городской застройки. Модель включала все три уравнения для компонент скорости, уравнение теплопроводности для потенциальной температуры, уравнение для влажности и уравнение переноса турбулентной энергии с учетом сложного рельефа подстилающей поверхности. А.Г. Тарнопольский, В.А. Шнайман (см. [8]), используя  $k-\varepsilon$  замыкания, предложили нестационарную трехмерную модель пограничного слоя атмосферы для района, включающего городские постройки (в центре области  $40 \times 40$  км) и пригородную зону (всего  $100 \times 140$  км). В качестве начальных данных использовалась стандартная аэрометеоинформация. Оценивалось воздействие «острова тепла» и городского «острова шероховатости» на циркуляционные режимы и турбулентное перемешивание в рассматриваемой зоне. Следует выделить также модель [9, 10], которая успешно применялась в задачах охраны окружающей среды.

Как правило, во всех трехмерных моделях шаг сетки по горизонтали составляет не менее одного километра, что явно недостаточно для учета влияния подстилающей поверхности на мезомасштабные процессы в нижнем слое атмосферы. Для исследования циркуляционных систем мезомасштаба, которые проявляются в нижней атмосфере и вызваны неоднородностью температуры и влажности, удобен метод, изложенный в монографии [11]; его основные идеи кратко описаны в обзоре [12]. С помощью этого подхода решен ряд задач [13–15], где отмечается связь температурной неоднородности подстилающей поверхности с распространением примеси в окрестности города Березники [13], города Кирова [14] и, при наличии торфяного пожара, вблизи города Перми [15].

При оценке локального воздействия неоднородных температуры и влажности на динамику нижней атмосферы в предлагаемой вниманию работе выбрана территория с разнообразными типами подстилающей поверхности, характеризующимися значительными горизонтальными градиентами температуры и влажности. Расчетная территория представляет собой квадрат со стороной 40 км, в центре которого располагается жилая застройка, акватория реки Камы и другое (подробное описание см. в [16]). Область покрывается сеткой с шагом 200 м, сетка имеет размеры  $200 \times 200$  узлов (Рис. 1).

## 2. Исходные уравнения

Итак, рассмотрим нижний слой атмосферы толщиной  $D$ . В качестве исходной возьмем систему уравнений гидротермодинамики мезомасштабных процессов для влажной атмосферы во вращающейся трехмерной декартовой системе координат  $Oxyz$ . Система включает уравнения движения, неразрывности, притока тепла, а также уравнение переноса массовой доли водяного пара [9]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v + A_M \Delta u + \frac{\partial}{\partial z} k_M \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u + A_M \Delta v + \frac{\partial}{\partial z} k_M \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \beta \theta + A_M \Delta w + \frac{\partial}{\partial z} k_M \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = A_T \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial z} k_T \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = A_q \Delta q + \frac{\partial}{\partial z} k_q \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа.

Начальные условия включают скорость и направление геострофического ветра, температуру и влажность поверхности

$$u = -c_g \sin(dd), \quad v = -c_g \cos(dd), \quad \theta = \theta_s, \quad q = q_s \quad \text{при } t = 0. \quad (7)$$

Граничные условия такие же, как в [14], но с учетом влажности:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = D, \quad (8)$$

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma_{Ti}(\theta_1 - \theta_s), \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \gamma_{qi}(q - q_s) \quad \text{при } z = 0. \quad (9)$$

В уравнениях (1)–(9) приняты обозначения:  $t$  — время; ось  $Ox$  направлена на восток, ось  $Oy$  — на север, а ось  $Oz$  — вертикально вверх, перпендикулярно поверхности земли;  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — вектор скорости движения воздуха;  $\Phi = RT_{cp} p' / p$  — флуктуации геопотенциала, где  $T_{cp}$  — средняя температура воздуха в слое,  $p'$  — флуктуации атмосферного давления;  $l$  — параметр Кориолиса;  $\beta = g / \bar{\theta}$  — параметр плавучести ( $\bar{\theta}$  — средняя потенциальная температура окружающего воздуха);  $\theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$  — потенциальная температура воздуха, где  $p$  — атмосферное давление как функция высоты,  $p_0$  — атмосферное давление у поверхности земли,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $q$  — массовое содержание водяного пара в воздухе; для представления турбулентных потоков и напряжений используется концепция коэффициентов турбулентного обмена [17], когда  $A_m, k_m$  — это коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости,  $A_T, k_T$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной теплопроводности,  $A_q, k_q$  — коэффициенты горизонтального

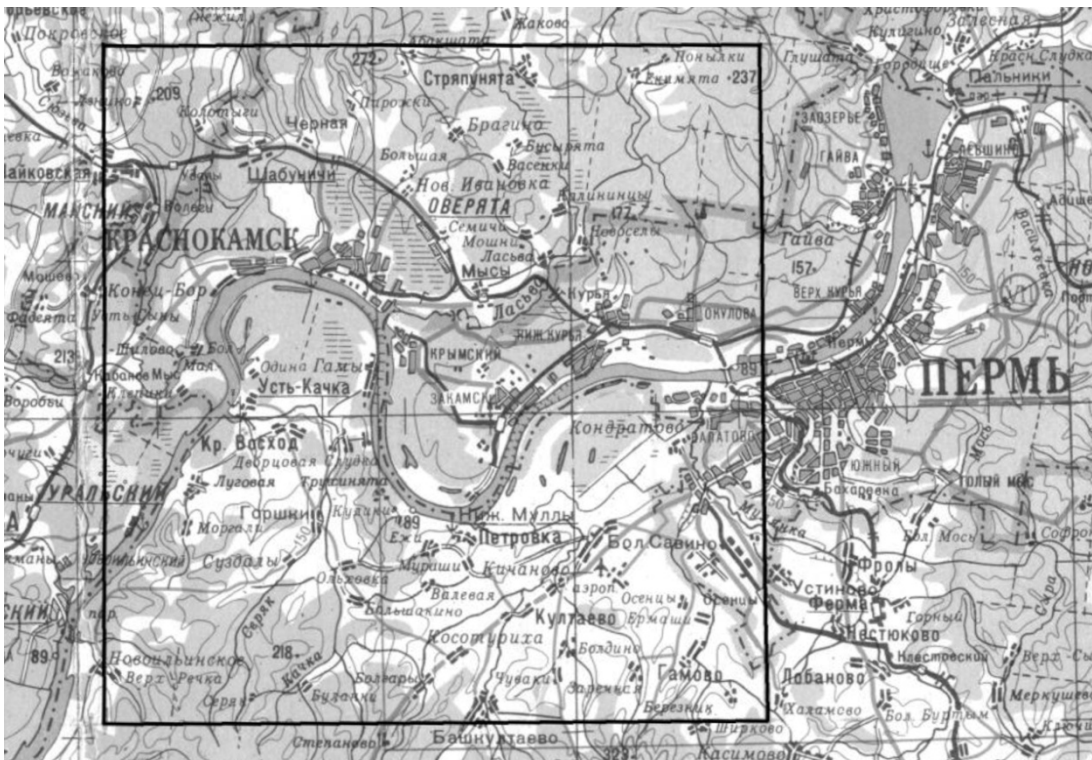


Рис. 1. Территория, используемая при моделировании

и вертикального турбулентного переноса влаги берутся постоянными величинами;  $c_g$  — скорость геострофического ветра на верхней свободной границе пограничного слоя атмосферы;  $dd$  — азимут геострофического ветра;  $\theta_s$  и  $q_s$  — температура воздуха и массовое содержание водяного пара на уровне шероховатости подстилающей поверхности;  $\gamma_{Ti}$  и  $\gamma_{qi}$  — коэффициенты тепло- и влагоотдачи ( $i$  — индекс, указывающий на тип шероховатой поверхности). В уравнениях присутствует удельная газовая постоянная  $R$ , входящая в уравнение состояния влажного воздуха:  $p = \rho RT(1 + 0,61q)$ , где произведение  $T(1 + 0,61q)$  называют виртуальной температурой ( $T_v$ ); в этом случае можно считать, что относительные пульсации плотности выражаются через относительные пульсации виртуальной, либо потенциальной температуры и пульсации влажности:  $\rho'/\rho \approx -T_v'/T \approx -(\theta'/T + 0,61q')$  (следует заметить, что с учетом характерного значения влажности и ее флуктуаций второе слагаемое примерно на порядок меньше первого). Таким образом, при учете влажности воздуха также может быть использовано и приближение Буссинеска.

Рассматривается площадка размерами  $L \times L$ . Скорость геострофического ветра  $c_g$  над пограничным слоем атмосферы и его направление, высота пограничного слоя  $D$  считаются известными величинами. Значение горизонтальных полей скорости ветра выше подстилающей поверхности вычисляются по формуле [14]:  $u = -c_g \sin(dd)$ ,  $v = -c_g \cos(dd)$ . Так, например, при  $dd = 0^\circ$  ветер имеет северное направление, а при  $dd = 90^\circ$  — восточное. Ветер также может задаваться в виде среднего поперек слоя поля скорости. На боковых границах предполагается, что

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial n} = 0, \quad (10)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к боковым границам рассматриваемой области.

Некоторую сложность представляет формулировка условий на нижней границе; здесь условия могут существенно различаться, если учитывать многообразие типов подстилающей поверхности и ее неоднородность. Каждый тип поверхности определяет температурный, влажностный и ветровой режимы приземного слоя. Таким образом, для каждого типа поверхности должны быть известны следующие характеристики: уровень шероховатости, значения температуры и влажности и их градиенты у поверхности земли. При этом значения характеристик меняются в зависимости от погодных условий и сезона года. Исходя из особенностей района исследований (Рис. 1) выделено пять типов подстилающей поверхности: городская территория ( $i = 1$ ), река ( $i = 2$ ), заболоченная поверхность ( $i = 3$ ), лес ( $i = 4$ ), участок с мелким кустарником или поле ( $i = 5$ ). Для поверхности каждого типа уровень микрошероховатости определялся формально, в соответствии с литературными данными. Эти характеристики задавались в каждом узле сетки.

Температурные и влажностные изменения микроклиматических особенностей поверхности оценивались по сравнению с фоновыми значениями, которые соответствовали поверхности 5-го типа. Различия зависели от погодных условий и выбирались согласно [18, 19]. Некоторые характеристики поверхностей выделенных типов приведены в таблице для одного класса устойчивости атмосферы.

Таблица. Динамические и термические особенности подстилающих поверхностей различных типов при сильной неустойчивости атмосферы

Тип поверхности	$i$	Температурные различия относительно фона, °С	Уровень шероховатости, м	Разность температуры в метровом слое, °С	Парциальное давление у поверхности, ГПа
Город	1	3	0,500	-1,5	20,3
Река, озеро	2	-10	0,001	0,3	11,8
Болото	3	-7	0,005	0,1	13,6
Лес	4	-5	0,500	-0,1	15,2
Поле, мелкий кустарник	5	0	0,060	-0,7	17,5

При определении коэффициентов тепло- и влагоотдачи использовались универсальные функции  $\phi(\zeta)$ , где  $\zeta = z/D$  (см. [5]):

$$\gamma_T(\zeta_1, \zeta_0) = \gamma_q(\zeta_1, \zeta_0) = \frac{\Phi_T(\zeta_1)}{z_1 \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0)}. \quad (11)$$

$$\varphi_T(\zeta) = \varphi_q(\zeta) = \begin{cases} 0,7(1-35\zeta)^{-1/3} + \frac{0,3}{1+8\zeta^2}, & \zeta \leq 0, \\ 1+6\zeta, & \zeta \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\zeta_1 = \frac{z_1}{L_1}, \quad \zeta_0 = \frac{z_0}{L_1}; \quad (13)$$

здесь принято:  $z_1 = 1$  м;  $z_0$  — уровень шероховатости для заданного типа поверхности;  $L_1$  — масштаб длины Монина–Обухова [21], который обуславливается типом погодных условий [2];  $\theta_n$  — безразмерная температура или влажность.

Равенство функций  $\varphi_T(\zeta)$  и  $\varphi_q(\zeta)$ , то есть подобие профилей температуры и влажности, вытекает из исходной системы уравнений и является следствием однотипности процессов турбулентного переноса скалярных характеристик [20]:

$$\Delta\theta_n(\zeta_1, \zeta_0) = \theta_n(\zeta_1) - \theta_n(\zeta_0), \quad (14)$$

$$\theta_n(\zeta) = \begin{cases} 0,7 \left[ \ln \frac{y-1}{\sqrt{y^2+y+1}} + \sqrt{3} \arctg \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right] + 0,3 \ln \frac{|\zeta|}{\sqrt{1+8\zeta^2}}, & \zeta \leq 0, \\ \ln \zeta + 6\zeta, & \zeta \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $x = (1-8\zeta)^{1/3}$ ,  $y = (1-36\zeta)^{1/3}$ ,  $\theta_1 - \theta_s$ ,  $q_1 - q_s$  — разности температуры и влажности в метровом поверхностном слое, задаваемые по результатам измерений для каждого типа поверхности (но могут различаться незначительно).

Влажность поверхности оценивалась в долях единицы, то есть по отношению к максимально возможной. Поскольку по результатам наблюдений в воздухе определяется парциальное давление  $e$  (гПа), а не массовая доля водяного пара  $q$ , то для перехода от  $e$  к  $q$  использовалось соотношение

$$q = 0,622e/p, \quad (16)$$

где  $p$  — атмосферное давление в гПа.

Особо следует остановиться на температурной стратификации атмосферы. От этого параметра зависит интенсивность турбулентной диффузии, а также высота ПСА. Важная роль при этом отводится инверсиям, включая приземные. Такие условия в сочетании со слабыми скоростями ветра ослабляют турбулентный обмен и способствуют накоплению аэрозоля в пределах ПСА. Так, по данным радиозондирования за период 2003–2012 гг. повторяемость приземных инверсий колеблется от 17% в ноябре до 47% в июне, а повторяемость приподнятых инверсий с нижней границей до 300 м изменяется от 1% в июне до 6% в январе. Средняя мощность приземных инверсий изменяется от 300 м в мае до 690 м в декабре [21].

### 3. Двумерная модель

Построим двумерную модель на основе локально-равновесного подхода [11] для редукции исходных трехмерных уравнений (1)–(9) к двумерным по методике, подробно описанной в работах [13–15]. Ограничимся рассмотрением мезомасштабных процессов, то есть полагаем, что

$$\delta_1 = D/L \ll 1, \quad t \ll t_r, \quad (17)$$

где  $D$  — высота слоя;  $L$  — горизонтальный масштаб движения;  $t$  — характерное время эволюции равновесных состояний;  $t_r$  — время релаксации воздушных течений к состоянию равновесия при изменении внешних условий. Условия (17) означают фактически фильтрацию быстрых адаптационных процессов. В связи с этим считается, что равновесные состояния соответствуют ламинарным профилям гидростатических полей поперек слоя. При этом условие мезомасштабности не запрещает существования нестационарных турбулентных течений в плоскости слоя. Определим функцию  $Q = \theta(1+0,61q)$ . Введем

безразмерную переменную  $\zeta = z/D$ , обозначим среднюю поперек слоя величину  $\langle g \rangle = \int_0^1 g(t, x, y, \zeta) d\zeta$ .

Двумерную модель получим из трехмерной путем усреднения поперек слоя трехмерной модели (1)–(6) с использованием граничных условий (8), (9).

Для замыкания системы необходимо выразить нелинейные слагаемые, а также значения полей скорости, температуры и влажности на границах через их средние поля  $\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle \theta \rangle, \langle q \rangle$ . С этой целью воспользуемся точным решением исходной задачи, описывающим однородное по  $x, y$  течение, которое отличается от решения, представленного в [14], наличием влажности и виртуальной температуры. Точное решение найдем для бесконечного горизонтального вращающегося слоя в предположении несжимаемости воздуха в нижнем слое атмосферы и линейности температуры и влажности подстилающей поверхности. Решение ищем в виде  $u = u(\zeta), v = v(\zeta), w \equiv 0, \theta = \theta_s + \theta(\zeta), q = q_s + q(\zeta)$ . Тогда задача (1)–(6), (8)–(9) становится линейной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее решение имеет следующее представление:

$$M(\zeta) = f_1(\zeta)\langle M \rangle - 2f_2(\zeta)Q_1, \quad (18)$$

$$\theta = \langle \theta \rangle + O(Ek\delta_1^2), \quad (19)$$

$$q = \langle q \rangle + O(Ek\delta_1^2). \quad (20)$$

Из (19), (20) следует, что виртуальная температура

$$Q = \langle Q \rangle + O(Ek\delta_1^2). \quad (21)$$

В (18)–(21) приняты обозначения: комплекснозначная функция скорости  $M(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ , где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $f_1(\zeta) = \frac{1}{1 - \text{th}(\lambda)/\lambda} \left[ 1 - \frac{\text{ch}\lambda\zeta}{\text{ch}\lambda} \right]$ ;  $f_2 = \left[ \frac{\text{th}\lambda}{\lambda} + \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda^2 \text{ch}\lambda} - \frac{1}{2} \right] f_1(\zeta) - \frac{\text{ch}\lambda\zeta}{\text{ch}\lambda} - \frac{\text{sh}\lambda(\zeta - 1)}{\lambda \text{ch}\lambda} + \zeta$ ;  $\langle M \rangle = \langle u \rangle + i\langle v \rangle$ ;  $Q_1 = q_x + iq_y$ ; параметр  $\lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}Ek}$ ;  $Ek = \frac{k_M}{lD^2}$  — число Экмана;  $q_{x,y} = \mp \frac{\beta D}{2l} \partial_{yx} \langle Q \rangle$  (нижние индексы означают частные производные по  $x$  или  $y$  соответственно).

В работах [23, 24], подобные решения называются локально-равновесными. Полагая, что при выполнении условия мезомасштабности (17) формулы (18)–(21) достаточно правильно (асимптотически верно по малому параметру  $\delta_1$ ) описывают структуру термически неоднородного и влажного потока мезомасштабных течений воздуха в каждой точке слоя в любой момент времени, используем их в качестве замыкающих соотношений. Определим вихрь скорости как  $\omega(t, x, y) = \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$ . Учитывая

бездивергентность средней поперек слоя скорости  $\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} = 0$ , введем функцию тока  $\psi(t, x, y)$ :

$$\langle u \rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \langle v \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Выберем в качестве единиц измерения длины, скорости, времени, температуры и влажности, соответственно,  $L$  (длину расчетной области),  $c_g, L/c_g, \delta\theta$  и  $\delta q$  (максимальную разность температуры и влажности). Тогда в терминах вихря скорости  $\omega$ , функции тока  $\psi$ , средней поперек слоя потенциальной температуры  $\theta(t, x, y)$  и влажности  $q(t, x, y)$ , а также приведенной к размерности функции тока функции  $Q(t, x, y) = \beta D \langle Q \rangle / (2l)$  уравнения модели для описания мезомасштабных процессов в нижнем слое атмосферы имеют следующее представление (в безразмерном виде):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + k_1 \{ \psi, \omega \} + k_3 \text{Rt} \left[ \{ Q, \omega \} + \{ \psi, \Delta Q \} \right] - k_5 \text{Rt}^2 \{ Q, \Delta Q \} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega - \mu (k_7 \omega - k_8 \text{Rt} \Delta Q), \quad (22)$$

$$\Delta \psi = \omega, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \{ \psi, \theta \} = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta \theta - \bar{q} (\theta - \bar{\theta}_s), \quad (24)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \{ \psi, q \} = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta q - \bar{r} (q - \bar{q}_s), \quad (25)$$

$$Q = \theta(1 + 0,61q), \quad (26)$$

где  $\{\psi, \omega\} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}$  — якобиан;  $\mu = lc_g/L$  — безразмерный коэффициент трения о подстилающую поверхность;  $Re = c_g L/A_M$  — число Рейнольдса,  $Rt = \beta D \delta Q / (2lc_g L)$  — термическое число Россби;  $\delta Q = \delta[\theta(1+0,61q)]$  — максимальная разность виртуальной температуры;  $\bar{q} = q_1 c_g/L$  — безразмерный коэффициент выхолаживания, где  $q_1 = \gamma_T k_T/D$ ;  $\bar{r} = r_1 c_g/L$ , где  $r_1 = \gamma_{qi} k_q/D$  ( $i=1,2,3,4,5$ );  $\bar{\theta}_s = \theta_s/\delta\theta$ ,  $\bar{q}_s = q_s/\delta q$  — безразмерные функции;  $Pe = c_g L/A_T$  — число Пекле;  $k_1 = \Re\langle f_1 f_1 \rangle$ ,  $k_3 = \Re\langle f_1 f_2 \rangle$ ,  $k_5 = \Re\langle f_2 f_2 \rangle$ ,  $k_7 = \Re f_1'(1)$ ,  $k_8 = \Re f_2'(1)$  — коэффициенты ( $\Re$  — действительная часть числа), их значение зависит от величины числа Экмана. В рассматриваемом случае  $Ek = 0,5$ , и ему соответствуют  $k_1 = 1,197$ ,  $k_3 = 0,003036$ ,  $k_5 = 0,002312$ ,  $k_7 = 3,0022$ ,  $k_8 = 0,01064$ .

Запишем начальные условия:

$$\psi = y \sin(dd) - x \cos(dd), \quad \omega = 0, \quad \theta = \theta_s, \quad q = q_s \quad \text{при } t = 0, \quad (27)$$

и граничные условия:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial n} = 0, \quad (28)$$

где  $n$  — внешняя нормаль.

Система (22)–(28) — это новая двумерная модель, которая отличается от модели, представленной в [14], наличием средней поперек слоя виртуальной температуры (26), которая зависит от средней поперек слоя потенциальной температуры воздуха и средней поперек слоя влажности в уравнении для вихря скорости (22) и уравнении для влажности (25).

#### 4. Численные расчеты

Расчеты проводились на основе системы уравнений (22)–(26) с начальными и граничными условиями (27)–(28). Область эксперимента размером  $40 \times 40$  км включала окрестности города Краснокамска и западную часть города Перми (Рис. 1). Исходные данные по температуре и влажности подстилающей поверхности представлены в таблице (температурные данные взяты из [16]); высота слоя составляла  $D = 1000$  м; параметр Кориолиса на данной широте  $l = 1,24 \cdot 10^{-4}$  1/с и при сравнительно небольших горизонтальных размерах рассматриваемой площадки считался постоянным. Задавались различные значения коэффициента турбулентной диффузии: по горизонтали он принимался равным  $500 \text{ м}^2/\text{с}$  [1, 9], по вертикали —  $k_M = k_T = k_S = l D^2/2 = 62 \text{ м}^2/\text{с}$ . Проверялись также различные варианты решения с учетом неоднородности поля температуры и влажности подстилающей поверхности.

Расчеты выполнены при следующих погодных условиях: присутствовала сильная конвекция; скорость юго-западного ветра на верхней границе пограничного слоя составляла  $2 \text{ м/с}$ ; направление  $250^\circ$ ; температура воздуха  $\theta_s$  колебалась от  $10$  до  $23^\circ\text{C}$ . В зависимости от типа шероховатости подстилающей поверхности массовое содержание водяного пара  $q_s$  изменялось от  $11,8$  до  $20,3 \text{ гПа}$  (см. Табл.), коэффициенты теплообмена  $\gamma_T$  и влагоотдачи  $\gamma_{qi}$  имели значения  $\gamma_1 = 1,433 \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma_2 = 0,166 \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma_3 = 0,234 \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma_4 = 1,391 \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma_5 = 0,342 \text{ м}^{-1}$ . Расчеты проводились с помощью явной конечно-разностной схемы [8, 9] на сетке  $200 \times 200$  узлов. Отыскивались стационарные решения задачи.

Результаты экспериментов включали определение средних в слое температуры и влажности (массовой доли водяного пара), вихря, функции тока и ее возмущений. Как и следовало ожидать, горизонтальные градиенты средней температуры и влажности существенно уменьшились, например, по температуре — с  $13$  до  $2^\circ\text{C}$  (Рис. 2).

Анализ полей вихря позволяет утверждать, что хорошо видимая на рисунке 2а неоднородность обуславливается в первую очередь неоднородностью температуры поверхности и, как следствие, неоднородностью средней температуры слоя. Наибольшие градиенты температуры находятся на границе раздела водной поверхности и городской застройки Краснокамска. Неоднородность влажности мало сказывается на поле вихря (Рис. 2б), максимальная скорость ветра увеличивается на  $10\%$  и достигает  $2,2 \text{ м/с}$ . Возникшие вихревые образования определяются не только зоной больших градиентов приземной температуры, но и формой этой зоны. Так, наиболее интенсивная система вихрей отмечается с подветренной стороны зоны с наибольшими температурными градиентами, вытянутой по нормали к направлению ветра (Рис. 3а, в). Максимальная скорость ветра под одновременным воздействием



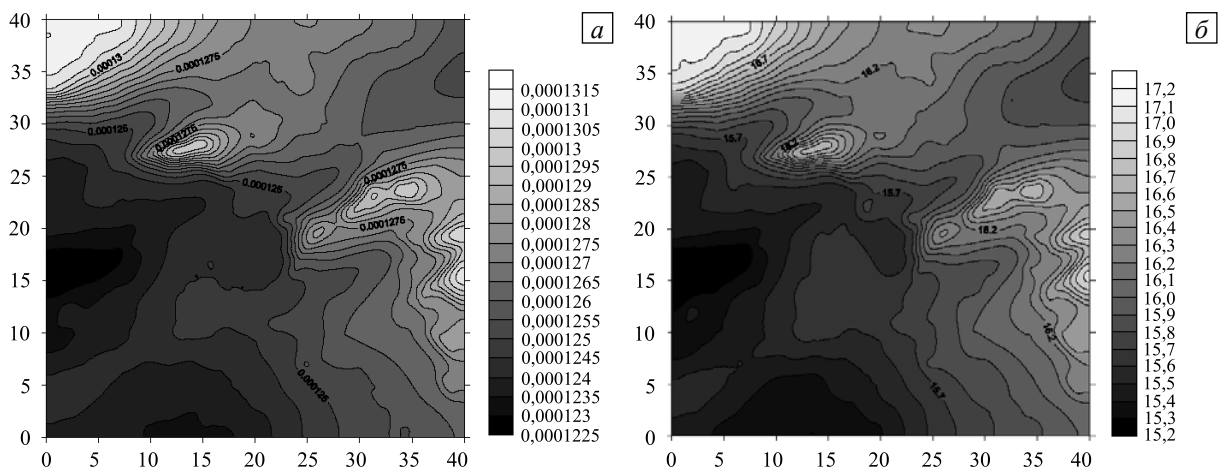


Рис. 2. Поле средних поперек слоя влажности (а) и температуры (б)

неоднородности температуры и влажности составляет  $2,63 \text{ м/с}$ , максимальная завихренность в локальных вихрях —  $3,903 \cdot 10^{-3} \text{ 1/с}$ .

Возмущения функции тока также вызываются в первую очередь значительными градиентами температуры поверхности (Рис. 4а). Наибольшая неоднородность имеет место на границе раздела между относительно холодной водной поверхностью и городской застройкой, характеризующейся более высокой температурой поверхности. Неоднородность влажности мало сказывается на поле функции тока, хотя и приводит к увеличению градиентов (Рис. 4б). Возникшее возмущение функции тока, хорошо заметное на рисунке 4, обусловлено зоной больших градиентов приземной и средней в слое температуры. Район наблюдаемого возмущения функции тока также располагается с подветренной стороны от зоны с наибольшими градиентами температуры.

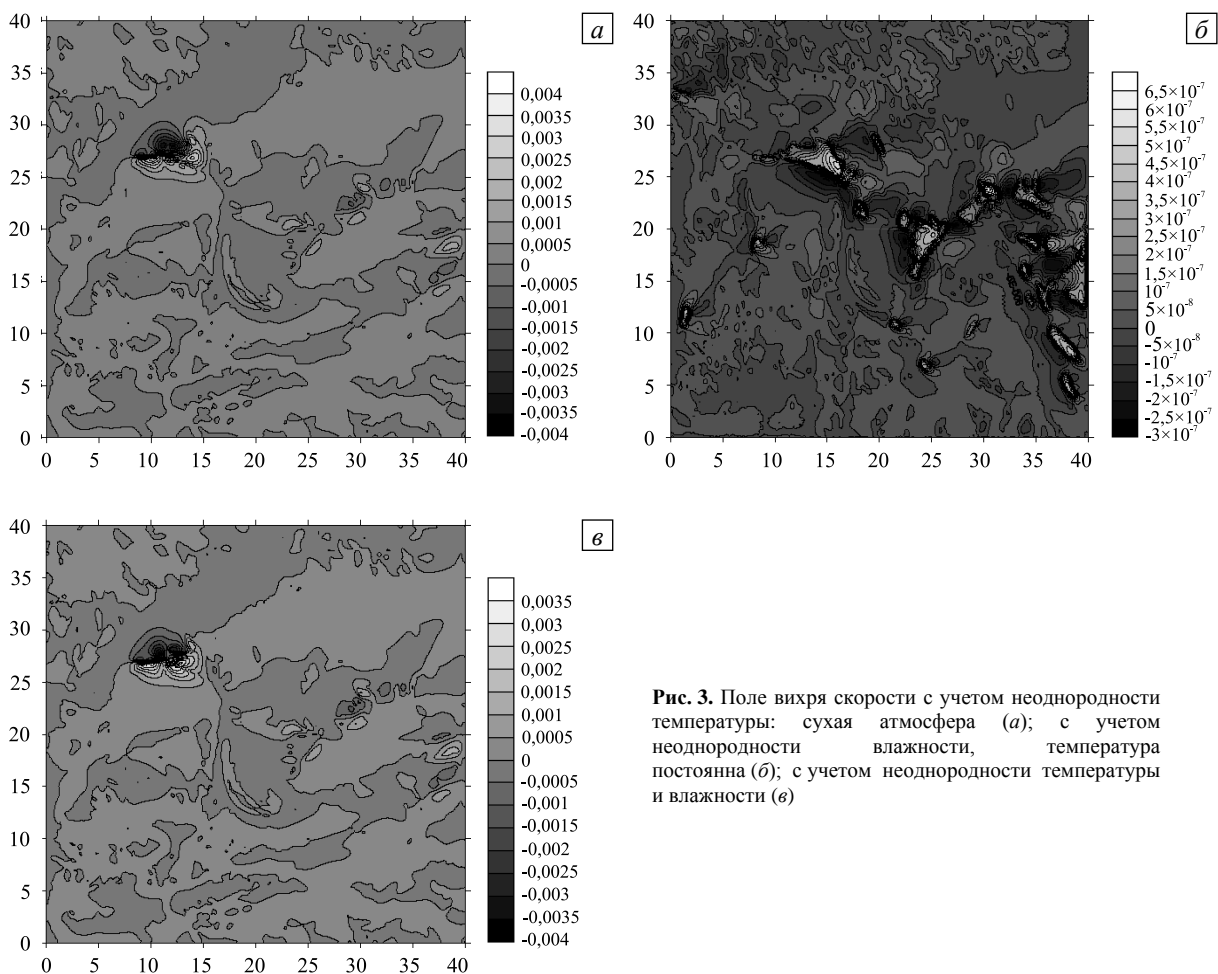


Рис. 3. Поле вихря скорости с учетом неоднородности температуры: сухая атмосфера (а); с учетом неоднородности влажности, температура постоянна (б); с учетом неоднородности температуры и влажности (в)



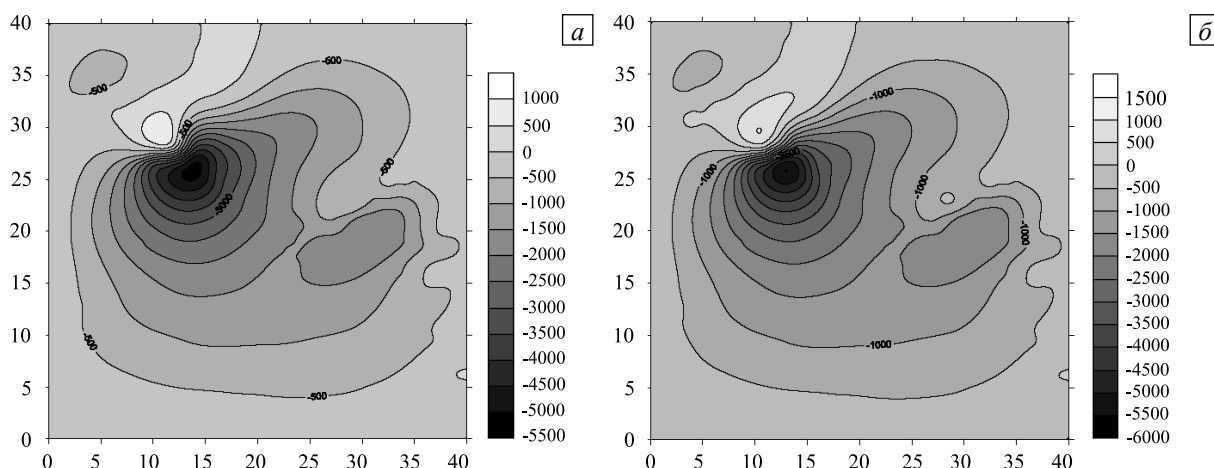


Рис. 4. Возмущение средней в слое функции тока, вызванные температурной неоднородностью (а) и неоднородностью как температуры, так и влажности (б)

Проведенный анализ показал, что значительные горизонтальные температурные градиенты приводят не только к возникновению локальной циркуляции типа бризовой, но и к образованию мезомасштабных вихревых структур с вертикальной осью вращения. Градиенты влажности могут способствовать незначительному усилению интенсивности вихрей.

## 5. Выводы

Таким образом, построена двумерная модель, описывающая турбулентные мезомасштабные процессы, сопровождающие течение в нижнем слое влажной атмосферы. Проведенный на ее основе расчет и анализ результатов показали, что на фоне значительных горизонтальных градиентов температуры воздуха у поверхности земли в нижнем слое атмосферы возникают вихревые структуры с вертикальной осью вращения. Горизонтальные градиенты влажности хотя и влияют на образование вихрей, но их воздействие значительно слабее.

Появление вихревых структур определяется не только наличием значительных градиентов температуры воздуха, но и конфигурацией зон таких градиентов и их расположением относительно направления движения воздуха.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 13-01-96001-р\_урал\_a).

## Литература

1. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / Под ред. Ф.Т.М. Ньистадта, Х. Ван Допа. – Л.: Гидрометеоздат, 1985. – 351 с.
2. Бызова Н.Л., Иванов В.Н., Гаргер Е.К. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1989. – 264 с.
3. Kalnay E. Atmospheric modeling, data assimilation and predictability. – Cambridge University Press, 2003. – 341 p.
4. Марчук Г.И., Пененко В.В., Алоян А.Е., Лазриев Г.Л. Численное моделирование микроклимата города // Метеорология и гидрология. – 1979. – № 8. – С. 5-15.
5. Велтищева Н.С. Трехмерная негидростатическая модель для описания циркуляции над городским островом тепла // Труды Гидрометцентра СССР. – 1979. – № 219. – С. 66-82.
6. Берлянд М.Е., Зашихин М.Н. К теории антропогенного воздействия на локальные метеорологические процессы в городе // Метеорология и гидрология. – 1982. – № 2. – С. 5-16.
7. Быкова Л.П. Численное моделирование бризовой циркуляции над городом с учетом процессов в слое шероховатости // Метеорология и гидрология. – 1983. – № 12. – С. 36-43.
8. Тарнопольский А.Г., Шнайман В.А. Моделирование пограничного слоя атмосферы для городской застройки и пригородной зоны // Метеорология и гидрология. – 1991. – № 1. – С. 41-47.
9. Алоян А.Е. Динамика и кинематика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере: Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2002. – 201 с.
10. Пененко В.В., Цветова Е.А. Математические модели природоохранного прогнозирования // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 152-163. (English version DOI).
11. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров: ВятГУ, 2011. – 207 с.
12. Шварц К.Г. Моделирование крупномасштабных и мезомасштабных процессов в бароклинной атмосфере и океане // Географический вестник. – 2013. – № 1 (24). – С. 72-77.
13. Schwarz K.G. Mesa-scale flows over large city // Progress in Fluid Flow Research: Turbulence and Applied MHD / eds. H. Branover and Y. Unger. – AIAA Progr. Ser. – 1998. – Vol. 182. – P. 271-279.

14. Шатров А.В., Шварц К.Г. Численное моделирование атмосферных мезомасштабных процессов переноса примесей в окрестности города Кирова // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 117-125. DOI
15. Шварц К.Г., Шкляев В.А. Численное моделирование атмосферных мезомасштабных процессов переноса многокомпонентной примеси при торфяном пожаре // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 274-283. DOI
16. Шварц К.Г., Шкляев В.А. Методические подходы к созданию системы локального расчетного мониторинга атмосферных биоаэрозолей // Геоинформационное обеспечение пространственного развития Пермского края: Сб. науч. тр. – Пермь: Изд-во ПГНИУ, 2013. – № 6. – С. 56-60.
17. Пелоски Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2-х томах. – М.: Мир, 1984. – 398 с.; 416 с.
18. Романова Е.Н., Мосолова Г.И., Береснева И.А. Микроклиматология и ее значение для сельского хозяйства – Л.: Гидрометеоздат, 1983. – 244 с.
19. Шкляев В.А., Ермакова Л.Н., Шкляева Л.С. Исследование микроклимата города с целью оценки биометеорологических показателей селитебной территории // Географический вестник. – 2010. – № 3 (14). – С. 52-59.
20. Гаврилов А.С. Математическое моделирование мезометеорологических процессов: Учеб. пособие. – Л.: Изд-во ЛПИ, 1988. – 96 с.
21. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. – М.: Наука, 1965.– Часть I. – 640 с.
22. Шкляев В.А., Шкляева Л.С. Использование результатов наблюдений по температурному профилюмеру для корректировки неблагоприятных метеорологических условий (НМУ) // Окружающая среда и устойчивое развитие регионов: Труды II Всероссийской научной конференции с международным участием, Казань, 24-26 сентября 2013. – Т. II. – С. 151.
23. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препр. / ИМСС УрО РАН. – Свердловск: УрО РАН СССР, 1987. – 48 с.
24. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // МЖГ. – 1988. – № 4. – С. 48-55. (English version DOI)

## References

1. *Atmospheric turbulence and air pollution modelling*, eds. F.T.M. Nieuwstadt, A. van Dop. Dordrecht: Reidel, 1982. 358 p.
2. Byzova N.L., Ivanov V.N., Garger E.K. *Turbulentnost' v pograničnom sloe atmosfery* [Turbulence in the atmospheric boundary layer]. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1989. 264 p.
3. Kalnay E. *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*. Cambridge University Press, 2003. 341 p.
4. Marchuk G.I., Penenko V.V., Aloyan A.E., Lazriev G.L. Chislennoe modelirovanie mikroklimate goroda [The numerical modeling of an urban microclimate]. *Meteorologiya i Hidrologiya – Russian Meteorology and Hydrology*, 1979, no. 8, pp. 5-15.
5. Veltishcheva N.S. Trekhmernaya negidrostatičeskaya model dlya opisaniya tsirkulyatsii nad gorodskim ostrovom tepla [Three-dimensional non-hydrostatic model for describing heat circulation over an urban island]. *Trudy Gidromettsentra SSSR – Proceedings of the USSR Hydrometeorological Centre*, 1979, no. 219, pp. 66-82.
6. Berlyand M.E., Zashikhin M.N. K teorii antropogennogo vozdejstviya na lokalnye meteorologičeskie protsessy v gorode [On the theory of anthropogenic effect on local meteorological processes in a city]. *Meteorologiya i Hidrologiya – Russian Meteorology and Hydrology*, 1982, no. 2, pp. 5-16.
7. Bykova L.P. Chislennoe modelirovanie brizovoy circulyatsii nad gorodom s uchetom protsessov v sloe sherohovatosti [Numerical simulation of urban-breeze circulation with account for processes in the roughness layer]. *Meteorologiya i Hidrologiya – Russian Meteorology and Hydrology*, 1983, no. 12, pp. 36-43.
8. Tarnopolskiy A.G., Shnideman V.A. Modelirovanie pograničnogo sloya atmosfery dlya gorodskoj zastrojki i prigorodnoj zony [Simulation of the atmospheric boundary layer for urban and suburban areas]. *Meteorologiya i Hidrologiya – Russian Meteorology and Hydrology*, 1991, no. 1, pp. 41-47.
9. Aloyan A.E. *Dinamika i kinematika gazovykh primesej i aerorozlej v atmosfere* [Dynamics and kinematics of gaseous admixtures and aerosols in the atmosphere]. Moscow: Institute of Numerical Mathematics RAS, 2002. 201 p.
10. Penenko V.V., Tsvetova E.A. Mathematical models of environmental forecasting. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 3, pp. 428-436. DOI
11. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex flow in thin liquid layers]. Kirov: Vyatka State University, 2011. 207 p.
12. Shvarts K.G. Modelirovanie krupnomasshtabnykh i mesomasshtabnykh protsessov v baroklinnoj atmosfere i okeane [Modeling of large-scale and meso-scale processes in the baroclinic atmosphere and ocean]. *Geograficheskij Vestnik – Bulletin of Perm State University. Geography*, Perm State University, 2013, no. 1 (24), pp. 72-77.
13. Schwarz K.G. Mesa-scale flows over large city. *Progress in fluid flow research: Turbulence and applied MHD*, eds. H. Branover, Y. Unger, AIAA Progr. Ser., 1998, vol. 182, pp. 271-279.
14. Shatrov A.V., Shvarts K.G. Numerical modeling of mesoscale atmospheric impurity transport processes in the environs of the city of Kirov. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 332-339. DOI
15. Shvarts K.G., Shklyayev V.A. Numerical modeling of mesoscale atmospheric transport processes of multicomponent impurities at peat firing. *Vycisl. meh. splos. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 274-283. DOI
16. Shvarts K.G., Shklyayev V.A. Metodicheskie podkhody k sozdaniyu sistemy lokal'nogo raschetnogo monitoringa atmosferykh bioaerorozlej [Methodological approaches to the creation of the system of local settlement monitoring of atmospheric bioaerosols]. *Geoinformatsionnoe obespechenie prostranstvennogo razvitiya Permskogo kraja* [Geographic information support of the spatial development of Perm Region]. Perm State University, 2013, no. 6, pp. 56-60.

17. Pedlosky J. *Geophysical fluid dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 710 p.
18. Romanova E.N., Mosolova G.I., Beresneva I.A. *Microclimatologiya i ee znachenie dlya selskogo khozyajstva* [Microclimatology and its importance for agriculture]. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1983. 244 p.
19. Shklyayev V.A., Ermakova L.N., Shklyayeva L.S. Issledovanie mikroklimate goroda s tseliyu ocenki biometeorologicheskikh pokazately selitebnoj territorii [Research of the microclimate of city with the purpose of the estimation of biometeorological parameters of inhabited territory]. *Geograficheskij Vestnik – Bulletin of Perm State University. Geography*, Perm State University, 2010, no. 3 (14), pp. 52-59.
20. Gavrilov A.S. *Matematicheskoe modelirovanie mezometeorologicheskikh protsessov* [Mathematical modeling of mesometeorological processes]. Leningrad Polytechnic Institute, 1988. 96 p.
21. Monin A.S., Yaglom A.M. *Statisticheskaya gydromechanika* [Statistical hydromechanics]. Moscow: Nauka, 1965. Part 1, 640 p.
22. Shklyayev V.A., Shklyayeva L.S. Okruzhaushchaya sreda i ustojchivoe razvitie regionov [Environment and sustainable regional development]. *Proceedings of the II All-Russian Scientific Conference*, 24-26 September, Kazan, 2013. Vol. II, p. 151.
23. Aristov S.N., Frik P.G. *Dinamika krupnomasshtabnykh techenij v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Dynamics of large-scale flows in thin liquid layers]. Preprint, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences USSR, Sverdlovsk, 1987. 48 p.
24. Aristov S.N., Frick P.G. Large-scale turbulence in thin layer of non-isothermal rotating fluid. *Fluid Dyn.*, 1988, vol. 23, no. 4, pp. 522-528. DOI

*Поступила в редакцию 04.07.2014; опубликована в электронном виде 31.03.2015*

---

*Сведения об авторах*

*Шварц Константин Григорьевич*, дфмн, проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д.15; e-mail: kosch@psu.ru

*Шварц Юлия Анатольевна*, кфмн, доц., ПГНИУ; e-mail: jul-schwarz@psu.ru

*Шкляев Владимир Александрович*, кгн, доц., ПГНИУ; e-mail: shklyayev@psu.ru