

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.4.45](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45)  
УДК 534-141

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЁТОМ ПЛЕСКАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С.А. Бочкарёв, С.В. Лекомцев

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

В работе представлены исследования динамического поведения тонкостенных резервуаров, содержащих идеальную жидкость, с учётом эффектов гидроупругого взаимодействия и плескания свободной поверхности. Для математической постановки задачи используется вариационный принцип возможных перемещений, учитывающий предварительное напряжённое недеформированное состояние. Это состояние может создаваться влиянием различных силовых факторов, действующих на оболочку, в частности, гидростатическим давлением. Деформации упругой конструкции определяются из известных соотношений классической теории тонких оболочек. Поведение сжимаемой жидкости описывается линеаризованными уравнениями Эйлера для акустической среды, которые преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина. Поверхностные волны (или эффект плескания) на свободной поверхности жидкости задаются в виде соответствующего динамического граничного условия. В рамках разработанной численной процедуры, отвечающей пространственной реализации метода конечных элементов, рассмотрено поведение частично заполненных жидкостью цилиндрических резервуаров с произвольным поперечным сечением. Показано, что включение плескания свободной поверхности жидкости в расчётную модель приводит к существенному снижению собственных частот колебаний обсуждаемых систем. На основании модального анализа представлена классификация собственных форм колебаний свободной поверхности жидкости в вертикальных резервуарах с круговым и эллиптическим поперечными сечениями. Продемонстрировано, что при учёте плескания возможно разделение спектра собственных частот колебаний системы, когда частоты колебаний оболочки с жидкостью и пустой оболочки значительно отличаются друг от друга.

*Ключевые слова:* цилиндрический резервуар, круговые и эллиптические поперечные сечения, частичное заполнение жидкостью, учёт плескания на свободной поверхности, модальный анализ, МКЭ

## NATURAL VIBRATIONS OF NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS PARTIALLY FILLED WITH FLUID WITH SLOSHING OF FREE SURFACE

S.A. Bochkarev and S.V. Lekomtsev

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

The dynamic behaviour of thin-walled reservoirs containing an ideal fluid is investigated taking into account the effects of hydroelastic interaction and sloshing. A mathematical statement of the problem is based on the principle of virtual displacements, which makes it possible to consider the pre-stressed non-deformed state of the shell caused by various force factors, for example, by hydrostatic pressure. The strains of the elastic structure are calculated using the relations of the Kirchhoff-Love theory of thin shells. The behavior of compressible liquid is described by the linearized Euler equations for acoustic medium, which are transformed by the Bubnov-Galerkin method. We use appropriate dynamic boundary conditions to take into account waves (or the sloshing effect) on the free surface of the liquid. The behavior of partially filled cylindrical reservoirs of arbitrary cross-sections was analyzed using the developed numerical procedure based on the three dimensional implementation of the finite element method. It has been shown that allowing sloshing considerably reduces the eigenfrequencies of vibrations of the examined systems. Based on the modal analysis, a classification of the eigenmodes of free surface oscillations of the liquid in the vertical shells of circular and elliptical cross-sections has been done. The analysis has shown that in the case when the vibration frequencies of liquid differ from the vibration frequencies of the shell filled with fluid the frequency spectrum of the system splits into two parts due to sloshing.

*Key words:* cylindrical tank, circular and elliptical cross-sections, partial filling with fluid, sloshing, modal analysis, FEM

### 1. Введение

Динамическое поведение тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, в связи с их широким применением в технических приложениях интенсивно изучается с помощью различных научных и инженерных подходов, начиная со второй половины XX века. В связанных задачах «упругая оболочка–неподвижная жидкость» наряду с исследованием гидроупругого взаимодействия практический интерес представляют колебания свободной поверхности жидкости, являющиеся потенциальным источником возмущения тонкостенных конструкций. Во избежание повреждений больших резервуаров, предназначенных для хранения нефтепродуктов или ядерного топлива в зонах с сейсмической активностью, как и негативных последствий чрезмерного плескания топлива в баках жидкостных ракетносителей и летательных аппаратов, требуется предварительная оценка гидродинамического давления и перемещений свободной поверхности жидкости при проектировании таких изделий.

При анализе динамического поведения тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, важным аспектом является вычисление собственных частот и форм колебаний. С этой точки зрения число работ, касающихся частично заполненных жидкостью круговых цилиндрических оболочек без учёта перемещений

свободной поверхности, достаточно велико. В основном обсуждаются собственные колебания вертикально ориентированных конструкций, для горизонтально же расположенных результаты представлены в меньшей степени [1–5]. Насколько известно авторам, в литературе отсутствуют как аналитические, так и численные исследования некруговых цилиндрических оболочек, частично заполненных неподвижной жидкостью. А в случае полного заполнения можно указать только на работы [6, 7]. В первой из них с помощью полуаналитического метода определяется акустическое излучение от бесконечной некруговой цилиндрической оболочки, подкреплённой ребрами и погруженной в воду. Выражение для акустического давления получено из уравнения Гельмгольца с помощью спектрального метода виртуальной границы. В [7] для оболочек произвольной геометрии предлагается комбинированный подход, основанный на использовании метода граничных элементов — для описания потенциальной жидкости, и метода конечных элементов — для упругого тела. В литературе имеется достаточное число публикаций, посвящённых изучению круговых цилиндрических резервуаров с жидкостью с учётом перемещений свободной поверхности. Однако имеющаяся информация для некруговых конфигураций весьма ограничена. В частности, прямоугольные баки рассмотрены в [8–12], а эффект плескания жидкости в частично заполненных недеформируемых контейнерах с эллиптическим поперечным сечением — в [13, 14]. Эксперименты на динамическое поведение оболочек вращения с жидкостью выполнены в [15–23].

В большинстве из упомянутых работ целью было нахождение собственных частот и форм колебаний системы «оболочка–жидкость», а также верификация предлагаемых постановок. В статье [23] на основе эксперимента осуществлена проверка ранее разработанных аналитических моделей плескания свободной поверхности жидкости, а также отладка конечно-элементного алгоритма, предназначенного для определения собственных частот колебаний уменьшенной копии наземного резервуара для хранения воды, составленного из оболочек, имеющих вид усечённого конуса и цилиндра. Расчёты на основе численного подхода напряжённо-деформированного состояния и колебаний ёмкостей для перевозки жидких грузов проведены в [24]. Данная монография носит в большей степени прикладной характер. Здесь акцент ставится на выявлении причин возникновения различных дефектов в днищах оболочек вращения и газовых баллонах, которые могут образоваться при транспортировке.

Несмотря на то, что модальному анализу тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, посвящено много работ, тем не менее, формам колебаний свободной поверхности уделяется недостаточное внимание; лишь в ограниченном числе работ, например в [25–28], присутствуют некоторые результаты. Используемая здесь осесимметричная формулировка задачи исследования колебаний оболочек вращения позволяет строить решение для заданной комбинации волн в окружном и меридиональном направлениях. Однако при рассмотрении собственных колебаний свободной поверхности жидкости она не очень удобна, потому что в этом случае более целесообразно вычислять спектр частот, упорядоченный по возрастанию. Но наряду с этим при оценке нестационарного поведения важно знать соответствующие формы колебаний с целью получения информации о том, какие из них могут реализоваться при заданном внешнем возбуждении, а какие невозможны. Некоторые особенности использования коммерческих конечно-элементных пакетов для вычисления динамических характеристик пространственных колебаний конструкций, частично заполненных несжимаемой жидкостью со свободной поверхностью, приведены в работе [29]. Наличие в промышленных приложениях тонкостенных оболочек, взаимодействующих с жидкой средой и имеющих отклонение от кругового профиля, обусловленное технологическими неточностями изготовления, представляет практический интерес. В связи с этим, целью данной статьи является трёхмерный анализ собственных форм и частот колебаний таких конструкций с учётом перемещений свободной поверхности жидкости и выявление свойственных им особенностей, которые не могут быть установлены в осесимметричной постановке.

## 2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим нагруженные различными силовыми факторами горизонтально или вертикально ориентированные тонкостенные цилиндрические оболочки длиной  $L$  и толщиной  $h$ , имеющие произвольное поперечное сечение. Для достаточно широкого класса задач допустимы предположения о том, что деформации оболочки и скорости движения жидкой среды, возникающие в результате гидродинамического воздействия, малы. В этом случае колебания идеальной сжимаемой жидкости описываются уравнениями движения Эйлера, уравнением неразрывности и уравнением состояния [30]:

$$\frac{\partial(\rho_f \mathbf{v})}{\partial t} \approx \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{g} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\rho_f \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad (2)$$

$$d\rho_f = \frac{1}{c^2} dp. \quad (3)$$

Здесь:  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $\rho_f$  — плотность жидкости;  $p$  — гидродинамическое давление;  $c$  — скорость звука в жидкости;  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}^T$  — вектор массовых сил, где  $g$  — ускорение свободного падения.

Исключив  $\mathbf{v}$  из (1) и (2) и приняв во внимание (3), получим уравнение Гельмгольца относительно давления  $p$

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Положим, что на границе жидкости и оболочки  $S_\sigma$  имеет место равенство ускорений, и при этом условии получим следующее выражение для связи градиента давления с ускорением упругого тела:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{v}} = -\rho_f \dot{v}_n \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \mathbf{n}^T \ddot{\boldsymbol{\delta}} = -\rho_f \ddot{w}. \quad (5)$$

Здесь:  $v_n$ ,  $w$  — нормальные составляющие векторов скоростей жидкости и перемещений оболочки, соответственно;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S_\sigma$ ;  $\boldsymbol{\delta} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$  — вектор перемещений и углов поворота оболочки в системе координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , связанной с её боковой поверхностью;  $T$  — символ операции транспонирования; точка означает дифференцирование по времени.

В простейшем приближении на свободной поверхности жидкости  $S_{fr}$  можно задать граничное условие вида

$$p = 0. \quad (6)$$

Однако оно не описывает поверхностные гравитационные волны. Их можно учесть, если предположить, что фактическая поверхность возмущённой жидкости находится на некоторой высоте  $\eta$  относительно её невозмущённого состояния, тогда  $p = \rho_f g \eta$ . В силу того, что  $v_z = \partial \eta / \partial t$  и плотность жидкости постоянна, уравнение (1) на свободной поверхности теперь примет вид

$$\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (7)$$

Исключив из (7) одну из переменных —  $\eta$ , получим линеаризованное условие существования поверхностных волн

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (8)$$

Выражения для деформаций упругой конструкции определим с помощью соотношений нелинейной теории тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} &= \tilde{\varepsilon}_{11} + \bar{z}k_{11}, & \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} &= \tilde{\varepsilon}_{22} + \bar{z}k_{22}, & \gamma_{\bar{x}\bar{y}} &= \tilde{\varepsilon}_{12} + \bar{z}k_{12}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{\varepsilon}_{22}, \tilde{\varepsilon}_{12}, k_{11}, k_{22}, k_{12}\}^T = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{e} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial u}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial w}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right\}^T, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right\}^T.$$

Здесь:  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — вектор линейных компонент деформации;  $\mathbf{E}$  — матрица линейных множителей.

Для математической постановки задачи динамики оболочки воспользуемся вариационным принципом возможных перемещений, включающим работу сил инерции, гидродинамическое давление  $p$ , действующее на смоченной поверхности  $S_\sigma$  и работу статических сил, создающих предварительное напряжённое недеформированное состояние. В матричной форме он имеет следующий вид [31]:

$$\int_{S_s} \delta \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} dS + \int_{V_s} \rho_s \delta \mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} dV - \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P} dS + \int_{S_s} \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{e} dS = 0, \quad \mathbf{P} = \{0, 0, p, 0, 0, 0\}^T, \quad (10)$$

где  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{P}$  — векторы обобщённых перемещений и поверхностных нагрузок;  $\rho_s$  — плотность материала оболочки;  $\mathbf{D}$  — матрица упругих констант изотропного материала. Отметим, что при введении в (10) работы статической нагрузки принято известное допущение об отсутствии изменений в геометрии тела в исходном равновесном состоянии [32]. Элементы матрицы  $\boldsymbol{\sigma}_0$  найдём из условия  $\mathbf{E}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{e}$ , где вектор  $\bar{\mathbf{e}}$  является решением соответствующей статической задачи.

### 3. Численная реализация

Трёхмерный анализ собственных форм и частот колебаний тонкостенных оболочек, взаимодействующих с жидкой средой и имеющих отклонение от кругового профиля, с учётом перемещений свободной поверхности жидкости осуществлён с помощью метода конечных элементов (МКЭ). При моделировании оболочек произвольного поперечного сечения предполагалось, что криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских четырёхугольных элементов [33]. Для аппроксимации мембранных перемещений использовались линейные зависимости, а для изгибных — несовместные функции формы [33]. Дискретизация объёма занимаемого жидкостью, проводилась с помощью 8-узлового конечного элемента в форме призмы.

Волновое уравнение (4) с условием непроницаемости (5), граничными условиями (6) и (8) было преобразовано с помощью метода Бубнова–Галёркина. Полученное соотношение совместно с уравнением (10) после выполнения стандартных процедур МКЭ позволило свести рассматриваемую задачу к решению связанной системы двух уравнений, которые учитывают предварительное напряжённое недеформируемое состояние, возникающее от действующих на оболочку статических силовых факторов:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{Q} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = 0, \quad (11)$$

Здесь:  $\mathbf{K}_s = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS$ ,  $\mathbf{K}_g = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{G} dS$ ,  $\mathbf{Q} = \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}^w dS$ ,  $\mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$ ,

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV + \sum_{m_{f_r}} \int_{S_{f_r}} \frac{1}{g} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dS; \quad m_f, m_s, m_\sigma, m_{f_r} —$$

число конечных элементов, на которые разбивалась область жидкости  $V_f$ , поверхность оболочки  $S_s$  и поверхности  $S_\sigma$  и  $S_{f_r}$ ;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}^w$  — функции формы для давления, вектора перемещений оболочки и его нормальной составляющей  $w$  соответственно;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$  — матрицы связи деформаций с узловыми перемещениями. Усилия и моменты, вызванные приложенной механической нагрузкой  $\mathbf{P}_0$ , которые участвуют в формировании матрицы геометрической жёсткости  $\mathbf{K}_g$ , определялись из решения статической задачи  $\mathbf{K}_s \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{P}_0$ . При действии только гидростатической нагрузки  $\mathbf{P}_0 = \{0 \ 0 \ \rho_f g z \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ .

Возмущённое движение оболочки и жидкости рассматривалось как гармоническое:  $\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i\omega t)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{f} \exp(i\omega t)$ , где  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{f}$  — векторные функции координат;  $\omega = \lambda_R + i\lambda_{Im}$  — характеристический показатель. В результате разрешающая система уравнений (11) сводилась к несимметричной обобщённой задаче на собственные значения

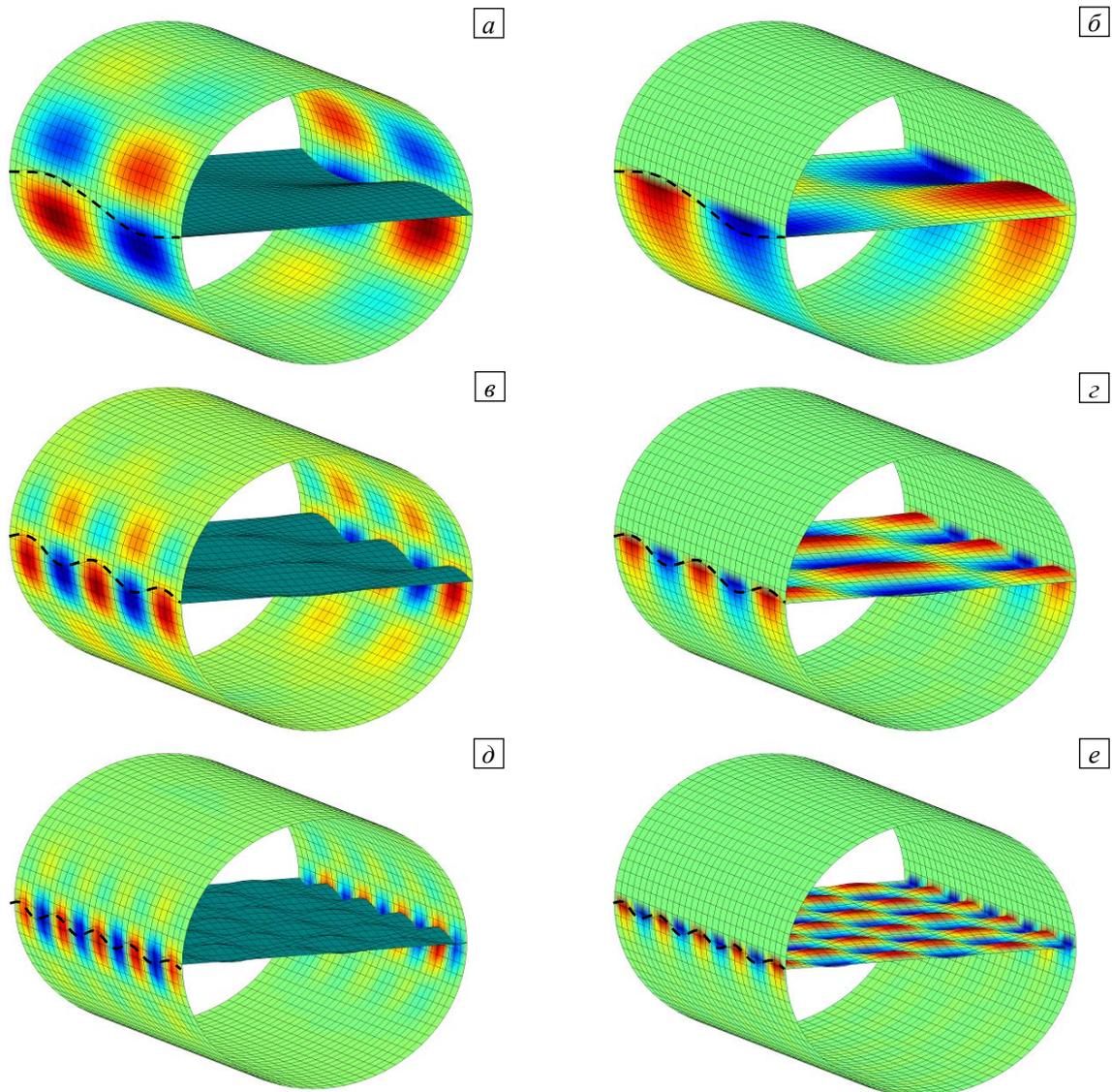
$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  — матрицы жёсткости и масс, структура которых определена в уравнении (11). Для вычисления в общем случае комплексных собственных значений проблемы (12) использовались процедуры ARPACK, в основе которых лежит неявно перезапускаемый метод Арнольди [34].

### 4. Численные результаты

При решении связанной задачи исследования гидроупругих колебаний системы с учётом перемещений свободной поверхности жидкости спектр полученных частот можно условно разделить на две части. Как правило, это возможно для систем, в которых частоты колебаний оболочки с жидкостью и пустой оболочки значительно отличаются друг от друга.

Первая часть спектра, характеризующаяся высокой плотностью низких частот, относится к свободной поверхности. При соответствующих ей формах колебаний оболочка имеет незначительные перемещения, которые «затухают» по мере удаления от границы контакта свободной поверхности жидкости с оболочкой. Вышесказанное демонстрирует рисунок 1, который содержит собственные формы колебаний свободной поверхности жидкости и оболочки, а также распределение давления на стенках наполовину заполненной ( $k = V_f/V_i = 0,5$ ) жёстко закреплённой с обоих краёв ( $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ) горизонтально расположенной цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением (отношение полуосей эллипса составляет  $\beta = R_z/R_y = 1,13$ ). Для наглядности картины перемещения увеличены в несколько раз. При анализе явления плескания можно говорить о том, что движение свободной поверхности инициирует перемещения тонкостенной оболочки. С увеличением частоты колебаний системы постепенно возрастает количество волн на свободной поверхности, что способствует перераспределению давления на стенке упругой конструкции и его локализации в направлении границы контакта. Вследствие этого перемещения оболочки ведут себя аналогичным образом (Рис. 1а, в, д).



**Рис. 1.** Собственные формы колебаний оболочки и свободной поверхности жидкости при  $k = 0,5$  и  $\beta = 1,13$  для нормальной составляющей вектора перемещений оболочки  $w$  (а, в, д) и давления (б, г, е) при различных значениях частоты, Гц:  $\omega_4 = 2,7182$  (а, б);  $\omega_{20} = 4,3723$  (в, г);  $\omega_{74} = 6,3029$  (д, е)

Вторая часть спектра относится к колебаниям системы «оболочка–жидкость» с явно выраженными перемещениями самой тонкостенной конструкции. Здесь частоты зависят от геометрических размеров и могут значительно превышать частоты колебаний свободной поверхности жидкости. В частности, для рассматриваемой конфигурации при  $k = 0,5$  на границе двух частей спектра наблюдается скачок частоты колебаний с  $\sim 17$  до 980 Гц. При таком заметном различии частот целесообразно проводить

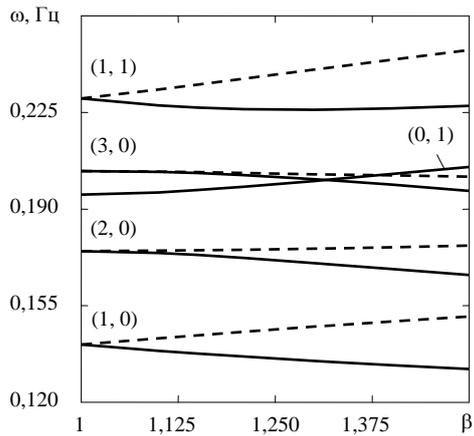
исследование колебаний жидкости и оболочки независимо, например, рассматривать или только колебания оболочки, используя граничное условие (6), или только колебания жидкости в сосуде с абсолютно жёсткими стенками и граничным условием на свободной поверхности (8).

Эффект от плескания свободной поверхности оказывается весьма важным для упругих конструкций, спектр колебаний которых сопоставим со спектром жидкой среды. Примерами таких систем являются промышленные резервуары, предназначенные для хранения различных жидкостей. При колебаниях перемещения тонкостенной оболочки, порождаемые движением свободной поверхности жидкости, могут быть сопоставимы с перемещениями, возникающими непосредственно в результате колебаний самой оболочки. Взаимодействие этих двух факторов приводит к появлению форм колебаний с разной величиной полувольт в окружном направлении даже у вертикально ориентированных круговых оболочек. Частотные характеристики таких конструкций в значительной степени зависят от их геометрических размеров, в частности радиуса. Учёт плескания свободной поверхности оказывается существенным при колебаниях широких оболочек и вызывает снижение их частот даже при малом количестве жидкости внутри.

В таблице показаны собственные частоты колебаний жёстко закреплённого у основания вертикального цилиндрического резервуара, содержащего жидкость. Площадь эллиптического поперечного сечения полагалась равной аналогичной круговой конфигурации (модуль упругости  $E = 2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,30$ ,  $\rho_s = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $R_y = 30$  м,  $h = 0,03$  м,  $L/R_y = 1,2$ ,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1500$  м/с,  $k = 0,72$ ). Здесь, как и в последующих примерах, во внимание принята гидростатическая нагрузка, пропорциональная высоте столба жидкости. Частоты получены при разных значениях параметра эллиптичности  $\beta$  и позволяют оценить эффект от плескания свободной поверхности жидкости. В частности, для круговой оболочки ( $\beta = 1$ ) без учёта этого явления (то есть при граничном условии (6)) первым трём низшим частотам соответствуют формы колебаний с числом полувольт ( $m, n$ ) в продольном и окружном направлениях: (1, 6) — 1,1293 Гц, (1, 7) — 1,1544 Гц и (1, 8) — 1,1796 Гц. Из представленных данных следует, что учёт плескания жидкости (граничное условие (8)) значительно снижает частоты спектра. В этом случае низшие частоты порождаются не колебаниями оболочки, а перемещением свободной поверхности. Соответствующие им формы колебаний также можно классифицировать на симметричные и антисимметричные, однако в спектре они имеют кратные частоты. Детальный анализ форм колебаний позволяет обнаружить те из них, которые порождаются непосредственно колебаниями тонкостенной конструкции, что фактически является весьма трудоёмкой задачей. В первую очередь, это связано с образованием плотного частотного спектра в случае учёта свободной поверхности. Поиск нужных из них требует вычисления значительного количества собственных значений и выявления необходимых форм колебаний. При приближении частоты колебаний свободной поверхности к частоте колебаний системы, полученной без учёта эффекта плескания, образуются смешанные несимметричные формы колебаний, большая часть которых не может быть найдена в рамках двумерных осесимметричных постановок. Появление смешанных форм колебаний вызывает повышение частот, порождаемых колебаниями оболочки. Так, рассмотренным выше трём частотам колебаний оболочки с жидкостью, полученным без учёта перемещений свободной поверхности, соответствуют следующие частоты: 1,1589 Гц, 1,1807 Гц и 1,2110 Гц. Видно, что они возросли на 1,5–2%.

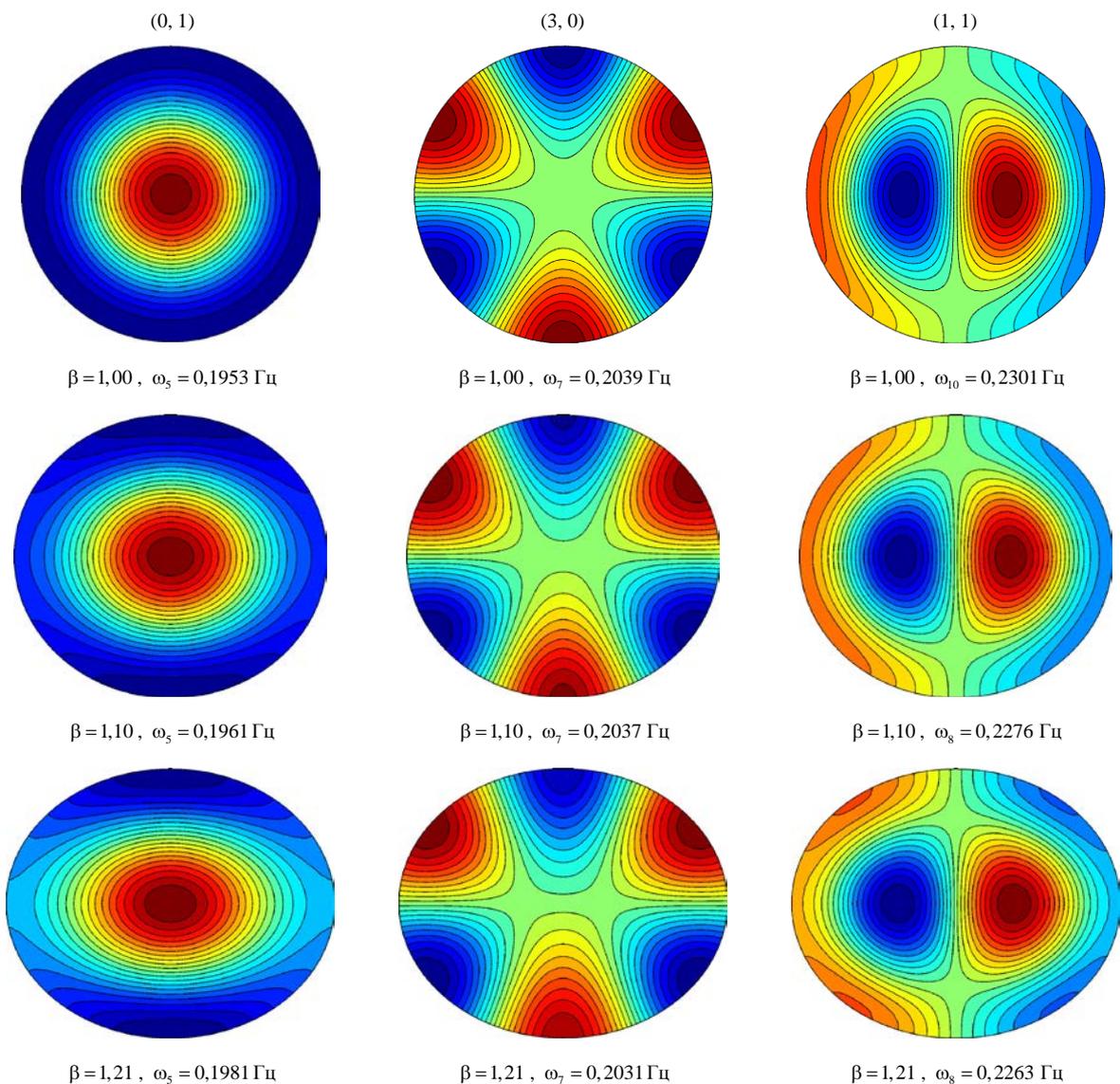
Таблица. Собственные частоты колебаний (Гц) цилиндрических резервуаров с жидкостью при разных значениях параметра эллиптичности  $\beta$

$\omega_i$	$\beta = 1,0000$		$\beta = 1,2100$		$\beta = 1,3225$		$\beta = 1,5000$	
	Без плескания	С плесканием						
1	1,1293	0,1409	1,1067	0,1365	1,0856	0,1346	1,0511	0,1320
2	1,1293	0,1409	1,1067	0,1455	1,0856	0,1478	1,0511	0,1511
3	1,1544	0,1748	1,1158	0,1723	1,0901	0,1700	1,0519	0,1661
4	1,1544	0,1748	1,1158	0,1753	1,0901	0,1758	1,0520	0,1768
5	1,1796	0,1953	1,1973	0,1981	1,1976	0,2005	1,1846	0,1966
6	1,1796	0,2039	1,1973	0,2024	1,1976	0,2008	1,1848	0,2018
7	1,2789	0,2039	1,2663	0,2031	1,2478	0,2026	1,2135	0,2053
8	1,2789	0,2289	1,2663	0,2263	1,2478	0,2261	1,2136	0,2227
9	1,2890	0,2289	1,2982	0,2276	1,3061	0,2261	1,3086	0,2250
10	1,2890	0,2301	1,2982	0,2278	1,3061	0,2267	1,3088	0,2274



**Рис. 2.** Собственные частоты колебаний свободной поверхности эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью в зависимости от параметра эллиптичности

На рисунке 2 показано изменение частот колебаний свободной поверхности жидкости при разных значениях параметра эллиптичности  $\beta$ . Для классификации соответствующих им форм колебаний используется обозначение  $(i, j)$ , где  $i, j$  — число полуволн в окружном направлении по контуру смоченной поверхности и внутри него. С изменением параметра эллиптичности частоты, которым ставятся в соответствие симметричные (сплошные линии) и антисимметричные (пунктирные линии) формы колебаний, начинают различаться по величине. Качественное несовпадение поведения этих кривых обусловлено тем, что образование форм зависит от вида поперечного сечения. Более наглядно влияние геометрии продемонстрировано на рисунке 3. В рассмотренном примере изменение поперечного сечения приводит к неодинаковым радиусам



**Рис. 3.** Собственные формы колебаний свободной поверхности эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью

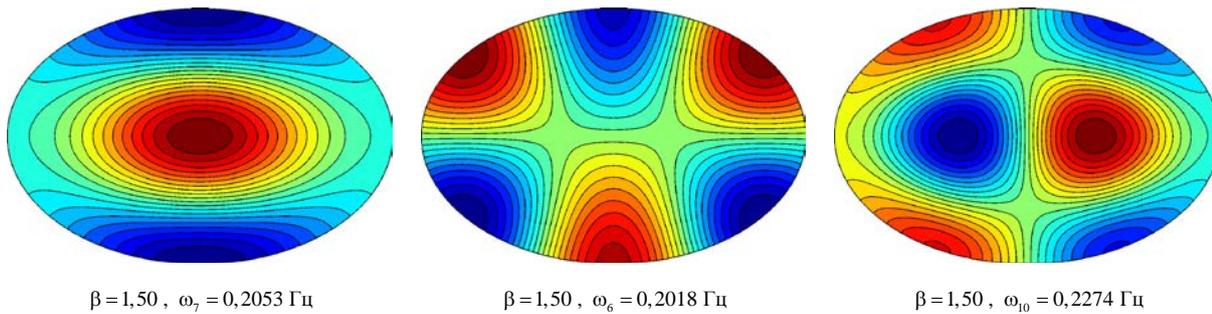


Рис. 3. Продолжение

кривизны, что нарушает симметрию волн в одном из направлений. При  $\beta = 1$  изолинии формы  $(0, 1)$  представляют собой набор концентрических окружностей с максимальным значением в центре. С увеличением значения параметра  $\beta$  происходит не только их преобразование в эллипс, но и изменяются картины перемещений вблизи границы с большим радиусом кривизны. Подобный процесс в окрестности границы характерен также и для формы  $(1, 1)$ . Несколько иным образом ведут себя формы колебаний, у которых присутствуют лишь полуволны по контуру в окружном направлении, например  $(3, 0)$ . Здесь наблюдается тенденция продвижения их от границы с меньшим радиусом кривизны к центру.

## 5. Заключение

В данной работе исследуется поведение круговых и эллиптических цилиндрических резервуаров, частично заполненных жидкостью, с учётом гравитационных волн на свободной поверхности. Проведённый модальный анализ позволил установить, что:

- плескание свободной поверхности жидкости оказывает весьма существенное влияние на поведение упругих конструкций, спектр колебаний которых сопоставим со спектром жидкой среды. Учёт этого эффекта приводит к снижению собственных частот колебаний системы даже при наличии незначительного количества жидкости;
- гравитационные волны на свободной поверхности жидкости сказываются на распределении гидродинамического давления на стенках конструкции. Однако различие между частотами колебаний системы «оболочка–жидкость», полученными с учётом и без учёта плескания, незначительно — 1,5–2%. В то же время частоты колебаний свободной поверхности могут быть, в зависимости от геометрии, в разы меньше.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00323-а) и Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ-2590.2014.1).

## Литература

1. *Amabili M.* Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // *J. Sound Vib.* – 1996. – Vol. 191, no. 5. – P. 757-780. DOI
2. *Selmane A., Lakis A.A.* Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid // *J. Fluid. Struct.* – 1997. – Vol. 11, no. 1. – P. 111-134. DOI
3. *Постнов В.А.* Новая вариационная формулировка проблемы взаимодействия упругих конструкций с жидкостью // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2000. – № 62. – С. 5-12.
4. *Ergin A., Temarel P.* Free vibration of a partially liquid-filled and submerged, horizontal cylindrical shell // *J. Sound Vib.* – 2002. – Vol. 254, no. 5. – P. 951-965. DOI
5. *Ergin A., Price W.G., Randall R., Temarel P.* Dynamic characteristics of a submerged, flexible cylinder vibrating in finite water depths // *J. Ship Res.* – 1992. – Vol. 36, no. 2. – P. 154-167.
6. *Xiang Y., Huang Y.* A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water // *Acta Mech. Solida Sin.* – 2005. – Vol. 18, no. 1. – P. 1-12.
7. *Firouz-Abadi R.D., Noorian M.A., Haddadpour H.* A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid // *J. Fluid. Struct.* – 2010. – Vol. 26, no. 5. – P. 747-763. DOI
8. *Cho J.R., Lee H.W., Ha S.Y.* Finite element analysis of resonant sloshing response in 2-D baffled tank // *J. Sound Vib.* – 2005. – Vol. 288, no. 4-5. – P. 829-845. DOI
9. *Mitra S., Sinhamahapatra K.P.* Slosh dynamics of liquid-filled containers with submerged components using pressure-based finite element method // *J. Sound Vib.* – 2007. – Vol. 304, no. 1-2. – P. 361-381. DOI
10. *Bermúdez A., Rodríguez R.* Finite element analysis of sloshing and hydroelastic vibrations under gravity // *ESAIM-Math. Model. Num.* – 1999. – Vol. 33, no. 2. – P. 305-327. DOI
11. *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: Theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
12. *Andrianarison O., Ohayon R.* Compressibility and gravity effects in internal fluid-structure vibrations: Basic equations and appropriate variational formulations // *Comput. Method. Appl. M.* – 2006. – Vol. 195, no. 17-18. – P. 1958-1972. DOI

13. Popov G., Sankar S., Sankar T.S. Shape optimization of elliptical road containers due to liquid load in steady-state turning // *Vehicle Syst. Dyn.* – 1996. – Vol. 25, no. 3. – P. 203-221. DOI
14. Hasheminejad S.M., Aghabeigi M. Liquid sloshing in full-half horizontal elliptical tanks // *J. Sound Vib.* – 2009. – Vol. 324, no. 1-2. – P. 332-349. DOI
15. Koh H.M., Kim J.K., Park J.-H. Fluid-structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM-FEM and comparison with test results // *Earthquake Eng. Struct. D.* – 1998. – Vol. 27, no. 2. – P. 109-124. DOI
16. Amiri M., Sabbagh-Yazdi S.R. Ambient vibration test and finite element modeling of tall liquid // *Thin Wall. Struct.* – 2009. – Vol. 49, no. 8. – P. 974-983. DOI
17. Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N. Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid // *J. Aeronaut. Sci.* – 1962. – Vol. 29, no. 9. – P. 1052-1059. DOI
18. Maheri M.R., Severn R.T. Dynamic investigations of cylindrical structures in contact with liquid // *Steel structures: Advances in design and construction* / Ed. R. Narayanan. – London: Elsevier, 1987. – P. 643-652.
19. Amabili M., Dalpiaz G. Breathing vibrations of a horizontal circular cylindrical tank shell, partially filled with liquid // *J. Vib. Acoust.* – 1995. – Vol. 117, no. 2. – P. 187-191. DOI
20. Mazúch T., Horacek J., Trnka J., Veselý J. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // *J. Sound Vib.* – 1996. – Vol. 193, no. 3. – P. 669-690. DOI
21. Amabili M., Arziera R., Negri A. Experimental study on large-amplitude vibrations of water-filled circular cylindrical shells // *J. Fluid. Struct.* – 2002. – Vol. 16, no. 2. – P. 213-227. DOI
22. Сапоженков С.Б., Фот Е.Я., Мокеев В.В. Экспериментальное и численное исследование колебаний тонкостенной оболочки, заполненной вязкоупругой жидкостью // *Известия ЧНЦ УрО РАН.* – 2004. – № 4. – С. 66-70.
23. El Damatty A.A., Saafan M.S., Sweedan A.M.I. Experimental study conducted on a liquid-filled combined conical tank model // *Thin Wall. Struct.* – 2005. – Vol. 43, no. 9. – P. 1398-1417. DOI
24. Юдин А.С. Статика и колебания оболочек вращения с жидкостью. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 204 с.
25. Lakis A.A., Neagu S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid // *J. Sound Vib.* – 1997. – Vol. 207, no. 2. – P. 175-205. DOI
26. Amabili M., Paidoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom // *J. Sound Vib.* – 1998. – Vol. 213, no. 2. – P. 259-299. DOI
27. Amabili M. Vibrations of circular tubes and shells filled and partially immersed in dense fluids // *J. Sound Vib.* – 1999. – Vol. 221, no. 4. – P. 567-585. DOI
28. Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface // *J. Sound Vib.* – 2000. – Vol. 231, no. 1. – P. 79-97. DOI
29. Zhu C.F., Tang G.A., Zhang M.Y. Coupling analysis of liquid sloshing and structural vibration using general software // *J. Press. Vess.-T. ASME.* – 2014. – Vol. 137, no. 1. – 011304. DOI
30. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.
31. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // *ПМТФ.* – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 313-322. (English version DOI).
32. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1984. – 264 с.
33. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
34. Lehoucq R.B., Sorensen D.C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM J. Matrix Anal. A.* – 1996. – Vol. 17, no. 4. – P. 789-821. DOI

## References

1. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 191, no. 5, pp. 757-780. DOI
2. Selmane A., Lakis A.A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid. *J. Fluid. Struct.*, 1997, vol. 11, no. 1, pp. 111-134. DOI
3. Postnov V.A. Novaya variatsionnaya formulirovka problemy vzaimodeistviya uprugikh konstruksij s zhidkost'yu [New variational formulation of the problem of interaction between elastic structures and fluids]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2000, vol. 62, pp. 5-12.
4. Ergin A., Temarel P. Free vibration of a partially liquid-filled and submerged, horizontal cylindrical shell. *J. Sound Vib.*, 2002, vol. 254, no. 5, pp. 951-965. DOI
5. Ergin A., Price W.G., Randall R., Temarel P. Dynamic characteristics of a submerged, flexible cylinder vibrating in finite water depths. *J. Ship Res.*, 1992, vol. 36, no. 2, pp. 154-167.
6. Xiang Y., Huang Y. A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water. *Acta Mech. Solida Sin.*, 2005, vol. 18, no. 1, pp. 1-12.
7. Firouz-Abadi R.D., Noorian M.A., Haddadpour H. A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid. *J. Fluid. Struct.*, 2010, vol. 26, no. 5, pp. 747-763. DOI
8. Cho J.R., Ha S.Y., Lee H.W. Finite element analysis of resonant sloshing response in 2-D baffled tank. *J. Sound Vib.*, 2005, vol. 288, no. 4-5, pp. 829-845. DOI
9. Mitra S., Sinhamahapatra K.P. Slosh dynamics of liquid-filled containers with submerged components using pressure-based finite element method. *J. Sound Vib.*, 2007, vol. 304, no. 1-2, pp. 361-381. DOI
10. Bermúdez A., Rodríguez R. Finite element analysis of sloshing and hydroelastic vibrations under gravity. *ESAIM-Math. Model. Num.*, 1999, vol. 33, no. 2, pp. 305-327. DOI
11. Ibrahim R.A. *Liquid sloshing dynamics: Theory and applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 970 p.
12. Andrianarison O., Ohayon R. Compressibility and gravity effects in internal fluid-structure vibrations: Basic equations and appropriate variational formulations. *Comput. Method. Appl. M.*, 2006, vol. 195, no. 17-18, pp. 1958-1972. DOI

13. Popov G., Sankar S., Sankar T.S. Shape optimization of elliptical road containers due to liquid load in steady-state turning. *Vehicle Syst. Dyn.*, 1996, vol. 25, no. 3, pp. 203-221. [DOI](#)
14. Hasheminejad S.M., Aghabeigi M. Liquid sloshing in half-full horizontal elliptical tanks. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 324, no. 1-2, pp. 332-349. [DOI](#)
15. Koh H.M., Kim J.K., Park J.-H. Fluid-structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM-FEM and comparison with test results. *Earthquake Eng. Struct. D.*, 1998, vol. 27, no. 2, pp. 109-124. [DOI](#)
16. Amiri M., Sabbagh-Yazdi S.R. Ambient vibration test and finite element modeling of tall liquid. *Thin. Wall. Struct.*, 2009, vol. 49, no. 8, pp. 974-983. [DOI](#)
17. Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N. Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid. *J. Aeronaut. Sci.*, 1962, vol. 29, no. 9, pp. 1052-1059. [DOI](#)
18. Maheri M.R., Severn R.T. Dynamic investigations of cylindrical structures in contact with liquid. *Steel structures: Advances in design and construction*, ed. R. Narayanan. London: Elsevier, 1987. Pp. 643-652.
19. Amabili M., Dalpiaz G. Breathing vibrations of a horizontal circular cylindrical tank shell, partially filled with liquid. *J. Vib. Acoust.*, 1995, vol. 117, no. 2, pp. 187-191. [DOI](#)
20. Mazúch T., Horacek J., Trnka J., Veselý J. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement. *J. Sound Vib.*, 1996, v. 193, no. 3, p. 669-690. [DOI](#)
21. Amabili M., Arzieria R., Negri A. Experimental study on large-amplitude vibrations of water-filled circular cylindrical shells. *J. Fluid. Struct.*, 2002, vol. 16, no. 2, pp. 213-227. [DOI](#)
22. Sapozhnikov S.B., Fot E.Ya., Mokeev V.V. Eksperimental'noe i chislennoe issledovanie kolebanij tonkostennoj obolochki, zapolnennoj vyazkoupругoj zhidkost'yu [Experimental and numerical study of vibrations of a thin-walled shell filled with viscoelastic fluid]. *Proceedings of the Chelyabinsk Scientific Center UB RAS*, 2004, no. 4, pp. 66-70.
23. El Damatty A.A., Saafan M.S., Sweedan A.M. Experimental study conducted on a liquid-filled combined conical tank model. *Thin. Wall. Struct.*, 2005, vol. 43, no. 9, pp. 1398-1417. [DOI](#)
24. Yudin A.S. *Statika i kolebaniya obolochek vrashcheniya s zhidkost'yu* [Statics and vibrations of shells of revolution filled with liquid]. Rostov-na-Donu: Southern Federal University, 2014. 204 p.
25. Lakis A.A., Neagu S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid. *J. Sound Vib.*, 1997, vol. 207, no. 2, pp. 175-205. [DOI](#)
26. Amabili M., Paidoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. *J. Sound Vib.*, 1998, vol. 213, no. 2, pp. 259-299. [DOI](#)
27. Amabili M. Vibrations of circular tubes and shells filled and partially immersed in dense fluids. *J. Sound Vib.*, 1999, vol. 221, no. 4, pp. 567-585. [DOI](#)
28. Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface. *J. Sound Vib.*, 2000, vol. 231, no. 1, pp. 79-97. [DOI](#)
29. Zhu C.F., Tang G.A., Zhang M.Y. Coupling analysis of liquid sloshing and structural vibration using general software. *J. Press. Vess.-T. ASME*, 2014, vol. 137, no. 1, 011304. [DOI](#)
30. Fletcher K. *Computational techniques for fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1991. Vol. 2, 493 p.
31. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 313-322. [DOI](#)
32. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov V.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Analysis of multilayer plates and shells of composite materials]. Moscow: Mashinostroenie, 1984. 264 p.
33. Zienkiewicz O.C. *Finite element method in engineering science*. McGraw-Hill, 1972. 432 p.
34. Lehoucq R.B., Sorensen D.C. Deflation Techniques for an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration. *SIAM J. Matrix Anal. A.*, 1996, vol. 17, no. 4, pp. 789-821. [DOI](#)

Поступила в редакцию 28.10.2014; опубликована в электронном виде 30.12.2014

---

Сведения об авторах

Бочкарёв Сергей Аркадьевич, снс, кфмн, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, д. 1; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Лекомтцев Сергей Владимирович, нс, кфмн, ИМСС УрО РАН, 614013; e-mail: lekomtsev@icmm.ru