

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.44

УДК 539.3

МКЭ-РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ НА ПРИМЕРЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Изложены особенности численной реализации метода геометрического погружения в напряжениях применительно к решению плоских задач теории упругости изотропного однородного тела с произвольной формой границы. Суть метода геометрического погружения заключается в сведении исходной задачи для линейно упругого тела произвольной формы к итерационной последовательности задач теории упругости на некоторой канонической области. Сформулирована итерационная процедура для решения вариационного уравнения метода геометрического погружения, а также процедура построения его дискретного аналога с помощью метода конечных элементов в напряжениях для плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат. Использован вариант конечного элемента, в котором аппроксимации напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия, введены через функцию напряжений Эри. Продемонстрировано практическое применение метода на примере решения плоской задачи для упругой пластины с круговым вырезом. Получено достаточно хорошее соответствие результатов определения полей напряжений в сравнении с точным аналитическим решением и численным решением традиционным методом конечных элементов в перемещениях. Уделено внимание способам задания статических граничных условий, являющихся главными для данной вариационной формулировки, с использованием процедуры модификации матрицы податливости системы конечных элементов и метода множителей Лагранжа. Приведен пример численного решения задачи для несжимаемого упругого материала.

Ключевые слова: вариационный принцип Кастильяно, метод геометрического погружения, метод конечных элементов, теория упругости.

FEM IMPLEMENTATION OF A STRESS-BASED GEOMETRICAL IMMERSION METHOD BY EXAMPLE OF THE SOLUTION OF PLANE ELASTIC PROBLEMS

Yu.S. Kuznetsova and N.A. Trufanov

¹Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

The features specific to numerical implementation of a stress-based geometrical immersion method used to solve the boundary value elastic problem for an isotropic homogeneous body with a complex spatial configuration are discussed. The essence of the geometrical immersion method consists in constructing a convergent iterative procedure to find a solution for the area of complex spatial configuration as a sequence of problem solutions for some area of a more simple (canonical) form. An iterative procedure for the solution of the variational equation of the geometrical immersion method and a procedure for constructing its discrete analogue using the stress-based finite element method for the plane elastic problem in a Cartesian coordinate system are formulated. A variant of the stress function finite element is used to determine stress approximations that satisfy equilibrium equations. The application of the method is demonstrated by example of the solution of the plane problem for an elastic plate with a circular cutout. A good coincidence between the results for stress fields and the exact analytical and numerical solutions found by the traditional displacement-based finite element method is obtained. Particular emphasis is placed upon the ways to specify static boundary conditions, which are of primary value for this variational formulation using the procedure of modifying a compliance matrix of the finite element system and the Lagrange multipliers method. An example of the numerical solution for the problem of incompressible elastic material is presented.

Key words: Kastilyano's variational principle, geometrical immersion, method, finite element method, theory of elasticity

1. Введение

Метод конечных элементов, являющийся одним из универсальных численных методов решения задач теории упругости, базируется на различных вариационных формулировках. Наиболее распространен подход в перемещениях, использующий принцип минимума общей потенциальной энергии системы (вариационный принцип Лагранжа). Достаточно широко применяются и смешанные формулировки (в перемещениях и напряжениях) на основе вариационных принципов Рейсснера, Ху–Вашизу и других [1, 2]. Хорошо известен и подход в напряжениях [3–6], опирающийся на вариационный принцип минимума дополнительной работы (принцип Кастильяно), однако его практическое применение остается достаточно ограниченным, прежде всего из-за проблем с построением базисных функций, которые в данной формулировке должны быть статически допустимыми, то есть удовлетворяющими в элементе уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Особенно затруднителен выбор функций формы для изопараметрических элементов (элементов с криволинейными границами) в напряжениях, поэтому главным образом распространены элементы прямоугольной формы в плоских задачах [5] и их возможные пространственные обобщения, пригодные для решения задач теории упругости в канонических по форме областях. Так, например в плоском случае, прямоугольные элементы удобно строить с привлечением функции напряжений Эри, аппроксимации которой дают возможность выбрать полиномиальные аппроксимации компонент тензора напряжений, удовлетворяющие в элементе

уравнениям равновесия. При этом выполнение статических граничных условий обеспечивается наложением на систему дополнительных условий с помощью множителей Лагранжа. Граничные условия в перемещениях для данной вариационной формулировки являются естественными. Конечно-элементная технология решения таких задач хорошо известна, поскольку формулировка, использующая функцию напряжений, является двойственной к задаче чистого изгиба пластин в терминах функции прогиба. Известны также подходы, называемые «равновесными», которые базируются на аппроксимации полей напряжений внутри каждого конечного элемента полиномами, заведомо не обеспечивающими выполнение уравнений равновесия и граничных условий [7–9] и приводящими к сложным условиям равновесия узловых сил, накладываемым на систему.

Возможности конечных элементов, предназначенных для областей простой (канонической) формы, могут быть существенно расширены на основе методов сведения краевой задачи теории упругости для области произвольной формы к задаче на канонической области, среди которых метод фиктивных областей [10, 11], метод геометрического погружения (МГП) [12] и другие. В работе [13] дано теоретическое обоснование метода геометрического погружения для задачи теории упругости в напряжениях; ее формулировка в перемещениях и численная реализация подробно представлены в [12, 14]. Суть метода геометрического погружения заключается в сведении исходной задачи для линейно упругого тела произвольной формы к итерационной последовательности задач теории упругости на некоторой канонической области. МГП допускает применение различных численных методов для построения соответствующего дискретного аналога: метода конечных элементов, вариационно-разностного метода, метода граничных элементов [12, 14–16]. В работе [17] итерационно-вариационная процедура МГП в напряжениях реализована с привлечением полуаналитического метода конечных элементов для частного случая плоской задачи теории упругости в полярной системе координат.

Настоящая статья дополняет теоретические положения работы [13] и посвящена особенностям конечно-элементной реализации процедуры МГП в общем случае. В качестве примера решена плоская задача теории упругости.

2. Основные соотношения

Метод геометрического погружения позволяет отыскать обобщенное решение краевой задачи теории упругости в напряжениях для тела, занимающего область D с границей S , в результате реализации итерационной последовательности вариационных задач вида (без учета массовых сил) [13]:

$$\int_{D_0} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dV = \int_{D_\Delta} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dV_\Delta + \int_{S_u} t_i (\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_i dS_u, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где $\hat{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений с компонентами σ_{ij} ; $\hat{\varepsilon}$ — симметричный тензор деформаций с компонентами ε_{ij} ; \mathbf{u} — вектор перемещений с компонентами u_i ; \mathbf{U} — вектор заданных на границе S_u перемещений с компонентами U_i ; $t_i = \sigma_{ij} n_j$ — усилия на границе S_u ; \mathbf{n} — вектор внешней нормали с компонентами n_i к границе S , $S = S_\sigma \cup S_u$; δ — знак вариации. Функционал (1) определен на статически допустимых полях напряжений σ_{ij} , удовлетворяющих уравнениям равновесия в области D_0 и статическим граничным условиям $\sigma_{ij} n_j = T_i$ на границе S_σ , \mathbf{T} — вектор заданных на границе S_σ усилий с компонентами T_i .

Погружение области D осуществляется в каноническую область D_0 , причем $D \in D_0$, $D_\Delta = D_0 \setminus D$ (Рис. 1). В статье [13] доказано, что процедура (1) сходится к решению исходной краевой задачи по норме энергетического пространства независимо от степени отличия реальной области от канонической.



Рис. 1. Исходная область D (а) и каноническая область D_0 (б)

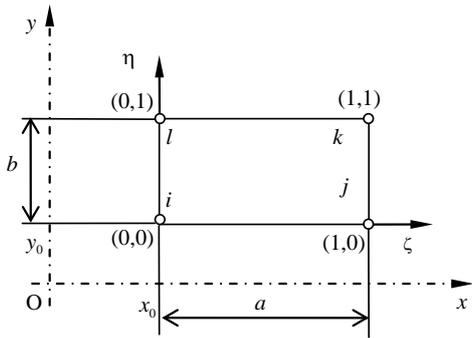


Рис. 2. Прямоугольный конечный элемент в локальной системе координат

Для решения вариационного уравнения (1) в двумерной канонической области D_0 построим его дискретный аналог, применяя метод конечных элементов в напряжениях для плоских задач теории упругости в декартовой системе координат. В качестве конечного элемента выберем прямоугольный элемент с узлами в углах (Рис. 2), имеющий локальные координаты ζ, η . Связь глобальных и локальных координат конечного элемента имеет вид: $x = x_0 + a\zeta, y = y_0 + b\eta$.

Решение уравнения (1) следует искать среди статически допустимых полей напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, поэтому из соображений удобства воспользуемся функцией напряжений Эри [3] и в качестве узловых неизвестных примем значения функции

напряжений, ее первых производных по пространственным переменным, а также смешанной производной

$$\{\Phi_i\}^T = \left\{ \Phi_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i, \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i \right\}. \quad \text{Таким образом, внутри каждого конечного элемента}$$

введена эрмитова аппроксимация функции напряжений Эри, которая в локальной системе координат имеет вид: $\varphi(\zeta, \eta) = \{N^e(\zeta, \eta)\}^T \{\Phi^e\}$, где $\{N^e(\zeta, \eta)\}^T = \left\{ \{N_i^e\}^T, \{N_j^e\}^T, \{N_k^e\}^T, \{N_l^e\}^T \right\}$,

$\{N_i^e\}^T = \{ \bar{N}_{1i}(\zeta, \eta), \bar{N}_{2i}(\zeta, \eta), \bar{N}_{3i}(\zeta, \eta), \bar{N}_{4i}(\zeta, \eta) \}$ — столбец функций форм элемента,

$\{\Phi^e\}^T = \{ \{\Phi_i\}, \{\Phi_j\}, \{\Phi_k\}, \{\Phi_l\} \}$ — столбец узловых неизвестных элемента,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1q} &= N_{0q}(\zeta)N_{0q}(\eta), & \bar{N}_{2q} &= N_{0q}(\zeta)N_{1q}(\eta), \\ \bar{N}_{3q} &= N_{1q}(\zeta)N_{0q}(\eta), & \bar{N}_{4q} &= N_{1q}(\zeta)N_{1q}(\eta) \quad (q = i, j, k, l). \end{aligned} \quad (2)$$

Конечный элемент такого типа хорошо известен в задачах изгиба прямоугольных пластин (для аппроксимации функции прогиба), функции формы в (2) определяются, как в [18]:

$$\begin{aligned} N_{0i}(\zeta) &= N_{0i}(\eta) = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3, & N_{0i}(\eta) &= N_{0i}(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \\ N_{1i}(\zeta) &= N_{1i}(\eta) = a(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3), & N_{1i}(\eta) &= N_{1i}(\eta) = b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), \\ N_{0l}(\zeta) &= N_{0l}(\eta) = 3\zeta^2 - 2\zeta^3, & N_{0l}(\eta) &= N_{0l}(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3, \\ N_{1j}(\zeta) &= N_{1j}(\eta) = -a(\zeta^2 - \zeta^3), & N_{1j}(\eta) &= N_{1j}(\eta) = -b(\eta^2 - \eta^3). \end{aligned}$$

Аппроксимирующая функция в данном случае представляет собой неполный полином шестого порядка по ζ и η (опущены слагаемые, содержащие члены в степени выше третьей по любой переменной):

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta, \eta) &= \alpha_1 + \alpha_2\zeta + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta^2 + \alpha_5\eta^2 + \alpha_6\zeta\eta + \alpha_7\zeta^2\eta + \alpha_8\zeta\eta^2 + \alpha_9\zeta^3 + \\ &+ \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\zeta\eta^3 + \alpha_{12}\zeta^3\eta + \alpha_{13}\zeta^2\eta^2 + \alpha_{14}\zeta^3\eta^2 + \alpha_{15}\zeta^2\eta^3 + \alpha_{16}\zeta^3\eta^3, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}$ — коэффициенты аппроксимации. При таком способе аппроксимации функция Эри и ее первые производные непрерывны вдоль общих сторон смежных конечных элементов.

Функция напряжений Эри в декартовой системе координат при отсутствии объемных сил вводится следующим образом [19]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Используя (3), определим в матричном виде связь компонент тензора напряжений с узловыми неизвестными элемента: $\{\sigma\} = [L^e]\{\Phi^e\}$, где $\{\sigma\} = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \}^T$ — вектор напряжений в элементе,

$$[L^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{N^e\}^T \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{N^e\}^T \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \{N^e\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \{N^e\}^T \\ \frac{4}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \{N^e\}^T \\ -\frac{4}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \{N^e\}^T \end{bmatrix}$$

— матрица градиентов конечного элемента для функции

напряжений в случае плоской задачи.

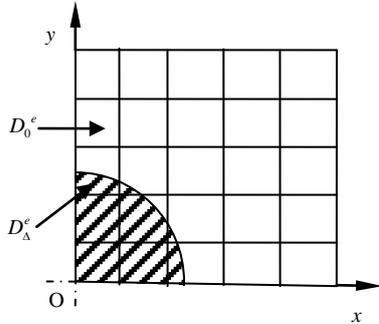


Рис. 3. Конечно-элементная сетка

Физические соотношения в матричной форме примут вид [3]: $\{\varepsilon\} = [D^{-1}]\{\sigma\} = [D^{-1}][L^e]\{\Phi^e\}$. Здесь: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$ — вектор деформаций в элементе; $[D^{-1}]$ — матрица констант упругой податливости, которая в случае плоско-напряженного состояния определяется как

$$[D^{-1}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Выполним дискретизацию канонической области, используя введенные прямоугольные конечные элементы (Рис. 3). Для этого запишем выражения вариаций дополнительной работы упругого тела в областях D_0 и D_Δ

в соотношении (1), используя введенные выше обозначения:

$$\int_{D_0} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD_0 = \sum_e \int_{D_0^e} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD_0^e = \sum_e \delta \{\Phi^e\}^T \int_{D_0^e} [L^e]^T [D^{-1}][L^e] dD_0^e \{\Phi^e\} = \sum_e \delta \{\Phi^e\}^T [p^e]_0 \{\Phi^e\}, \quad (4)$$

$$\int_{D_\Delta} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD_\Delta = \sum_e \int_{D_\Delta^e} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD_\Delta^e = \sum_e \delta \{\Phi^e\}^T \int_{D_\Delta^e} [L^e]^T [D^{-1}][L^e] dD_\Delta^e \{\Phi^e\} = \sum_e \delta \{\Phi^e\}^T [p^e]_\Delta \{\Phi^e\}, \quad (5)$$

где $[p^e]_0 = \int_{D_0^e} [L^e]^T [D^{-1}][L^e] dD_0^e$ — матрица податливости конечного элемента, целиком принадлежащего канонической области, $[p^e]_\Delta = \int_{D_\Delta^e} [L^e]^T [D^{-1}][L^e] dD_\Delta^e$ — матрица податливости элемента, полностью или

частично принадлежащего области дополнения, вычисленная по области дополнения D_Δ^e .

Вычисление интегралов типа (4) является достаточно простой процедурой, так как области D_0^e

представляют собой прямоугольники. Элементы и подобласти элементов, определяющие в совокупности область дополнения D_Δ , имеют различную форму. Как видно (см. Рис. 3), среди элементов есть такие,

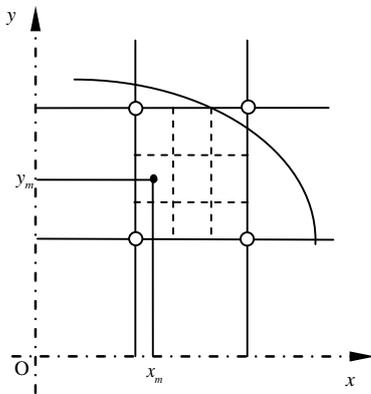


Рис. 4. Разбиение элемента D_Δ^e области дополнения на подобласти

которые принадлежат одновременно исходной области D и области дополнения D_Δ и содержат внутри себя, в общем случае, участок S_u^e криволинейной границы S_u . Это необходимо учитывать при вычислении интегралов типа (5). Поскольку в общем случае граница имеет произвольную форму, то имеется множество возможных вариантов прохождения ее по конечному элементу, поэтому представляется удобным вычисление таких интегралов методом ячеек [20], заключающемся в разбиении области интегрирования на более мелкие подобласти. Криволинейная граница сводится к прямолинейной внутри каждой ячейки, образуя при этом подобласти простой формы: треугольники, трапеции — что упрощает численное нахождение интеграла (Рис. 4).

Простейшая формула вычисления матрицы податливости элемента, принадлежащего области дополнения, по методу ячеек примет вид:

$$[p^e]_{\Delta} = \int_{D_{\Delta}^e} [L^e]^T [D^{-1}] [L^e] dD_{\Delta}^e = \sum_{m=1}^{M^e} \left(A_m \cdot [L^e(x_m, y_m)]^T [D^{-1}] [L^e(x_m, y_m)] \right),$$

где A_m — площадь ячейки, (x_m, y_m) — координаты центра ячейки, M^e — общее число ячеек в элементе.

Работу возможных усилий на заданных перемещениях на границе S_u определим как

$$\int_{S_u} t_i (\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_i dS_u = \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j U_i dS_u = \sum_e \delta \{ \Phi^e \}^T \int_{S_u^e} [L^e]^T [n]^T \{ U \} dS_u^e = \sum_e \delta \{ \Phi^e \}^T \{ f_u^e \}. \quad (6)$$

Здесь: $\{ f_u^e \} = \int_{S_u^e} [L^e]^T [n]^T \{ U \} dS_u^e$ — вектор-столбец обобщенных узловых перемещений;

$\{ U \} = \{ U_x, U_y \}^T$ — вектор заданных перемещений; $\{ t \} = \{ t_x, t_y \}^T$ — вектор усилий на границе S_u ;

$\{ t \} = [n] \{ \sigma \} = [n] [L^e] \{ \Phi^e \}$; $[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$, где n_x, n_y — направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали к границе S_u^e .

Подстановка (4)–(6) в (1) приводит к следующему выражению вариации дополнительной работы упругого тела:

$$\sum_e \delta \left(\{ \Phi^e \}^T \right)^{(k+1)} [p^e]_0 \{ \Phi^e \}^{(k+1)} = \sum_e \delta \left(\{ \Phi^e \}^T \right)^{(k+1)} [p^e]_{\Delta} \{ \Phi^e \}^{(k)} + \sum_e \delta \left(\{ \Phi^e \}^T \right)^{(k+1)} \{ f_u^e \}. \quad (7)$$

Обозначив через $[P]_0 = \sum_e [p^e]_0$, $[P]_{\Delta} = \sum_e [p^e]_{\Delta}$, $\{ F_u \} = \sum_e \{ f_u^e \}$, $\{ \Phi \}$, соответственно, глобальные матрицы податливости канонической области и области дополнения, глобального вектора обобщенных перемещений и вектора узловых неизвестных, получим:

$$\delta \left(\{ \Phi \}^T \right)^{(k+1)} [P]_0 \{ \Phi \}^{(k+1)} = \delta \left(\{ \Phi \}^T \right)^{(k+1)} [P]_{\Delta} \{ \Phi \}^{(k)} + \delta \left(\{ \Phi \}^T \right)^{(k+1)} \{ F_u \}. \quad (8)$$

В силу произвольности вариаций узловых неизвестных (8) дает последовательность независимых по левой части систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных $\{ \Phi \}$. Дискретный аналог итерационной процедуры (1) запишется так:

$$[P]_0 \{ \Phi \}^{(k+1)} = [P]_{\Delta} \{ \Phi \}^{(k)} + \{ F_u \}, \quad \{ \Phi \}^{(0)} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (9)$$

Поскольку в вариационной формулировке принципа минимума дополнительной работы рассматриваются статически допустимые поля напряжений, что предполагает в том числе и выполнение статических граничных условий, необходимо предусмотреть, чтобы узловые неизвестные, входящие в столбец $\{ \Phi \}$, обеспечивали выполнение уравнений $\sigma_{ij} n_j = T_i$ на S_{σ} . Это обстоятельство требует наложения дополнительных условий на узловые неизвестные, для учета которых наиболее удобным и распространенным является метод множителей Лагранжа [1, 3].

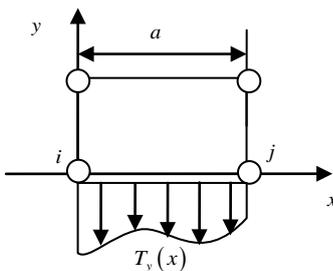


Рис. 5. Схема приложения поверхностных сил к границе конечного элемента

Методику формулировки дополнительных ограничений продемонстрируем на следующем примере: пусть на стороне конечного элемента, параллельной оси Ox , действуют поверхностные силы T_y так, как изображено на рисунке 5. Используя связь функции напряжений Эри и компонент тензора напряжений (3), на стороне элемента с узлами

i и j дважды проинтегрируем по переменной x выражение $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = T_y(x)$ и определим константы интегрирования через значения узловых неизвестных $\varphi_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i, \varphi_j, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j$:

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j = \int_{x_i}^{x_j} T_y(x) dx, \tag{10}$$

$$-\varphi_i + \varphi_j - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i a = \int_{x_i}^{x_j} \int_{x_i}^x T_y(x) dx dx. \tag{11}$$

Так как функция T_y задана и зависит только от координаты x , то можно вычислить интегралы в соотношениях (10) и (11). В результате получим два уравнения, определяющих связь между узловыми неизвестными на границе элемента. Поступая аналогично со всеми остальными граничными условиями в напряжениях, сформируем полную систему ограничений для элемента в виде:

$$[g^e] \{\Phi^e\} = \{f_p^e\}. \tag{12}$$

Следует отметить, что поскольку касательные напряжения σ_{xy} непосредственно входят в число узловых неизвестных, накладываемые на них условия можно учитывать с помощью преобразований глобальной матрицы податливости.

На основе соотношений (12) для всех конечных элементов, имеющих границы с приложенными известными поверхностными усилиями, дополним уравнения (9), используя метод множителей Лагранжа, и придем к следующей итерационной последовательности систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [P]_0 & [G]^T \\ [G] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi^{(k+1)}\} \\ \{\lambda^{(k+1)}\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [P]_\Delta & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi^{(k)}\} \\ \{\lambda^{(k)}\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix}, \\ \{\Phi\}^{(0)} &\equiv 0 \quad (k=1,2,3\dots), \\ \lambda^{(0)} &\equiv 0 \quad (k=1,2,3\dots), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\{\lambda\}$ — вектор множителей Лагранжа; $[G], \{F_p\}$ — глобальная матрица коэффициентов и соответствующие правые части уравнений–ограничений, образующих систему (12).

Условие остановки итерационной процедуры выбрано в виде: $\left\| \{\Phi^{(k+1)}\} - \{\Phi^{(k)}\} \right\| / \left\| \{\Phi^{(k)}\} \right\| \leq \beta$, где за норму вектора $\{\Phi\}$ берется норма Чебышева, β — задаваемое вычислителем малое положительное число.

3. Примеры реализации

В качестве примера приложения описанной конечно-элементной процедуры МГП рассмотрим решение плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат — определим напряженное состояние бесконечной пластины с круглым вырезом радиусом R при сжатии ее вдоль оси Ox равномерно распределенной нагрузкой P . На контуре выреза равны нулю обе компоненты вектора перемещений. В статье [13] кратко приведены некоторые результаты решения этой задачи, имеющей известное аналитическое решение [21], с целью подкрепить теоретические доказательства сходимости итерационного процесса МГП данными численных исследований. При численном решении размеры пластинки были приняты равными $2a \times 2a$, радиус выреза — $R = a/7$, параметры материала — $E = 2,3 \cdot 10^{11}$ Па (модуль Юнга) и $\nu = 0,33$ (коэффициент Пуассона). В силу симметрии задачи относительно осей рассматривается четверть пластины (Рис. 6). В качестве канонической области выбран прямоугольник размером $2a \times 2a$.

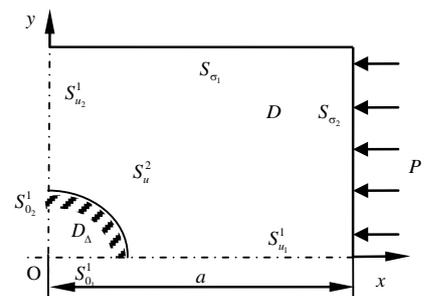


Рис. 6. Расчетная схема

Согласно методу геометрического погружения решение задачи сводится к реализации следующей вариационно-итерационной процедуры:

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_0} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dV - \int_{D_\Delta} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i (\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_i dS_u = \\
 & = \frac{1}{E} \int_0^a \int_0^a (\delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k+1)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k+1)} - \nu (\delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k+1)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k+1)}) + \\
 & + \delta \tau_{xy}^{(k+1)} \tau_{xy}^{(k+1)} 2(1+\nu)) dx dy - \frac{1}{E} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k)} - \\
 & - \nu (\delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k)}) + \delta \tau_{xy}^{(k+1)} \tau_{xy}^{(k)} 2(1+\nu) dx dy - \int_{S_u} (t_x (\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_x + t_y (\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_y) dS_u = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как по круговому контуру $U_x = U_y = 0$, то (14) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_0^a \delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k+1)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k+1)} - \nu (\delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k+1)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k+1)}) + \delta \tau_{xy}^{(k+1)} \tau_{xy}^{(k+1)} 2(1+\nu) dx dy = \\
 & = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k)} - \nu (\delta \sigma_{xx}^{(k+1)} \sigma_{yy}^{(k)} + \delta \sigma_{yy}^{(k+1)} \sigma_{xx}^{(k)}) + \delta \tau_{xy}^{(k+1)} \tau_{xy}^{(k)} 2(1+\nu) dx dy.
 \end{aligned}$$

Для обеспечения статической допустимости полей напряжений также необходимо выполнить следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy}(0, y) &= 0, \quad y \in S_{u_2}^1, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x \in S_{u_1}^1, \\
 \sigma_{xx}(a, y) &= -P(y), \quad \tau_{xy}(a, y) = 0, \quad y \in S_{\sigma_2}^1, \\
 \sigma_{yy}(x, a) &= \tau_{xy}(x, a) = 0, \quad x \in S_{\sigma_1}^1.
 \end{aligned}$$

Кинематические граничные условия:

$$\begin{aligned}
 u_x(0, y) &= 0, \quad y \in S_{u_2}^1, \\
 u_y(x, 0) &= 0, \quad x \in S_{u_1}^1, \\
 u_x(x, y) &= u_y(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S_{u}^2,
 \end{aligned}$$

отражающие условия симметрии на соответствующих границах, а также равенство нулю компонент вектора перемещений на контуре выреза выполняются непосредственно из условия минимума функционала как естественные.

В соответствии с теоретическими положениями МГП в напряжениях [13] на возникших после погружения области D в область D_0 новых границах $S_{\sigma_2}^1$ и $S_{\sigma_1}^1$ необходимо сформулировать граничные условия. В данном случае возможно и удобно выбрать такие:

$$\begin{aligned}
 u_x(0, y) &= 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad y \in S_{\sigma_2}^1; \\
 u_y(x, 0) &= 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x \in S_{\sigma_1}^1.
 \end{aligned}$$

Для последующей конечно-элементной реализации требуется дискретизация канонической области.

Особенность метода геометрического погружения состоит в том, что точность получаемого решения можно улучшать как за счет повышения степени пространственной дискретизации, так и увеличением числа итераций. Авторами была выполнена серия вычислительных экспериментов на последовательности сгущающихся сеток и уменьшающейся величины β — критерия прекращения итераций. Установлено, что в решаемой задаче достаточно использовать сетки из 361 элемента с 400 узлами (Рис. 7) и $\beta = 0,001$; при этом дальнейшее сгущение сетки и уменьшение β к существенному изменению численного решения не приводят.

Таким образом, вектор-столбец $\{\Phi\}$ содержал 1752 узловых неизвестных, из которых 76 были известны из граничных условий (нулевые значения касательных напряжений в граничных узлах сетки), вектор-столбец $\{\lambda\}$ включал 152 неизвестных множителя Лагранжа, соответствующих наложенным на узловые переменные ограничениям (которых было 152).

Алгоритм решения задачи реализован в виде программы в пакете MATLAB. Для сравнения задача также была решена точно (аналитически [21]), и численно (МКЭ в перемещениях в рамках программного комплекса ANSYS). В ANSYS использовался элемент PLANE 42, сетка формировалась со сгущением к вырезу, при этом ее густота обеспечивала равенство числа узловых неизвестных с фигурировавшим в авторском подходе.

Результаты представлены на рисунках 8–10. Распределения напряжений по контуру выреза в случае декартовой системы координат, найденные с помощью программного комплекса ANSYS, существенно отличаются от решения, полученного МГП (Рис. 8).

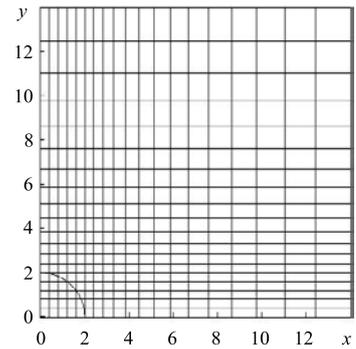


Рис. 7. Конечно-элементная дискретизация канонической области

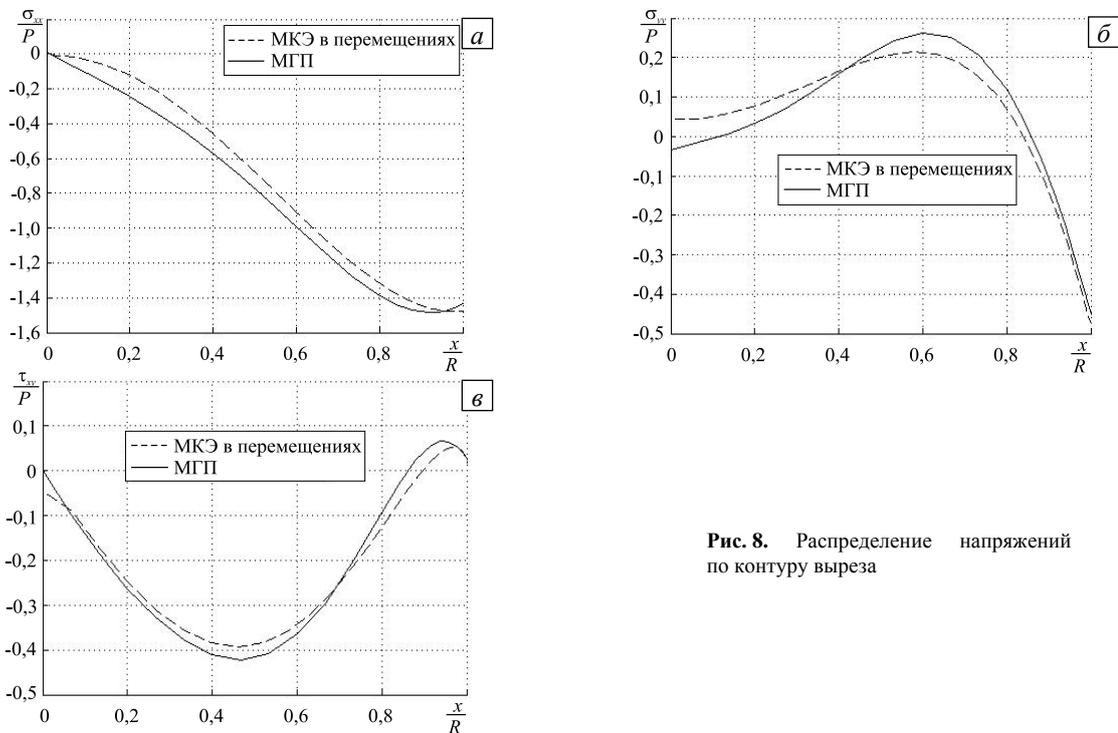


Рис. 8. Распределение напряжений по контуру выреза

Произведем поворот тензора напряжений для вычисления компонент в полярной системе координат и сравним с точным решением задачи. Из рисунка 9 видно, что распределение компонент тензора напряжений, соответствующих МГП, ближе к аналитическому решению задачи на криволинейной границе области по сравнению с МКЭ в перемещениях. Этим подтверждается одно из преимуществ МГП — более точное определение напряженного состояния тела на границах сложной формы.

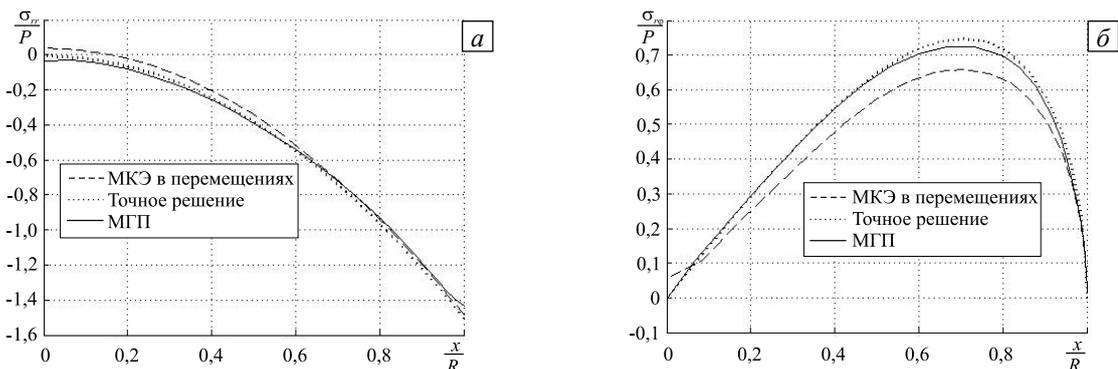


Рис. 9. Распределение напряжений по контуру выреза в полярной системе координат

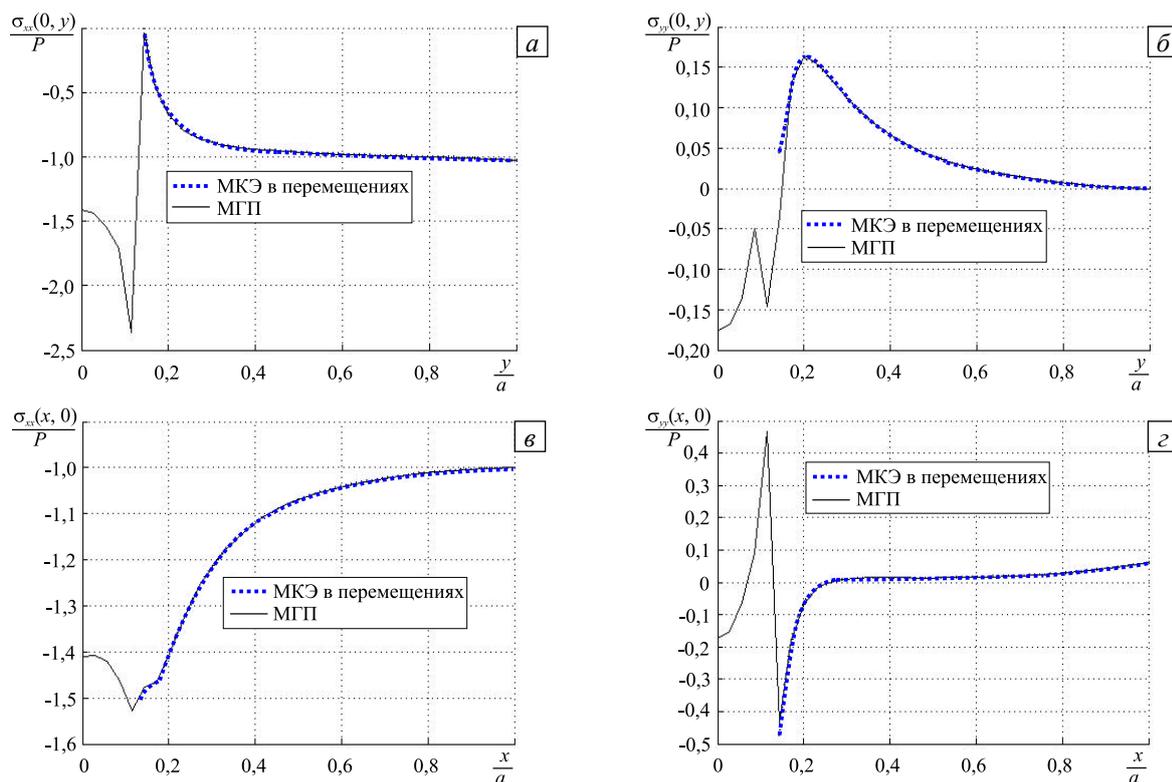


Рис. 10. Распределение напряжений на границах симметрии: $x=0$ (а), (б); $y=0$ (в), (г)

В точках области, удаленных от места расположения концентратора, распределения компонент тензора напряжений, найденные обоими методами практически не отличаются (Рис. 10). Следует отметить, что решение задачи при использовании МГП получается во всей канонической области (левые части кривых при значениях координат, меньших R).

На каждой итерации системы линейных алгебраических уравнений (13) решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Портрет матрицы коэффициентов СЛАУ представлен на рисунке 11. Матрица коэффициентов — преимущественно ленточная; частичное нарушение ленточного характера связано с использованием метода множителей Лагранжа. В обсуждаемом случае число ненулевых элементов в матрице равнялось 54259. Относительная погрешность решения СЛАУ составила $1,1594 \cdot 10^{-14}$ (по векторной норме Чебышева).

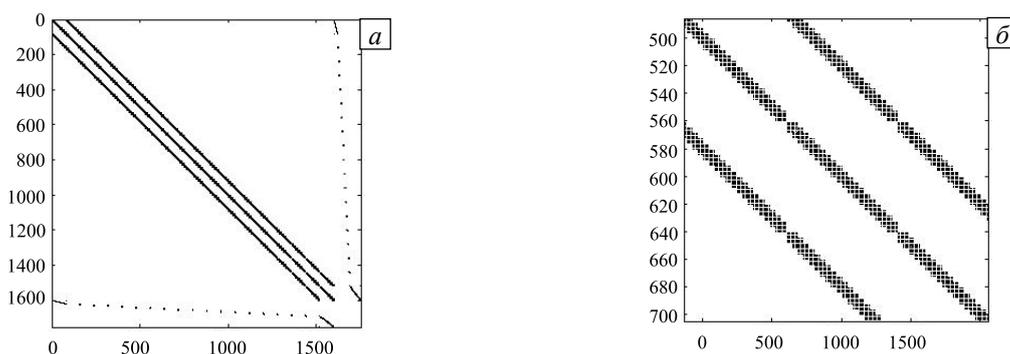


Рис. 11. Общий портрет матрицы коэффициентов (а) и ее фрагмент в увеличенном масштабе (б)

В качестве второго примера рассмотрим решение задачи теории упругости для несжимаемого материала. Известно, что в общем случае получение решения задачи теории упругости при коэффициенте Пуассона, равном или близком к 0,5, с помощью МКЭ, основанного на вариационном принципе Лагранжа, представляет собой большую проблему. Применение МГП с использованием МКЭ в напряжениях с этой точки зрения является привлекательным и эффективным.

Для наглядности решим задачу определения напряжений в длинном бруске, находящемся в плоскодеформированном состоянии. Брус имеет круглый вырез и испытывает сжатие постоянной нагрузкой. Расчетная схема аналогична схеме, рассмотренной выше (Рис. 6); размеры сечения бруса примем равными $2a \times 2a$, радиус выреза — $R = a/2$.

Данная задача также решена двумя методами: традиционным МКЭ в перемещениях и МГП на основе вариационного принципа Кастильяно. Проведена серия расчетов при коэффициенте Пуассона ν , изменяющемся от 0,33 до 0,5; установленные результаты показывают, что решение МКЭ в перемещениях неустойчиво при значениях ν , близких к 0,5, а МГП на основе МКЭ в напряжениях позволяет успешно получить решение задачи (Рис. 12). На рисунке 13 представлены результаты решения задачи для несжимаемого материала ($\nu = 0,5$), вычисленные методом геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно.

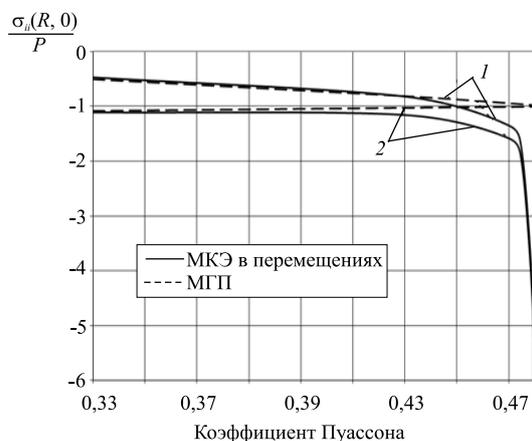


Рис. 12. Изменение напряжения σ_{xx} (кривая 1) и σ_{yy} (2) в точке $(R, 0)$ в зависимости от значения коэффициента Пуассона

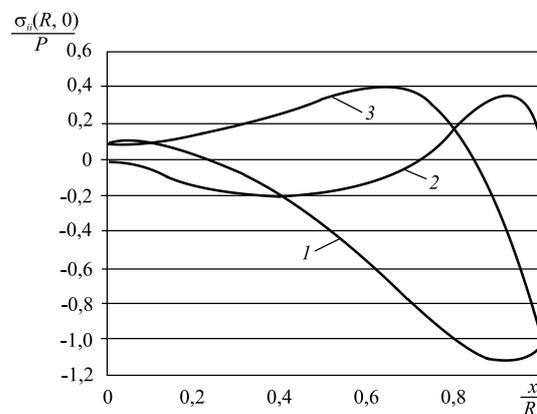


Рис. 13. Распределение напряжений по контуру выреза: σ_{xx} (кривая 1), τ_{xy} (2), σ_{yy} (3)

4. Выводы

В работе на плоских задачах теории упругости, в том числе задачах для несжимаемых упругих материалов, продемонстрировано практическое приложение метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его конечно-элементной реализации в напряжениях. Получено достаточно хорошее соответствие численных результатов определения полей напряжений с данными аналитического решения и численного решения традиционным МКЭ в перемещениях. Показана практическая возможность эффективного применения прямоугольных конечных элементов в напряжениях при решении плоских задач в областях с криволинейными границами.

Литература

1. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1024 с.
2. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов: Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
4. Girija Vallabhan C.V., Muluneh Azene. A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1982. – Vol. 18, no. 2. – P. 291-309. DOI
5. Sarigul N., Gallagher R.H. Assumed stress function finite element method: Two-dimensional elasticity // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1989. – Vol. 28, no. 7. – P. 1577-1598. DOI
6. Тюкалов Ю.Я. Решение задач строительной механики методом конечных элементов в напряжениях на основе функционала дополнительной энергии и принципа возможных перемещений / Дисс... докт. техн. наук: 05.23.17. – Киров, ВятГУ, 2006. – 314 с.
7. Watwood V.B. Jr., Hartz B.J. An equilibrium stress field model for finite element solutions of two-dimensional elastostatic problems // Int. J. Solids Struct. – 1968. – Vol. 4, no. 9. – P. 857-873. DOI
8. Fraeijns de Veubeke B. Displacement and equilibrium models in the finite element method // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2001. – Vol. 52, no. 3. – P. 287-342. DOI
9. Pin Tong, Pian Theodore H.H. A variational principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution // Int. J. Solids Struct. – 1969. – Vol. 5, no. 5. – P. 463-472. DOI
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
11. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – Т. 4, № 2. – Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР. – С. 109-115.
12. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. – Екатеринбург: Уро РАН, 1999. – 298 с.
13. Деревянкина П.О., Кузнецова Ю.С., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Теоретические положения метода геометрического погружения в напряжениях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 317-330. DOI
14. Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Применение метода геометрического погружения для численного расчета пространственных конструкций // Расчеты на прочность. – 1990. – № 31. – С. 127-134.

15. Шардаков И.Н. Численная реализация дифференциальной постановки метода геометрического погружения для двумерных задач теории упругости // Модели и методы исследования упругого и неупругого поведения материалов и конструкций. – Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1987. – С. 7-11.
16. Булавин П.В., Шардаков И.Н. Гранично-элементный подход к решению трехмерных задач теории упругости методом геометрического погружения // ПММ. – 1995. – Т. 59, № 2. – С. 252-258.
17. Матвеев В.П., Осипанов А.А. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения применительно к плоской задаче теории упругости в напряжениях // Модели и методы исследования упругого и неупругого поведения материалов и конструкций. – Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1987. – С. 11-16.
18. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
19. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
20. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
21. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука 1966. – 708 с.

References

1. Bate K.Yu. *Metody konechnykh elementov* [Finite element methods]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 1024 p.
2. Berdichevskii V.L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoj sredy* [Variational principles of continuum mechanics]. Moscow: Nauka, 1983. 448 p.
3. Gallager R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [Finite element method. Fundamentals]. Moscow: Mir, 1984. 428 p.
4. Girija Vallabhan C.V., Mulneh Azene. A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 291-309. DOI
5. Sarigul N., Gallagher R.H. Assumed stress function finite element method: Two-dimensional elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1989, vol. 28, no. 7, pp. 1577-1598. DOI
6. Tyukalov Yu.Ya. *Reshenie zadach stroitel'noy mekhaniki metodom konechnykh elementov v napryazheniyakh na osnove funktsionala dopolnitel'noy energii i printsipa vozmozhnykh peremeshchenij* [Solution of problems in structural mechanics by finite element method in terms of stresses on the basis of a complementary energy functional and a principle of virtual displacements]. Dissertation, Kirov, Vyatka State University, 2006. 314 p.
7. Watwood V.B. Jr., Hartz B.J. An equilibrium stress field model for finite element solutions of two-dimensional elastostatic problems. *Int. J. Solids Struct.*, 1968, vol. 4, no. 9, pp. 857-873. DOI
8. Fraeijns de Veubeke B. Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2001, vol. 52, no. 3, pp. 287-342. DOI
9. Pin Tong, Pian Theodore H.H. A variational principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution. *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 5, no. 5, pp. 463-472. DOI
10. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow: Nauka, 1980. 536 p.
11. Kononov A.N. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoj sredy – Numerical Methods of Continuum Mechanics*, 1973, vol. 4, no. 2. Novosibirsk: Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB AS of the USSR. Pp. 109-115.
12. Shardakov I.N., Trufanov N.A., Matveenko V.P. *Metod geometricheskogo pogruzheniya v teorii uprugosti* [Method of geometrical immersion in the theory of elasticity]. Ekaterinburg: UB RAS, 1999. 298 p.
13. Derevyankina P.O., Kuznetsova Yu.S., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Theoretical principles of a stress-based geometrical immersion method. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 317-330. DOI
14. Trufanov N.A., Shardakov I.N. Primenenie metoda geometricheskogo pogruzheniya dlya chislennogo rascheta prostranstvennykh konstruktсий [Application of the geometrical immersion method to numerical calculation of spatial structures]. *Raschety na prochnost' – Strength calculations*, 1990, no. 31, pp. 127-134.
15. Shardakov I.N. *Models and methods of investigation of elastic and inelastic behavior of materials and structures*. Sverdlovsk: Urals Scientific Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1987, pp. 7-11.
16. Bulavin P.V., Shardakov I.N. Granichno-elementnyj podkhod k resheniyu trekhmernykh zadach teorii uprugosti metodom geometricheskogo pogruzheniya [Boundary-element approach to the solution of three-dimensional elasticity problems by the geometrical immersion method]. *J. Appl. Math. Mech.*, 1995, vol. 59, no. 2, pp. 252-258.
17. Matveenko V.P., Osipanov A.A. *Models and methods of investigation of elastic and inelastic behavior of materials and structures*. Sverdlovsk: Urals Scientific Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1987, pp. 11-16.
18. Norrie D., de Vries J. *Introduction to finite element analysis*. New York: Academic Press, 1978.
19. Lurie A.I. *Theory of elasticity*. Berlin: Springer, 2005. 1050 p.
20. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1989, 432 p.
21. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1966. 708 p.

Поступила в редакцию 11.11.2014; опубликована в электронном виде 30.12.2014

Сведения об авторах:

Кузнецова Юлия Сергеевна, асп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский проспект, д. 29; e-mail: Suhodolchik@mail.ru

Труфанов Николай Александрович, д-р, проф., зав.каф., ПНИПУ; e-mail: nat@pstu.ru