

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.39

УДК 539.3

## НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В.Ю. Андрюкова

*Отдел математики Коми НЦ УрО РАН, Сыктывкар, Российская Федерация*

Обсуждаются задачи устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения. Данные проблемы относятся к контактным задачам теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Подобные задачи являются конструктивно-нелинейными, так как при их математической формализации используются неравенства и недифференцируемые функции. При нагрузке, превышающей критическую величину, упругая система может перейти в смежное состояние равновесия. При этом, как правило, малые возмущения приводят к большим изменениям состояния системы, вплоть до потери несущей способности. Таким образом, в отличие от классического случая, в рассматриваемых в работе задачах необходимо находить и исследовать точки бифуркации негладких уравнений или решений задач нелинейного программирования. В статье при граничных условиях свободного края аналитически решена задача устойчивости стержня, прогиб которого с одного края ограничен жестким препятствием. Также представлено аналитическое решение проблемы устойчивости колец, находящихся под действием центральных сил или внешнего нормального давления, подкрепленных нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий. Численно решена осесимметричная задача устойчивости торообразной оболочки с упругим наполнителем внутри, нагруженной внешним нормальным давлением, в предположении, что оболочка может отходить от наполнителя.

*Ключевые слова:* устойчивость, критическая сила, стержень, кольцо, торообразная оболочка, односторонние ограничения

## SOME STRUCTURALLY NONLINEAR PROBLEMS OF STABILITY OF ELASTIC SYSTEMS UNDER ONE-SIDE-DISPLACEMENT CONSTRAINTS

V.Yu. Andryukova

*Department of Mathematics Komi SC UB RAS, Syktivkar, Russian Federation*

The problems of stability of elastic systems with unilateral displacement constraints are considered. These problems belong to the contact problems of the theory of elasticity with an unknown region of active interaction of structural elements. Since the mathematical formalization of such problems involves inequalities and non-differentiable functions, they are structurally nonlinear. If the load exceeds a critical value, the elastic system can go to the adjoining state of equilibrium. As a rule, small disturbances lead to large changes in the system state, including the loss of bearing capacity. Unlike the classical case, we need to find and explore the bifurcation points of nonsmooth equations or nonlinear programming problems. The problem of stability of a rod, whose deflection is limited on one side by a rigid barrier, with the boundary conditions of free edge is solved analytically. An analytical solution is also obtained for the problem of stability of rings under the action of central forces or external normal pressure and backed by threads that cannot withstand compressive forces. The axisymmetric problem of stability of a toroidal shell filled with elastic filler loaded by external normal pressure under the assumption that the shell may depart from the filler is solved numerically.

*Key words:* stability, critical force, rod, ring, toroidal shell, unilateral constraints

### 1. Введение

Концепция упругой бифуркационной устойчивости представлена в монографии В.В. Новожилова [1]. Интересные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения решены В.И. Феодосьевым [2]. Так, им рассмотрены задачи: плоский изгиб упругого стержня с шарнирно закрепленными концами, помещенного в жесткую трубу, и в первоначальном недеформированном состоянии находящегося на одинаковом расстоянии от ее стенок; устойчивость тонкостенного кольца, сжимаемого накинутой на него абсолютно гибкой нерастяжимой нитью, натягиваемой силой; устойчивость кольца, вставленного в жесткую обойму. Статический и динамический подходы к отысканию критических нагрузок можно найти в монографиях [3, 4]. Следует отметить работы, в которых обсуждается движение системы после потери устойчивости (см., например, известную задачу Е.Л. Николаи об устойчивости продольно сжимаемого стержня под действием следящей нагрузки), тогда для исследования необходимо применять динамический подход [5]. Анализ упругих систем на устойчивость при наличии односторонних (неудерживающих) связей сводится к определению параметров, при которых соответствующие задачи оптимизации имеют неединственное решение. Это в свою очередь приводит к необходимости решать невыпуклые задачи математического программирования с применением методов глобальной оптимизации. Общая теория, описывающая проблемы устойчивости упругих систем в присутствии односторонних связей, и методы решения изложены в [6].

Для многих систем, ограниченных односторонними связями, решения задач сводятся к идентификации условной положительности квадратичных форм на конусах — замкнутых выпуклых множествах, имеющих форму конуса с вершиной в начале координат. Алгебраический критерий условной положительности

в самом важном случае, то есть когда конус есть неотрицательный ортант пространства  $\mathbb{R}^n$ , предложен в [7, 8]. Интерес представляют работы П. Панагиотопулоса [9] и Е.И. Михайловского [10] о применении неравенств в механике. Порядок определения верхней критической нагрузки в системах с односторонними связями изложен в книге А.В. Перельмутера и В.И. Сливкера [11]. Численный подход к изучению нелинейной устойчивости оболочек, односторонне взаимодействующих с упругой средой, описан в [12], и здесь, по-видимому, впервые рассмотрены задачи колебаний и динамической устойчивости упругих элементов конструкций при односторонних ограничениях на перемещения.

В предлагаемой вниманию статье аналитически решены новые задачи вариационного исчисления, такие как: задача устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, находящегося в упругой среде, прогибы которого с одной стороны ограничены жестким препятствием; задача устойчивости колец, подкрепленных нитями, при действии центральных сил или внешнего нормального давления. Также численно исследована осесимметричная задача устойчивости торообразной оболочки вращения с упругим наполнителем, нагруженной внешним нормальным давлением; при этом для вычисления работы внешних сил использована точная термодинамическая формула; проанализировано влияние на величину критической силы нелинейных слагаемых, обусловленных учетом одностороннего контакта с упругим наполнителем.

Пусть  $w$  — функция, характеризующая состояние упругой системы,  $\lambda$  — некоторый параметр. Предполагая, что полная потенциальная энергия системы есть функционал вида

$$\Phi(\lambda, w) = F(w) - \lambda G(w),$$

где  $F(w)$  — упругая энергия,  $G(w)$  — работа внешних сил, найдем параметр  $\lambda$  — значение критической нагрузки, при котором вариационная задача

$$\Phi(\lambda, w) \rightarrow \min_w \quad (1)$$

имеет неединственное решение.

Полагая  $\lambda$  параметром, при котором происходит бифуркация решения задачи (1) (потеря устойчивости системы), получаем задачу на собственные значения некоторых линейных операторов

$$Aw = \lambda Qw. \quad (2)$$

Здесь  $A$  и  $Q$  — линейные самосопряженные ограниченные операторы, определенные в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Решая задачу (2) на собственные значения, приходим к экстремальной проблеме

$$\begin{cases} f(w) = (Aw, w)/2 \rightarrow \min_w, \\ g(w) = (Qw, w)/2 = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Наличие односторонних ограничений на перемещения приводит к необходимости учета дополнительного ограничения:  $w \in K$ , где множество  $K \subset H$  — выпуклый замкнутый конус в  $H$ . При конечномерной аппроксимации (3) операторы  $A$  и  $Q$  будут симметричными и положительно определенными. Конус  $K$  задается в виде конечного числа линейных неравенств. Таким образом, имеем задачу нелинейного программирования

$$\begin{cases} f(w) = (Aw, w)/2 \rightarrow \min_w, \\ g(w) = (Qw, w)/2 = 1, \\ (a_j, w) \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Задача (4) является задачей невыпуклого программирования, некоторые методы ее решения предложены в [13].

## 2. Устойчивость стержня при односторонних ограничениях на перемещения с учетом различных граничных условий

Пусть стержень длиной  $l$ , нагруженный продольной силой  $P$ , находится в упругой среде с жесткостью  $C$ . Обозначим через  $D$  жесткость стержня при изгибе. Расчет на устойчивость сводится к нахождению минимальной силы  $P = P_{\min}$ , при которой вариационная задача [6]

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (Dw''^2 - Pw' + Cw^2) dx \rightarrow \min \quad (5)$$

имеет нетривиальное решение. В данной работе предполагается, что прогиб  $w(x)$  стержня ограничен жестким препятствием при  $x \in [0, l_1]$  или  $x \in (l_1, l]$  так, что

$$w(x) \geq 0, \quad x \in [0, l]. \quad (6)$$

Ясно, что нетривиальное решение задачи (5) при ограничениях (6) можно нормировать, потребовав выполнения равенства

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = 1. \quad (7)$$

Тогда задача (5), (6) сводится к минимизации функционала

$$\tilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (Dw'^2 + Cw^2) dx \rightarrow \min_{w \in H} \quad (8)$$

при условиях (6) и (7). Экстремальная задача рассматривается в пространстве  $H = W_2^1[0, l]$  — пространстве функций Л.С. Соболева, имеющих обобщенные суммируемые с квадратом первую и вторую производные (первая производная абсолютно непрерывна) и удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

Решение задачи минимизации функционала (8) при ограничениях (6), (7) существует, ибо множество функций  $w \in H$ , удовлетворяющих условию (6), является слабым компактом [13], а функционал  $\tilde{J}(w)$  является выпуклым, непрерывный выпуклый функционал достигает своего минимума на любом слабо компактном множестве. Следуя [13], можно показать, что при граничных условиях жесткой заделки или шарнирного опирания  $w(x) > 0$  для всех  $x \in [0, l_1]$ , где  $0 < l_1 \leq l$ ,  $w(0) = w(l_1) = 0$  и на этом интервале  $w(x)$  является решением уравнения Эйлера–Лагранжа задачи (7)–(8):

$$w^{IV} + \omega w + \rho^2 w'' = 0, \quad (9)$$

где  $\omega = C/D$ ,  $\rho^2 = \lambda/D$ ,  $\lambda$  — множитель Лагранжа при ограничении изопериметрического типа (7), который носит смысл критической нагрузки. В этом случае уравнение (9) будет совпадать с уравнением равновесия сжимаемого продольной силой стержня, находящегося в упругой среде. Заметим, что уравнение (9) аналогично уравнению равновесия цилиндрической оболочки, помещенной в жесткую обойму и сжимаемой продольной силой [13], при осесимметричной постановке задачи.

В работе [13] ставится задача определения наибольшей величины участка  $l_1$  и наименьшей осевой сжимающей силы, при которых стержень может потерять устойчивость при условии, что он расположен в упругой среде ( $x \in (l_1, l]$ ) и его прогиб ограничен жестким препятствием на участке  $x \in [0, l_1]$ ; рассматриваются граничные условия жесткой заделки или шарнирного опирания концов стержня. Показано, что для существования нетривиального решения необходимо выполнение неравенства для значения критического параметра

$$\rho^2 \geq 2\sqrt{\omega}. \quad (10)$$

При этом общее решение уравнения (9) имеет вид:  $w = c_1 \sin(m_1 \theta) + c_2 \cos(m_1 \theta) + c_3 \sin(m_2 \theta) + c_4 \cos(m_2 \theta)$ ,

где  $m_1 = \sqrt{\rho^2/2 + \sqrt{\rho^4/4 - \omega}}$  и  $m_2 = \sqrt{\rho^2/2 - \sqrt{\rho^4/4 - \omega}}$ .

В [13] получены следующие результаты (далее  $H(x)$  — функция Хевисайда):

– при граничных условиях жесткой заделки  $w(0) = w(l) = 0$ ,  $w'(0) = w'(l) = 0$ , тогда  $\rho^2 = 10\sqrt{\omega}/3$ ,  $l_1 = \pi\sqrt{3}/\sqrt[4]{\omega}$ . Если  $l_1 < l$ , то функция прогиба вычисляется по формуле  $w(x) = c \cdot \sin^3(mx)H(l_1 - x)$ , где  $m = \sqrt[4]{\omega}/\sqrt{3}$ ;

– при граничных условиях шарнирного опирания  $w(0) = w(l) = 0$ ,  $w''(0) = w''(l) = 0$  критический параметр  $\rho^2 = 5\sqrt{\omega}/2$ ,  $l_1 = \pi\sqrt{2}/\sqrt[4]{\omega}$ ; функция прогиба при  $l_1 < l$  имеет вид  $w(x) = c \cdot (2\sin(\pi x/l_1) + \sin(2\pi x/l_1))H(l_1 - x)$ ,  $c > 0$ .

Подробно рассмотрим ту же, что и в [13], задачу устойчивости стержня в условиях одностороннего ограничения на перемещения, но при комбинации граничных условий. Пусть конец стержня  $x=0$  жестко заделан, а конец  $x=l$  свободен:  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$ ,  $w''(l) = 0$ ,  $Dw'''(l) + Pw'(l) = 0$ . При заданных граничных условиях неравенство (10) заменяется на противоположное:  $\rho^2 < 2\sqrt{\omega}$ . Общее решение уравнения (9) будет иметь вид:  $w(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_3 e^{-\alpha x} \sin(\beta x) + c_4 e^{-\alpha x} \cos(\beta x)$ , где  $\alpha = \sqrt{2\sqrt{\omega} - \rho^2}/2$ ,  $\beta = \sqrt{2\sqrt{\omega} + \rho^2}/2$ .

Предположим, что имеется участок полного прилегания изогнутого стержня к стенке, то есть  $w(x) = 0$  при  $x \in [0, l_1]$  и  $w(x) > 0$  при  $x \in (l_1, l]$ . При  $x = l_1$  выполняются равенства  $w = 0$ ,  $w' = 0$ ,  $w'' = 0$ , при  $x = l$  —  $Dw'''(l) + Pw'(l) = 0$ ,  $w'' = 0$ . Таким образом, четыре произвольных постоянных должны удовлетворять системе из пяти однородных линейных уравнений, а нетривиальное решение этой системы — любой подсистеме из четырех уравнений. Таким образом, имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} w(l_1) = 0, \\ w'(l_1) = 0, \\ w''(l) = 0, \\ Dw'''(l) + Pw'(l) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w(l_1) = 0, \\ w''(l_1) = 0, \\ w''(l) = 0, \\ Dw'''(l) + Pw'(l) = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения каждой из них необходимо, чтобы определители матриц коэффициентов при  $c_1, c_2, c_3, c_4$  равнялись нулю.

Введем обозначение  $\tilde{l} = l - l_1$ , тогда определители первой и второй систем выразятся как

$$\begin{aligned} \Delta_1(\omega, \tilde{l}, \rho) &= \cos^2(\beta\tilde{l}) \left( \omega\rho^2 - \sqrt{\omega}\rho^4 + 2\sqrt{\omega^3} \right) + (e^{\alpha\tilde{l}} + e^{-\alpha\tilde{l}}) \left( \sqrt{\omega^3} - \omega\rho^2/2 - \sqrt{\omega}\rho^4/2 \right) / 2 + \sqrt{\omega^3} - \omega\rho^2/2 - \sqrt{\omega}\rho^4/2, \\ \Delta_2(\omega, \tilde{l}, \rho) &= \beta \sin(\beta\tilde{l}) \left( \omega\rho^2 - \sqrt{\omega}\rho^4 + 2\sqrt{\omega^3} \right) / 2 + \alpha (e^{\alpha\tilde{l}} - e^{-\alpha\tilde{l}}) \left( \omega\rho^2 + \sqrt{\omega}\rho^4 - 2\sqrt{\omega^3} \right) / 4, \end{aligned}$$

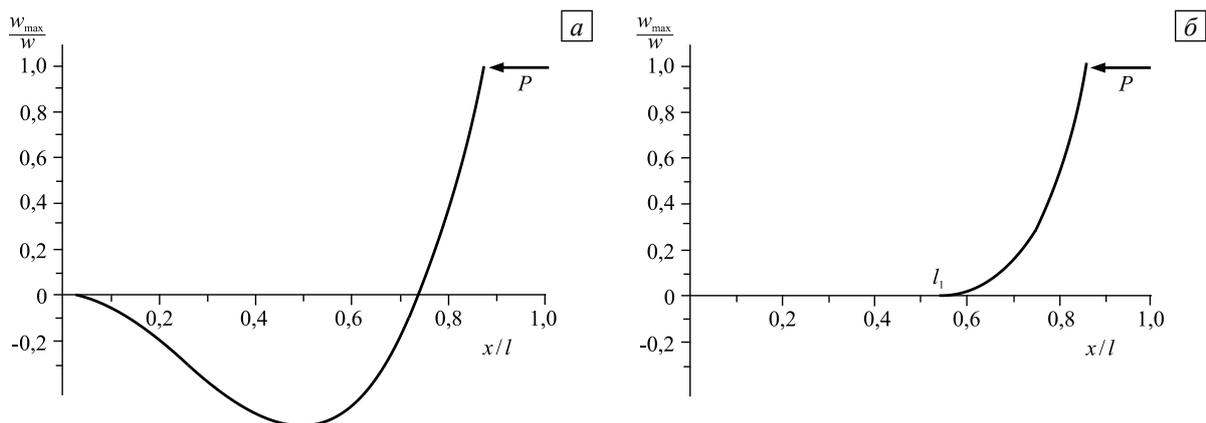
то есть для нахождения неизвестных  $\tilde{l}$  и  $\rho^2$  имеем систему двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_1(\omega, \tilde{l}, \rho) = 0, \\ \Delta_2(\omega, \tilde{l}, \rho) = 0. \end{cases}$$

Данная система решена численно с помощью метода Ньютона. Полученные значения критической силы  $\rho^2$  и длины  $\tilde{l}$  участка, на котором прогиб положителен при наличии односторонних ограничений на перемещения, представлены в таблице 1 для нескольких значений жесткости среды  $\omega$ . Для сравнения в последней строке приведены значения критической силы  $P = \rho_*^2$  для стержня, находящегося в упругой среде, при отсутствии односторонних ограничений. Ниже показаны графики форм равновесия стержня, находящегося в упругой среде с  $\omega = 550$ , после потери устойчивости при наличии и отсутствии ограничений.

Таблица 1. Значения критической силы  $\rho^2$  в зависимости от жесткости среды  $\omega$

$\omega$	100	200	350	450	550	800
$\tilde{l}$	0,745	0,627	0,545	0,512	0,487	0,443
$\rho^2$	12,6	17,8	23,5	26,7	29,5	35,6
$\rho_*^2$	11,9	15,6	19,5	21,8	23,8	28,5



Форма равновесия стержня в упругой среде без ограничений ( $\rho^2=23,8$ ) (а) и при наличии односторонних ограничений на перемещения ( $\rho^2=29,5$ ) (б)

Решение задачи (6)–(8) с граничными условиями свободного края при  $x=l$  представляется формулой

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \leq l_1, & l_1 = l - \tilde{l}, \\ \Theta(x-l_1)H(x-l_1), & x \in [l_1, l], \end{cases}$$

где  $\Theta(x) = c_1 e^{\alpha x} (\sin \beta x - (\beta/\alpha) \cos \beta x) + c_2 e^{-\alpha x} (\sin \beta x + (\beta/\alpha) \cos \beta x)$ .

### 3. Устойчивость колец с односторонним подкреплением

#### 3.1. Случай действия нормального давления

Рассмотрим задачу устойчивости упругих колец, подкреплённых упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий. Пусть один конец нити прикреплен к неподвижному центру кольца радиусом  $R$ , другой — к некоторой точке кольца. Предположим, что нить является нерастяжимой, то есть в результате деформации расстояние между центром и точкой прикрепления кольца не может увеличиваться. Обозначим через  $\theta$  — центральный угол,  $w(\theta)$  — радиальное перемещение точек кольца,  $B$  — жесткость на изгиб в плоскости кольца. Пусть нити расположены так часто, что их можно считать непрерывно распределёнными в плоскости кольца. Тогда задача на устойчивость сводится к отысканию таких значений радиальной сжимающей силы  $P$ , при которых вариационная проблема [6]

$$J(w) = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\theta - \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - bw^2) d\theta \rightarrow \min_w \quad (11)$$

имеет нетривиальное решение при граничных условиях периодичности и ограничениях вида

$$w(\theta) \leq 0. \quad (12)$$

Первый интеграл в (11) представляет собой упругую энергию, второй — работу сил нормального давления. Для случая нормального давления, согласно [6], следует принять  $b=1$ . Запишем уравнение Эйлера для функционала (11):

$$w^{IV} + (2+k^2)w'' + (1+k^2)w = 0,$$

где  $k^2 = PR^3/B$ . Соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^4 + (2+k^2)\lambda^2 + (1+k^2) = 0$  имеет решение  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{1+k^2}$ , и функция прогиба представима в виде

$$w = A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta + A_3 \sin \alpha \theta + A_4 \cos \alpha \theta, \quad (13)$$

где  $\alpha = \sqrt{1+k^2}$ .

Зафиксируем некоторый угол  $\beta > 0$ . Как и в задаче со стержнем, будем считать, что  $w(\theta) < 0$ , если  $\theta \in (0, \beta)$ , и  $w(\theta) \equiv 0$ , если  $\theta \in (\beta, 2\pi)$ . По условию непрерывности и гладкости решения первая производная  $w'(\theta)$  должна быть непрерывной при  $\theta \in (0, 2\pi)$ , тогда для функции  $w$  граничные условия должны быть следующими:  $w(0) = w(\beta) = 0$ ,  $w'(0) = w'(\beta) = 0$ . Функция (13) при этих граничных условиях и после упрощения дает систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_3 (\sin(\alpha\beta) - \alpha \sin \beta) + A_4 (\cos(\alpha\beta) - \cos \beta) = 0, \\ A_3 \alpha (\cos(\alpha\beta) - \cos \beta) + A_4 (\sin \beta - \alpha \sin(\alpha\beta)) = 0, \end{cases}$$

которая будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель равняется нулю, то есть

$$d(\alpha) = -2\alpha \cos(\alpha\beta) \cos \beta + 2\alpha - \sin(\alpha\beta) \sin \beta - \alpha^2 \sin(\alpha\beta) \sin \beta = 0. \tag{14}$$

Решая уравнение (14) относительно неизвестной  $\alpha$ , получим функцию  $\alpha = \alpha(\beta)$ . При заданном  $\beta$  уравнение имеет бесконечное число корней. Очевидно, что  $\alpha = 1$  является корнем уравнения при любом  $\beta$ . Заметим, что  $\alpha = 1$  соответствует сила  $P$ , равная нулю. Далее по формуле (13) находим форму прогиба.

Несложно убедиться, что формула (13) при  $\alpha = 1$  дает перемещение кольца как жесткого целого. Следовательно, надо отыскать минимальный корень уравнения (13), удовлетворяющий условию  $\alpha > 1$ . Также необходимо выполнить ограничения на знак функции (12). Значения критического параметра  $\alpha$  в зависимости от значений угла  $\beta$  приведены в таблице 2. Видно, что чем больше угол  $\beta$ , тем меньше  $k^2$ , а значит, и сила  $P$ .

Таблица 2. Значения критического параметра  $\alpha$  в зависимости от угла  $\beta$

$\beta$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$
$\alpha$	4,9801	4,2915	3,2136	3,0000	2,4841
$k^2$	23,8014	17,4169	9,3272	8,0000	5,1708

Численные эксперименты показали, что при  $\beta > \pi$  график функции  $w$  меняет знак в интервале  $(0, \beta)$ , то есть ограничения (12) не выполняются. Минимальной критической силе соответствует значение параметра  $\alpha = 3$  при  $\beta = \pi$ , и функция прогиба определяется формулой:  $w = \sin 3\theta + 0,00311 \cos \theta - 3 \sin \theta - 0,00311 \cos 3\theta$ .

### 3.2. Случай действия центральных сил

Рассмотрим устойчивость кольца, нагруженного радиальными усилиями. Подобные условия нагружения можно создать при помощи множества жестких нитей, собранных в центре и натягиваемых грузом. В результате изгиба происходит перераспределение действующих на кольцо усилий [2]. При данной нагрузке в функционале (11) во втором интеграле, описывающем работу внешних сил, следует положить  $b = 2$  и решать уравнение Эйлера вида:  $w^{IV} + (2 + k^2)w'' + (1 + 2k^2)w = 0$ . Последнее уравнение совпадает с уравнением равновесия, приведенным в [2]. Соответствующее характеристическое уравнение имеет мнимые корни:  $\lambda_{1,2} = \pm i\alpha_1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i\alpha_2$ , где  $\alpha_1 = \sqrt{(2 + k^2 - \sqrt{k^4 - 4k^2})/2}$  и  $\alpha_2 = \sqrt{(2 + k^2 + \sqrt{k^4 - 4k^2})/2}$ . Отсюда следует общее решение

$$w = A_1 \sin(\alpha_1 \theta) + A_2 \cos(\alpha_1 \theta) + A_3 \sin(\alpha_2 \theta) + A_4 \cos(\alpha_2 \theta).$$

Учитывая граничные условия  $w(0) = w(\beta) = 0$ ,  $w'(0) = w'(\beta) = 0$ , запишем систему уравнений

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_3 A_3 = 0, \\ A_1 \sin(\alpha_1 \beta) + A_2 \cos(\alpha_1 \beta) + A_3 \sin(\alpha_2 \beta) + A_4 \cos(\alpha_2 \beta) = 0, \\ A_1 \alpha_1 \cos(\alpha_1 \beta) - A_2 \alpha_1 \sin(\alpha_1 \beta) + A_3 \alpha_2 \cos(\alpha_2 \beta) - A_4 \alpha_2 \sin(\alpha_2 \beta) = 0, \end{cases}$$

после упрощения которой получим:

$$\begin{cases} A_1 (\sin(\alpha_1\beta) - \alpha_1\alpha_2^{-1} \sin(\alpha_2\beta)) + A_2 (\cos(\alpha_1\beta) - \cos(\alpha_2\beta)) = 0, \\ A_1\alpha_1 (\cos(\alpha_1\beta) - \cos(\alpha_2\beta)) + A_2 (\alpha_2 \sin(\alpha_2\beta) - \alpha_1 \sin(\alpha_1\beta)) = 0. \end{cases}$$

Приравняв определитель системы

$$d = (\sin(\alpha_1\beta) - (\alpha_1/\alpha_2)\sin(\alpha_2\beta)) \cdot (\alpha_2 \sin(\alpha_2\beta) - \alpha_1 \sin(\alpha_1\beta)) - (\cos(\alpha_1\beta) - \cos(\alpha_2\beta))^2$$

к нулю, найдем критический параметр  $k^2$  в зависимости от угла  $\beta$ . Соответствующие результаты содержит таблица 3.

Таблица 3. Значения критического параметра  $k^2$  в зависимости от угла  $\beta$

$\beta$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4, 3$	$3\pi/4$	$\pi$
$k^2$	68,0850	21,4046	18,6036	18,5890	10,4650

Параметр  $\beta$  должен быть как можно больше, так как с его ростом значение критического параметра  $k^2$  убывает. Таким образом, нужно выбрать максимальное  $\beta$ , при котором прогиб  $w(\theta) \leq 0$ ,  $\theta \in (0, \beta)$ . В численных экспериментах получено, что  $\beta = \beta_{\max} = (3/4, 3)\pi$ , при котором  $k^2 = k_{\min}^2 = 18,6036$ . Заметим, что в случае действия центральных сил на неподкрепленное кольцо минимальное значение критического параметра составляет  $k^2 = k_{\min}^2 = 4,5$ .

#### 4. Устойчивость торообразной оболочки при одностороннем подкреплении

Рассмотрим задачу устойчивости тора, образованного вращением круга радиусом  $a$  вокруг не пересекающей его и лежащей с ним в одной плоскости прямой, отстоящей от центра круга на расстоянии  $R$ . Тор нагружен внешним нормальным давлением  $P$ . Обозначим:  $\theta$  — угол в плоскости круга радиусом  $a$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ );  $\lambda$  — угол в плоскости вращения круга вокруг прямой ( $0 \leq \lambda \leq \pi$ );  $w(\theta)$  и  $u(\theta)$  — нормальное и касательное перемещения точек поверхности тора. Введенные координаты связаны с декартовыми координатами точек торообразной поверхности до деформации уравнениями

$$\begin{aligned} x &= (R + a \cos \theta) \cos \lambda, \\ y &= (R + a \cos \theta) \sin \lambda, \\ z &= a \sin \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда криволинейные координаты примут вид:  $\varphi = R + a \cos \theta$ ,  $\psi = a \sin \theta$ . После деформации поверхности они преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= R + (a + w(\theta)) \cos \theta - u(\theta) \sin \theta, \\ \psi(\theta) &= (a + w(\theta)) \sin \theta - u(\theta) \cos \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть оболочка, срединную поверхность которой назовем  $S$ , в результате деформации приобрела форму  $\tilde{S}$ . Введем обозначения  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $\tilde{g}_{ij}$ ,  $\tilde{h}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — коэффициенты первой и второй квадратичных форм недеформированной и деформированной (помечены символом « $\sim$ ») поверхностей соответственно. Предположим, что деформация является осесимметричной.

Согласно [14] энергию деформации, связанную с переходом из состояния  $S$  в состояние  $\tilde{S}$ , можно вычислить по формуле

$$U = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) \right] R^2 \sin \theta d\theta - P\Delta V \rightarrow \min,$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — деформации;  $\kappa_1, \kappa_2$  — кривизны. Деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и кривизны  $\kappa_1, \kappa_2$  определяются как экстремальные значения отношений  $\left( \sum_{i,j=1}^2 (\tilde{g}_{ij} - g_{ij}) d\xi_i d\xi_j \right) / \left( \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} d\xi_i d\xi_j \right)$  и  $\left( \sum_{i,j=1}^2 (\tilde{h}_{ij} - h_{ij}) d\xi_i d\xi_j \right) / \left( \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} d\xi_i d\xi_j \right)$  соответственно.

Исследуем потерю устойчивости в осесимметричном случае, когда образующиеся выпучины имеют вид кольцевых складок в направлении координаты  $\lambda$  (перемещения не зависят от  $\lambda$ ). Используя формулы (15), (16) и определение первой и второй квадратичных форм поверхности, получим выражения для деформаций и кривизн [15] (ниже символом «'» обозначено дифференцирование по координатам):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varphi'^2 + \psi'^2 - a^2}{a^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varphi^2 - (R + a \cos \theta)^2}{(R + a \cos \theta)^2}, \\ \kappa_1 &= \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{a^2 \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} - \frac{1}{a}, \\ \kappa_2 &= \frac{\psi'\varphi - \cos \theta (R + a \cos \theta) \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\cos^2 \theta (R + a \cos \theta)^2 \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}. \end{aligned}$$

При действии внешнего нормального давления работа внешних сил, в соответствии с теоремой Эйлера–Бернулли, равняется  $A = P\Delta V$ , где  $\Delta V$  — изменение объема в результате деформации. При помощи известных формул связи объема тела с его поверхностью, задаваемой уравнениями  $x = x(\theta, \lambda)$ ,  $y = y(\theta, \lambda)$ ,  $z = z(\theta, \lambda)$ , найдем (с точностью до знака)

$$\tilde{V} = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\lambda & y'_\lambda & z'_\lambda \end{bmatrix} d\theta d\lambda.$$

В случае осесимметричной деформации определитель, стоящий под знаком интеграла, не зависит от  $\lambda$ . Подставляя выражения (15), (16), запишем

$$\tilde{V} = \frac{2\pi}{3} \int_0^{2\pi} \Phi(w, u, w', u') d\theta,$$

Здесь  $\Phi$  — указанный выше определитель.

Предположим, что внутри оболочки находится упругий наполнитель, который работает как простое винклеровское основание с жесткостью  $C$ . Тогда полная энергия деформации будет иметь вид:

$$J = J_1 + J_2 - PJ_3, \quad \text{где} \quad J_1 = 2\pi \int_0^{2\pi} \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) a(R + a \cos \theta) d\theta, \quad J_2 = \pi \int_0^{2\pi} Cw^2 a(R + a \cos \theta) d\theta, \quad J_3 = \Delta V.$$

В положении устойчивого равновесия она принимает минимальное значение. Таким образом, приходим к вариационной задаче  $J \rightarrow \min_{w,u}$ , где функции  $w$  и  $u$  удовлетворяют условиям периодичности.

Представим перемещения  $w(\theta)$  и  $u(\theta)$  в виде интерполяционных сплайнов [16]. Воспользуемся обозначениями  $w_i = w(\theta_i)$ ,  $u_i = u(\theta_i)$ ,  $i \in [0, \dots, n-1]$ ,  $\theta_i = 2\pi i/n$  (здесь  $n$  — число точек разбиения интервала), а также введем вектор  $\mathbf{z} \in E_n$ , где  $z_1 = w_0$ ,  $z_2 = w_1$ , ...,  $z_n = w_{n-1}$ ,  $z_{n+1} = u_0$ ,  $z_{n+2} = u_1$ , ...,  $z_{2n} = u_{n-1}$ . Подставляя выражения для перемещений в виде сплайнов в функционалы  $J_1, J_2, J_3$ , соответственно, получим функции  $f_1(\mathbf{z})$ ,  $f_2(\mathbf{z})$ ,  $f_3(\mathbf{z})$  и функцию  $f(\mathbf{z}, P) = f_1(\mathbf{z}) + f_2(\mathbf{z}) - Pf_3(\mathbf{z})$ . Необходимое условие ее экстремума записывается в виде

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, P)}{\partial \mathbf{z}} = 0. \tag{17}$$

Для решения задачи устойчивости оболочки требуется найти минимальное значение силы  $P$ , при котором происходит бифуркация решения системы уравнений (17). Необходимое условие бифуркации заключается в том, что матрица вторых частных производных становится вырожденной, то есть

$$\det \left[ \frac{\partial^2 f(\mathbf{z}, P)}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (18)$$

Введем в рассмотрение матрицы  $\mathbf{Q} = \frac{\partial^2 f_1(0)}{\partial z^2}$ ,  $\mathbf{Q}_2 = \frac{\partial^2 f_2(0)}{\partial z^2}$ ,  $\mathbf{G} = \frac{\partial^2 f_3(0)}{\partial z^2}$ .

Тогда уравнение (18) означает, что система уравнений

$$\mathbf{Q}\mathbf{z} + \mathbf{Q}_2\mathbf{z} = \mu\mathbf{G}\mathbf{z} \quad (19)$$

имеет нетривиальное решение, где  $\mu = P$  — обобщенное собственное число. Отметим, что  $f_2(\mathbf{z}) = (\mathbf{G}\mathbf{z}, \mathbf{z})/2$ .

Задачу поиска обобщенного собственного числа для системы (19) сформулируем в виде экстремальной проблемы  $\chi(\mathbf{z}) = (\mathbf{Q}\mathbf{z}, \mathbf{z})/2 + (\mathbf{Q}_2\mathbf{z}, \mathbf{z})/2 \rightarrow \min$  при ограничениях  $(\mathbf{Q}\mathbf{z}, \mathbf{z})/2 = 1$ . Предположим, что оболочка может отходить от наполнителя при  $w > 0$ , то есть сила реакции наполнителя имеет вид  $Cw_- = C \min\{0, w\} = -C(|w| - w)/2$ , а соответствующая энергия вычисляется по формуле

$$\Psi_1 = \pi \int_0^{2\pi} Cw_-^2 a(R + a \cos \theta) d\theta.$$

Введем в рассмотрение  $2\pi$ -периодическую функцию  $v(\theta)$  и функционал  $\Psi_2 = \pi \int_0^{2\pi} Cv^2 a(R + a \cos \theta) d\theta$ .

Решим экстремальную задачу

$$\tilde{J} = J_1 + \Psi_2 - PJ_3 \rightarrow \min_{w, u, v} \quad (20)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} v(\theta) - w(\theta) \leq 0, \\ v(\theta) \leq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Ясно, что данная задача эквивалентна задаче минимизации функционала:  $\Psi = J_1 + \Psi_1 - PJ_3$ .

При конечномерной аппроксимации функционала  $\Psi_1$  вместо функции  $f_2(\mathbf{z})$  получим функцию  $\tilde{f}_2(\mathbf{z})$ . Поэтому уравнение (19) записать невозможно, ибо матрица  $\mathbf{Q}_2$  не существует. Как и выше, представим перемещения  $w(\theta)$ ,  $u(\theta)$  и  $v(\theta)$  как интерполяционные периодические сплайны [16]. Тогда от задачи (20), (21) перейдем к задаче нелинейного программирования (4); экстремальное значение функции, отвечающей задаче (4), совпадает со значением искомой критической нагрузки. Численный подход к решению этой проблемы предложен в [13].

В [17] приведена формула критического давления для торообразной оболочки в соответствии с линейной теорией тонких оболочек:  $q = \eta Eh / (a(1 - v^2))$ , где

$$\eta = \frac{4k^2(n^2 + n^2k^2(1 - v^2)/2 + (1 + v)^2k^2 + (1 + v))}{(4 + k^2)(n^4(2 + k^2) + (1 + v)k^2n^2)} + \frac{2h^2}{3a^2(4 + k^2)} \times \frac{(n^2 - 1 + n^2k^2/2)(n^2 + n^2k^2/2 + k^2)}{n^2(2 + k^2) + k^2(1 + v)} + \frac{h^2k^2}{6a^2(4 + k^2)},$$

$k = a/R$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$  — выбираются из условия минимума  $q$ .

Значения критического параметра, найденные автором настоящей работы из решения задачи (19) —  $\tilde{q} = h^3P / (12(1 - v^2))$ , а также вычисленные по формуле из [17] —  $q$ , приведены в таблице 4. Данные свидетельствуют, что при использованной в работе аппроксимации наблюдается удовлетворительное совпадение с теоретическими результатами.

Результаты численных экспериментов при расчете критического давления для торообразной оболочки с упругим наполнителем содержит таблица 5, где введены следующие обозначения:  $C$  — жесткость наполнителя;  $q^*$  — значение критического параметра в случае жесткой связи упругого наполнителя с оболочкой;  $q_*$  — значение критического параметра, когда оболочка отходит от наполнителя (задача

Таблица 4. Сравнение авторских результатов с рассчитанными по известной из [17] формуле критического давления

$h$	0,346	0,346	0,346	0,489	0,489	0,489
$R$	20	15	15	10	15	20
$a$	5,0	5,0	4,0	2,5	5,0	5,0
$\tilde{q}$	0,012	0,017	0,021	0,036	0,014	0,022
$q$	0,012	0,012	0,019	0,037	0,017	0,017
$\frac{ \tilde{q}-q }{q} \cdot 100, \%$	0	41,67	15,79	2,70	17,65	29,41

Таблица 5. Значения критического давления в торообразной оболочке с упругим наполнителем

Параметры	$a = 5$					
	$h = 0,346$		$h = 0,346$		$h = 0,489$	
	$R = 20$		$R = 15$		$R = 20$	
	$C$		$C$		$C$	
Критическое давление	1	3	1	3	1	3
	$q^*$	0,017	0,026	0,022	0,030	0,034
$q_*$	0,015	0,021	0,021	0,026	0,029	0,041
$C = 0$						
$q$	0,013		0,017		0,017	

с ограничениями (21));  $q$  — значение критического параметра для оболочки без наполнителя ( $C = 0$ ). На основании сравнения результатов можно заключить, что учет условия «односторонности» контакта оболочки и наполнителя является необходимым при решении задачи на устойчивость.

## 5. Заключение

Рассмотрены новые задачи устойчивости упругих систем при наличии односторонних (неудерживающих) связей, накладываемых на перемещения: устойчивость стержня, прогиб которого ограничен жестким препятствием, при граничных условиях одного свободного конца; устойчивость колец при действии на них центральных сил или внешнего нормального давления, подкрепленных нитями, не воспринимающими сжимающие усилия. Численно решена осесимметричная задача устойчивости торообразной оболочки с упругим наполнителем, нагруженной внешним нормальным давлением, в предположении, что оболочка может отходить от наполнителя. Численные расчеты показали, что учет «односторонности» контакта существенно влияет на величину критической силы.

Решения перечисленных задач могут оказаться полезными при исследовании устойчивости упругих систем при наличии ограничений на перемещения в виде неравенств (оболочек с ребрами одностороннего действия, стержневых систем, подкрепленных упругими нитями и других).

## Литература

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
5. Николаи Е.Л. Труды по механике. – М.: Гостехиздат, 1955. – 583 с.
6. Тарасов В.Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. – Сыктывкар: Коми НЦ УрО РАН, 2013. – 238 с.
7. Крепс В.Л. О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте // ЖВММФ. – 1984. – Т. 24, № 4. – С. 497-503.
8. Рапопорт Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // ПММ. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 674-679. (English version [DOI](#)).
9. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – М.: Мир, 1989. – 494 с.
10. Михайловский Е.И. Элементы конструктивно-нелинейной механики. – Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2011. – 212 с.
11. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – Т. 2. – 672 с.
12. Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1989. – 399 с.

13. Тарасов В.Н. Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // Тр. ИММ УрО РАН. – 2005. – Т. 11, № 1. – С. 177-188.
14. Погорелов А.В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
15. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. 176 с.
16. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
17. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

## References

1. Novozhilov V.V. *Osnovy nelineynoy teorii uprugosti* [Foundation of the nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 211 p.
2. Feodosyev V.I. *Selected problems and questions in strength of materials*. Moscow: Mir Publishers, 1973. 432 p.
3. Bolotin V.V. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*. Oxford, Pergamon Press, 1963. 324 p.
4. Ziegler H. *Principles of structural stability*. Waltham, 1968.
5. Nikolai E.L. *Trudy po mekhanike* [Works on mechanics]. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 583 p.
6. Tarasov V.N. *Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem* [Optimization techniques for studying structural and non-linear problems in mechanics of elastic systems]. Syktyvkar: Komi SC UB RAS, 2013. 238 p.
7. Kreps V.L. O kvadraticnykh formakh, neotritsatel'nykh na ortante [Quadratic forms nonnegative on the orthant]. *Comp. Math. Math. Phys.*, 1984, vol. 24, no. 4, pp. 497-503.
8. Rapoport L.B. Lyapunov stability and sign definiteness of a quadratic form in a cone. *J. Appl. Math. Mech.*, 1986, vol. 50, no. 4, pp. 515-520. [DOI](#)
9. Panagiotopoulos P.D. *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and non-convex energy functions*. Birkhauser, 1985. 412 p.
10. Mikhaylovskiy E.I. *Elementy konstruktivno-nelineynoy mekhaniki* [Elements of structural and non-linear mechanics]. Syktyvkar State University, 2011. 212 p.
11. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Ustojchivost' ravnovesiya konstruksij i rodstvennyye problemy* [Stability of equilibrium of structures and related problems]. Moscow: SCAD SOFT, 2010. Vol. 2, 672 p.
12. Bazhenov V.A., Gotsulyak E.A., Kondakov G.S., Ogloblya A.I. *Ustojchivost' i kolebaniya deformiruyemykh sistem s odnostoronnimi svyazyami* [Stability and oscillations of deformable systems with unilateral constraints]. Kiev: Vishcha shkola, 1989. 399 p.
13. Tarasov V.N. Ob ustojchivosti uprugikh sistem pri odnostoronnikh ogranicheniyakh na peremeshcheniya [Stability of elastic systems with unilateral displacement constraints]. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics UB RAS*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 209-221.
14. Pogorelov A.V. *Geometricheskaya teoriya ustojchivosti obolochek* [Geometric theory of shells stability]. Moscow: Nauka, 1966. 296 p.
15. Pogorelov A.V. *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow: Nauka, 1974. 176 p.
16. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splajn-funksij* [Methods of spline functions]. Moscow: Nauka, 1980. 352 p.
17. Volmir A.S. *Ustojchivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967. 984 p.

Поступила в редакцию 28.07.2014; опубликована в электронном виде 30.12.2014