

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.36

УДК 539.3:534.1

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НЕСУЩИХ ПРИСОЕДИНЕННУЮ МАССУ, ЛИНЕЙНО РАСПРЕДЕЛЕННУЮ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

С.В. Серёгин

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация

В рамках теории пологих оболочек изучается влияние линейно и равномерно распределенной вдоль образующей присоединенной массы на частоты и формы свободных колебаний тонкой оболочки. Предлагается уточнение математической модели, согласно которому считается, что уже в линейной постановке возбуждение изгибных колебаний оболочки по одной из собственных форм приводит не только к возникновению сопряженной изгибной формы, но и к возникновению радиальных колебаний. Механизмом, «запускающим» взаимодействие изгибных колебаний с радиальными, является малая присоединенная масса. Решение краевой задачи строится методом Бубнова–Галёркина. Полученная система динамических уравнений показывает, что присоединенная масса приводит к связанности низкочастотных изгибных колебаний и высокочастотных радиальных колебаний оболочки. При этом радиальные колебания выступают в качестве дополнительной инерционной связи между сопряженными изгибными формами. Обнаружено более сильное расщепление изгибного частотного спектра, обусловленное не только влиянием присоединенной массы, но и значениями параметров волнообразования, зависящих от относительных геометрических размеров оболочки. Установлены диапазоны относительных длин и толщин, при которых взаимодействием изгибных и радиальных колебаний можно пренебречь. Полученные теоретические результаты сопоставляются с численным решением, выполненным методом конечных элементов из программного комплекса MSC «Nastran».

Ключевые слова: круговая цилиндрическая оболочка, линейно распределенная масса вдоль образующей, стрингер, расщепление изгибного частотного спектра, параметр волнообразования

NUMERICAL AND ANALYTICAL INVESTIGATION OF FREE VIBRATIONS OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH ADDED MASS LINEARLY DISTRIBUTED ALONG GENERATRIX

S.V. Seregin

Komsomolsk-na-Amure State Technical University, Komsomolsk-na-Amure, Russian Federation

The influence of an added mass linearly distributed along generatrix on the frequency and modes of free vibrations of a thin shell is studied in the framework of the shallow shell theory. We introduce a refined version of the mathematical model which assumes that the excitation of bending vibrations gives rise not only to a conjugate bending mode, but to the radial vibrations of the shell as well. The mechanism of interaction between the bending and radial vibrations is the light added mass. The boundary value problem is solved using the Bubnov–Galerkin method. The resulting system of dynamical equations shows that the added mass effect leads to the coupling of the low-frequency bending vibrations of the shell and its high-frequency radial vibrations. Radial vibrations act as an additional inertial coupling between the conjugate bending modes. It is shown that the splitting of the bending frequency spectrum becomes stronger, which is caused not only by the added mass, but also by the wave parameters characterizing the relative length and thickness of the shell. The analysis yielded the ranges of relative length and thickness of the shell in which the interaction between the bending and radial vibrations could be neglected. The theoretical results are compared with the numerical solution obtained using the finite element software code NASTRAN.

Key words: circular cylindrical shell, mass linearly distributed along generatrix, stringer, splitting of bending frequency spectrum, wave parameter

1. Введение

Тонкие круговые цилиндрические оболочки находят широкое применение в современных видах техники. Неизбежны случаи, когда к корпусу летательных или подводных аппаратов требуется присоединить дополнительный конструктивный элемент. В теоретических исследованиях такой элемент может быть представлен в виде сосредоточенной или распределенной по поверхности оболочечной конструкции массы.

В настоящее время при формулировке разрешающих соотношений задач, посвященных исследованию свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, считается, что осесимметричная часть прогиба оказывает существенное влияние только на нелинейное поведение оболочек, а в линейной постановке достаточно учитывать лишь сопряженные изгибные формы [1–5]. Однако учет сопряженных изгибных форм свободных колебаний оболочек, несущих сосредоточенную массу, приводит к результатам, не всегда согласующимся с опытными данными [5–7]. Кроме того, эффект снижения меньшей из расщепленных собственных частот низшего тона колебаний системы «оболочка–масса» зависит не только от величины присоединенной массы [5], но и от геометрических параметров оболочки [8–10].

Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости уточнения традиционной математической модели. Именно это и является целью настоящей работы. В статье представлено новое теоретическое

решение задачи определения характеристик свободных изгибных колебаний оболочки, которая несет присоединенную массу, линейно и равномерно распределенную вдоль образующей.

2. Математическая модель

Рассматривается оболочка радиусом R , толщиной h и массой M_0 и осью вращения, совпадающей с осью Oy цилиндрической системы координат Oxy . К срединной поверхности оболочки вдоль образующей $y = y_0$ присоединена линейно распределенная по всей длине оболочки l масса M . Изучаются колебания оболочки вблизи состояния основного резонанса.

2.1. Уравнения движения

Анализ, как и в [5], основывается на известных уравнениях движения теории пологих оболочек, имеющих вид (см., например, [11]):

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{lh} \delta(y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

При этом приняты обозначения: $D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость, где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона; ∇^4 — бигармонический оператор Лапласа; $w(x, y, t)$ — динамический прогиб; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений; ρ — массовая плотность; t — время; δ — функция Дирака. Уравнения (1), базирующиеся на гипотезе Кирхгофа–Лява, при определении интегральных характеристик колебаний, в частности низших собственных частот тонких изотропных оболочек, дают результаты, близкие к экспериментальным данным [5, 11].

2.2. Граничные условия и условие периодичности решения

Считается, что на торцах оболочки реализуются краевые условия Навье: $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, $N_1 = T = 0$, где N_1 , T — погонные продольное и касательное усилия соответственно. Помимо граничных условий выполняется требование периодичности тангенциального перемещения $v(x, y, t)$ по окружной координате: после обхода контура поперечного сечения все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние замкнутой оболочки, должны вернуться к своим первоначальным значениям:

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{R} \right] dy = 0. \quad (3)$$

2.3. Конечномерная модель

Полагаем, что массовая асимметрия, уже в линейной постановке, приводит к взаимодействию изгибных колебаний оболочки с радиальными. Тогда упругий прогиб свободно опертой по торцам оболочки, несущей малую присоединенную массу, аппроксимируем выражением

$$w(x, y, t) = h [f_1(t) \sin \beta y + f_2(t) \cos \beta y + f_3(t)] \sin \alpha x, \quad (4)$$

которое представляет собой взаимодействие сопряженных изгибных форм $\sin \beta y \sin \alpha x$ и $\cos \beta y \sin \alpha x$, где $\beta = n/R$, $\alpha = \pi/l$, n — число волн в окружном направлении). $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — обобщенные координаты. Введенная в дополнение к традиционной конечномерной модели [5] координата $f_3(t)$ отвечает радиальным колебаниям.

2.4. Модальные уравнения

Подстановка (4) в (2) позволяет найти функцию напряжений, удовлетворяющую условиям периодичности решения (3), а также тангенциальным граничным условиям $N_1 = T = 0$:

$$\Phi(x, y, t) = [\Phi_1(t) \sin \beta y + \Phi_2(t) \cos \beta y + \Phi_3(t)] \sin \alpha x, \quad (5)$$

$$\text{где } \Phi_1(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_1(t), \quad \Phi_2(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_2(t), \quad \Phi_3(t) = \frac{E}{R\alpha^2} f_3(t).$$

Запись уравнения (1) с учетом (4), (5) и выполнение процедуры метода Бубнова–Галёркина дают следующую систему связанных динамических уравнений [12]:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + f_1 + \frac{2M}{M_0} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] \sin \beta y_0 &= 0, \\ \ddot{f}_2 + f_2 + \frac{2M}{M_0} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] \cos \beta y_0 &= 0, \\ \ddot{f}_3 + (p/\omega_n)^2 f_3 + \frac{M}{M_0} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь: $p^2 = 1 + \frac{\varepsilon\theta^4}{12(1-\mu^2)}$ и $\omega_n^2 = \frac{\varepsilon(1+\theta^2)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2}$ — квадраты безразмерных частот радиальных

и изгибных колебаний оболочки без присоединенной массы; $\varepsilon = (n^2 h/R)^2$ и $\theta = \pi R/(nl)$ — параметры волнообразования, зависящие от относительной толщины и длины оболочки; точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \lambda_n t$, где $\lambda_n^2 = E\omega_n^2/(\rho R^2)$. Из (6) видно, что присоединенная масса приводит не только к связанности сопряженных изгибных форм, как в [5], но и к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний оболочки с высокочастотными радиальными колебаниями. При этом радиальные колебания выступают в качестве дополнительной инерционной связи между сопряженными изгибными формами.

3. Частоты колебаний

Система динамических уравнений (6) определяет для оболочки, несущей присоединенную массу, три безразмерных собственных частоты $\Omega_{n0i} = \omega_{n0i}/\omega_n$ ($i = 1, 2, 3$), которые не зависят от круговой координаты места крепления массы (ω_{n0i} — расщепленная частота изгибных колебаний оболочки с массой). Первым двум частотам — Ω_{n01} , Ω_{n02} , соответствуют преимущественно изгибные, а третьей — Ω_{n03} , преимущественно радиальные колебания. Меньшая из расщепленных частот — Ω_{n01} , в отличие

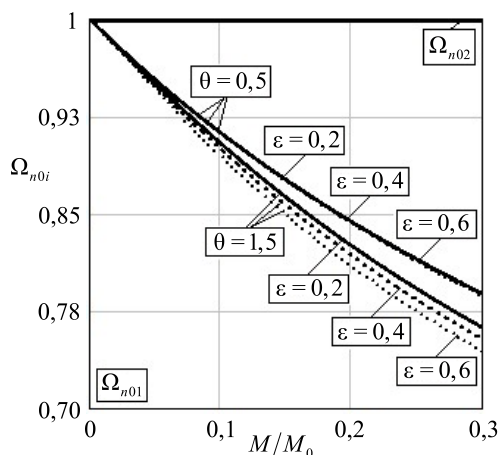


Рис. 1. Влияние параметров волнообразования ε , θ и присоединенной массы M/M_0 на меньшую из расщепленных собственных частот Ω_{n01} низшего тона колебаний системы «оболочка–масса»

от традиционного решения, зависит не только от величины присоединенной массы, но и от значений параметров волнообразования ε и θ (Рис. 1), а вторая частота и в новом, и в традиционном решении [5] равняется $\Omega_{n02} = 1$. Из рисунка видно, что с увеличением значений параметров волнообразования и величины присоединенной массы расстройка частотного спектра $\Omega_{n02} - \Omega_{n01}$ увеличивается.

На рисунке 2 представлена динамика снижения частоты Ω_{n01} при двух значениях распределенной массы $M = 0,05M_0$ и $M = 0,1M_0$ в зависимости от ε и θ . Сплошная тонкая линия отвечает известному традиционному теоретическому решению [5]. Кривые свидетельствуют, что параметры ε , θ оказывают влияние на Ω_{n01} , однако в диапазоне $0 < \theta \leq 1$ радиальной составляющей можно пренебречь.

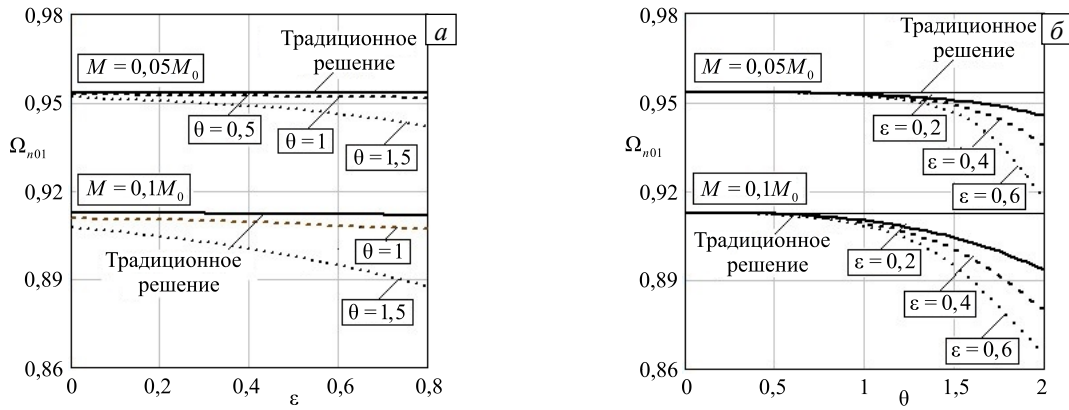


Рис. 2. Влияние параметров волнообразования ε (а) и θ (б) на Ω_{n01} – меньшую из расщепленных собственных частот низшего тона колебаний системы «оболочка–масса»

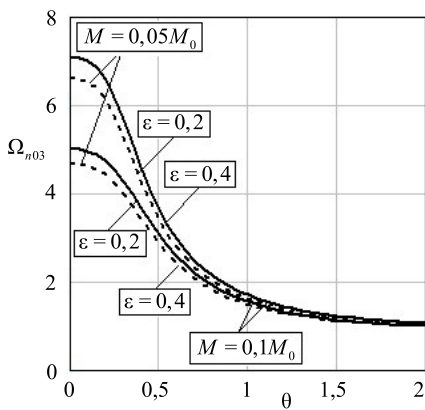


Рис. 3. Влияние параметров волнообразования ε и θ на частоту преимущественно радиальных колебаний Ω_{n03} системы «оболочка–масса»

Рисунок 3 демонстрирует зависимость от ε , θ и M_0 частоты преимущественно радиальных колебаний. Видно, что $\Omega_{n03} \gg \Omega_{n01}$. При $\theta > 1$ параметры ε , θ и M_0 практически не сказываются на характере изменения частоты Ω_{n03} .

Стоит отметить, что при определенных геометрических характеристиках оболочки частота радиальных колебаний может оказаться близкой к частоте основного тона изгибных колебаний системы «оболочка–масса». Это в свою очередь приведет и к соизмеримым амплитудам изгибных и радиальных колебаний (Рис. 2, 3).

4. Формы колебаний

На рисунке 4 показано изменение отношения амплитуд f_3/f_2 радиальных (f_3) и изгибных (f_2) колебаний при частоте Ω_{n01} и различных значениях ε и θ для системы «оболочка–масса». Расчеты выполнены при $M = 0,1M_0$. Видно (см. Рис. 4а, б), что частоте Ω_{n01} соответствуют преимущественно изгибные колебания. Амплитуды радиальных колебаний f_3 , с увеличением ε и (или) θ становятся все более заметными по отношению к амплитудам изгибных колебаний.

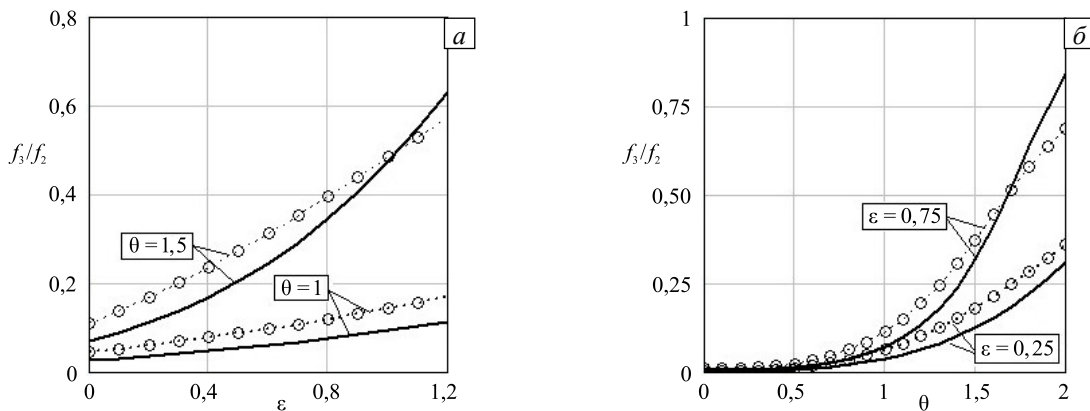


Рис. 4. Характер отношения амплитуд f_3/f_2 в зависимости от параметров волнообразования ε (а) и θ (б); сплошная линия соответствует $M = 0,05M_0$, линия с кружками – $M = 0,1M_0$

5. Предельный переход

Рассмотрим более простую (предельную) задачу: определим характеристики колебаний бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки, несущей присоединенную массу, линейно и равномерно распределенную вдоль образующей некоторого кольца (считается, что кольцо находится в условиях плоской деформации).

Уравнения движения (1) для случая изгибных колебаний такого пологого кольца примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0; & 1 \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{N_y}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - M \delta(y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. & 2 \end{aligned} \quad (7)$$

Точность уравнений (7) ограничена теми же пределами, что и точность исходных уравнений теории пологих оболочек (1, 2), при выводе которых были отброшены члены $1/n^2$ порядка малости по сравнению с единицей (n , как и ранее, число волн в окружном направлении) и тангенциальные силы инерции.

Конечномерная модель (4) предстанет теперь в следующем виде:

$$w(y, t) = f_1(t) \sin \beta y + f_2(t) \cos \beta y + f_3(t). \quad (8)$$

Подстановка (8) в (7) и удовлетворение условию периодичности решения (3) позволяет определить погонное окружное усилие $N_y(t)$. Ортогонализация уравнения (7)₂ к форме прогиба (8) приводит к системе связанных динамических уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + f_1 + \frac{2M}{M_0} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] \sin \beta y_0 &= 0, \\ \ddot{f}_2 + f_2 + \frac{2M}{M_0} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] \cos \beta y_0 &= 0, \\ \ddot{f}_3 + 12f_3 / \varepsilon + \frac{M}{M_0} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) аналогичны уравнениям (6). Как и в случае колебаний оболочки конечной длины, из системы (9) находятся три безразмерных собственных частоты кольца, несущего присоединенную массу, которые не зависят от круговой координаты места крепления массы. Первым двум частотам — Ω_{kn01} , Ω_{kn02} , соответствуют преимущественно изгибные, а третьей — Ω_{kn03} , преимущественно радиальные колебания. Индекс « k » означает, что решение получено для кольца. Меньшая из расщепленных частот (Ω_{kn01}) зависит от величины присоединенной массы и значения параметра волнообразования ε , причем $\Omega_{kn02} = \Omega_{n02} = 1$. Таким образом, уточненная математическая модель позволяет выполнить предельный переход к кольцу.

6. Численное решение методом конечных элементов (МКЭ)

Программный комплекс MSC «Nastran» предусматривает решение задачи определения собственных динамических характеристик круговой цилиндрической оболочки, несущей присоединенную массу $M = 0,1M_0$, линейно и равномерно распределенную вдоль образующей. Рассматриваются оболочки со следующими физическими и геометрическими характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³; $R/h = 100$, $l/R = 3$, $R = 1$ м.

При разбиении моделируемой конструкции на конечные элементы (КЭ) использовались элементы Plate — двумерные (плоские) элементы квадратной формы, учитывающие все внутренние силовые факторы в оболочке (тангенциальные, сдвиговые, поперечные и изгибные нагрузки) и ее геометрию. Число КЭ при каждой длине оболочки подбиралось таким образом, что с последующим уменьшением размера конечного элемента (шаг уменьшения сетки равнялся $a = 0,05$ м) уточнение значения собственной частоты оболочки не превышало значения частоты при предыдущем размере КЭ более чем на 0,5%.

Низшие собственные частоты и соответствующие им формы колебаний представлены на рисунке 5 для случая $l/R = 3$. Точкой (Рис. 5б) обозначено место крепления присоединенной массы, которая линейно и равномерно распределена вдоль образующей оболочки.

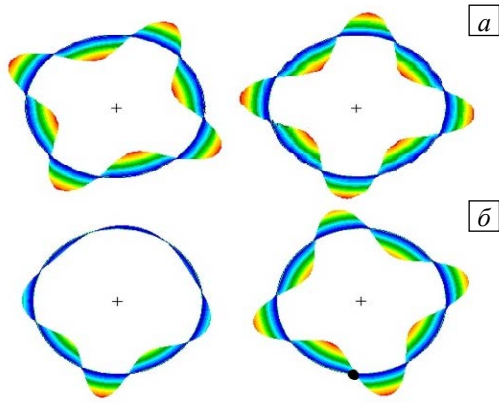


Рис. 5. Собственные частоты и формы низшего тона у оболочки без массы (а): $\omega_4 = 64,2$ Гц; у оболочки с массой $M = 0,1M_0$ (б): $\omega_{401} = 52,9$ Гц; $\omega_{402} = 62,3$ Гц

Выполненные расчеты показали, что в случае колебаний оболочки без массы (Рис. 5а) двум сопряженным изгибным формам, синусоидальной и косинусоидальной, сдвинутым относительно друг друга на угол $\pi/2n$, соответствует одна и та же частота $\omega_4 = 64,2$ Гц. Согласно теоретическому решению [5, 11] эта частота составляет $(\omega_4)_t = 66,4$ Гц. Хорошее согласование теоретического и численного решений дает право говорить о правильности используемой в задаче модели и численного алгоритма при определении динамических характеристик оболочки.

Присоединенная масса (Рис. 5б) приводит к удвоению изгибного частотного спектра, причем в отличие от известных теоретических решений две частоты: меньшая — ω_{n01} ,

и большая — ω_{n02} , снижаются по сравнению со случаем колебаний оболочки без массы. Формы колебаний локализуются в местах крепления массы (наблюдается преобладание перемещений в местах крепления массы над перемещениями в других точках). Частота, меньшая из расщепленных собственных частот первого тона, с увеличением M/M_0 и уменьшением l/R значительно снижается, большая частота также зависит от M/M_0 и l/R , однако ее снижение менее существенно. Частоты высших тонов колебаний меняются незначительно. Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица. Сопоставление результатов

Относительная длина оболочки; n_{\min} – число волн, соответствующее минимальной частоте	Традиционное решение [5], $(\Omega_{n01})_t$	Уточненная авторская модель, Ω_{n01}	Отличие авторского решения от традиционного Δ , %	Решение МКЭ (пакет MSC “Nastran”), $(\Omega_{n01})_N$
$l/R = 0,2; n_{\min} = 10$	0,913	0,88	3,61	0,46
$l/R = 0,3; n_{\min} = 9$	0,913	0,9	1,42	0,52
$l/R = 1; n_{\min} = 7$	0,913	0,910	0,33	0,71
$l/R = 3; n_{\min} = 4$	0,913	0,912	0,11	0,84

Как и в случае колебаний оболочки, несущей сосредоточенную массу, имеет место зависимость между геометрическими параметрами оболочки и основной частотой системы «оболочка–масса» [10]. Так, при относительной длине $l/R = 0,2$ решение на основе уточненной автором математической модели отличается от известного теоретического решения [5] на $\Delta = \left| \Omega_{n01} / (\Omega_{n01})_t - 1 \right| \cdot 100\% = 3,61\%$. Расхождение данных, полученных численным методом (см. решение МКЭ в таблице), с теоретическими, говорит, по-видимому, о несовершенстве используемой в [5] традиционной математической модели. Для лучшего согласования результатов необходимо, в частности, удерживать большее число членов ряда.

7. Заключение

Произведенное автором уточнение конечномерной модели привело к количественно и, главное, качественно лучшим результатам, чем известное традиционное решение [5]. Учет осесимметричного слагаемого в выражении для динамического прогиба позволил установить, что присоединенная масса, линейно и равномерно распределенная вдоль образующей, вызывает расщепление изгибного частотного спектра, при этом меньшая из расщепленных собственных частот зависит не только от величины присоединенной массы M/M_0 , но и от параметров волнообразования ϵ и θ , связанных с относительной толщиной и длиной оболочки. Присоединенная масса обуславливает инерционное взаимодействие низкочастотных изгибных колебаний с малозаметными высокочастотными радиальными колебаниями. Результаты расчетов показывают, что в зависимости от значений геометрических параметров оболочки и величины присоединенной массы снижается не только меньшая из расщепленных собственных частот, но и частота, большая по сравнению со случаем оболочки без массы.

Выявленные особенности взаимодействия изгибных колебаний с радиальными должны быть учтены при расчете на прочность реальных оболочечных конструкций.

Литература

1. Evensen D.A., Fulton R.E. Some studies on the nonlinear dynamic response of shell-type structures // *Dynamic Stability of Structures*. – New York: Pergamon Press, 1967. – P. 237-254.
2. Dowell E.H., Ventres C.S. Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell // *Int. J. Solids Struct.* – 1968. – Vol. 4, no. 10. – P. 975-991. DOI
3. Варадан Т.К., Пратхан Дж., Рамани Х.В. Нелинейные свободные изгибные колебания тонкостенных круговых цилиндрических оболочек // *Аэрокосмическая техника*. – 1990. – № 5. – С. 21-24.
4. Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. – New York, USA: Cambridge university press, 2008.
5. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснополская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1984. – 220 с.
6. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 195 с.
7. Sivak V.F., Sivak V.V. Experimental investigation into the vibrations of shells of revolution with added masses // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 38, no. 5. – P. 623-627. DOI
8. Серёгин С.В. Исследование динамических характеристик оболочек с отверстиями и присоединенной массой // *Вестник МГСУ*. – 2014. – № 4. – С. 52-58.
9. Серёгин С.В. Влияние присоединенного тела на частоты и формы свободных колебаний цилиндрических оболочек // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2014. – № 3. – С. 35-38.
10. Серёгин С.В. Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний // *Вестник МГСУ*. – 2014. – № 7. – С. 64-74.
11. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
12. Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, несущей линейно распределенную массу вдоль образующей: Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ / Серёгин С.В. – Российская Федерация, № 2014617017, 2014.
13. Собственные колебания кольца с присоединенной массой: Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ / Серёгин С.В. – Российская Федерация, № 2014611938, 2013.

References

1. Evensen D.A., Fulton R.E. Some studies on the nonlinear dynamic response of shell-type structures. *Dynamic Stability of Structures*. New York: Pergamon Press, 1967. Pp. 237-254.
2. Dowell E.H., Ventres C.S. Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell. *Int. J. Solids Struct.*, 1968, vol. 4, no. 10, pp. 975-991. DOI
3. Varadan T.K., Prathap G., Ramani H.V. Non-linear free flexural vibration of thin circular cylindrical shells. *AIAA J.: Devoted to Aerospace Research and Development*, 1989, no. 27, pp. 1303-1304.
4. Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. New York, USA: Cambridge university press, 2008.
5. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Krasnopol'skaya T.S. Nelinejnoe vzaimodejstvie form izgibnykh kolebanij tsilindricheskikh obolochek [Nonlinear interaction of forms of flexural vibration of cylindrical shells]. Kiev: Naukova Dumka, 1984. 220 p.
6. Andreev L.V., Dyshko A.L., Pavlenko I.D. *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* [Dynamics of plates and shells with concentrated masses]. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 195 p.
7. Sivak V.F., Sivak V.V. Experimental investigation into the vibrations of shells of revolution with added masses. *Int. Appl. Mech.*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 623-627. DOI
8. Seregin S.V. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik obolochek s otverstiyami i prisoedinennoj massoj [Investigation of dynamic characteristics of shells with holes and added mass]. *Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*, 2014, no. 4, pp. 52-58.
9. Seregin S.V. Vliyanie prisoedinennogo tela na chastoty i formy svobodnykh kolebanij tsilindricheskikh obolochek [Effect of attached body on frequencies and shapes of free vibrations of cylindrical shells]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij – Structural Mechanics and Structures Calculation*, 2014, no. 3, pp. 35-38.
10. Seregin S.V. Vliyanie ploschadi kontakta i velichiny linejno raspredelennoj i sosredotochennoj massy s krugovoj tsilindricheskoj obolochkoj na chastoty i formy svobodnykh kolebanij [Influence of the contact area and value of the linearly distributed and concentrated mass with a circular cylindrical shell on the frequency and modes of natural oscillations]. *Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*, 2014, no. 7, pp. 64-74.
11. Vol'mir A.S. *Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1972. 432 p.
12. Seregin S.V. *Free vibrations of a circular cylindrical shell carrying a linearly distributed mass along the generator*. RF Computer Software Certificate No. 2014617017, 2014.
13. Seregin S.V. *Natural vibrations of the ring with attached mass*. RF Computer Software Certificate No. 2014611938, 2013.

Поступила в редакцию 26.05.2014; опубликована в электронном виде 30.12.2014

Сведения об авторе

Серёгин Сергей Валерьевич, ст. преп., Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (КнАГТУ), 681013, Комсомольск-на-Амуре, просп. Ленина, д. 27; e-mail: Seregin-komsHome@yandex.ru