

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.4.35](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.35)
УДК 532.516.4:519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ КАВЕРНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А.А. Фомин¹, Л.Н. Фомина²

¹Кузбасский государственный университет имени Т.Ф. Горбачева, Кемерово, Российская Федерация

²Кемеровский государственный университет, Кемерово, Российская Федерация

В работе обсуждается вопрос существования стационарного решения задачи, в которой исследуется течение несжимаемой вязкой жидкости в двумерной квадратной каверне с подвижной верхней крышкой при числах Рейнольдса $Re > 10000$. На основании обзора литературных источников и анализа численного решения задачи при $10000 \leq Re \leq 20000$ делаются выводы об условиях и особенностях построения требуемого решения. Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим совпадением расчетных параметров вихрей вплоть до четвертого уровня с аналогичными данными других авторов при $Re = 10000$ и $Re = 20000$. Для этих же чисел Рейнольдса приводится подробная структура течения. Демонстрируется эволюция нижних угловых вихрей четвертого уровня для диапазона $15000 \leq Re \leq 20000$. Показывается, что при $Re > 10000$ течение жидкости в вихрях третьего и четвертого уровней носит выраженный стоковский характер. Проведено сравнение значений параметров вихрей в углах каверны, полученных численно и аналитически на основании решения Моффатта, описывающего стоковское течение жидкости около острых углов. Выявлено их вполне удовлетворительное соответствие. Обоснование корректности найденного численно стационарного решения при больших числах Рейнольдса осуществляется с точки зрения его насыщения при кратном возрастании количества расчетных узлов вдоль каждой пространственной координаты, влияния схемной вязкости, а также рассмотрения процесса установления решения в контексте поведения динамических систем.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, течение в каверне, стационарное решение, большие числа Рейнольдса

NUMERICAL SIMULATION OF VISCOUS 2D LID-DRIVEN CAVITY FLOW AT HIGH REYNOLDS NUMBERS

A.A. Fomin¹ and L.N. Fomina²

¹Kuzbass State Technical University n.a. T.F. Gorbachev, Kemerovo, Russian Federation

²Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation

This paper addresses the question of existence of a steady-state solution to the problem of incompressible viscous fluid flow in a two-dimensional square cavity with a moving upper lid at high Reynolds numbers ($Re > 10000$). Based on the literature survey and numerical results obtained when solving the problem at $10000 \leq Re \leq 20000$, we have formulated the conditions for constructing the solution and discussed its distinguishing features. The calculated vortex parameters up to the fourth level are in good agreement with the results of other authors for $Re = 10000$ and $Re = 20000$, and this supports the validity of our results. For the same Reynolds numbers, the detailed structure of the flow is presented. The evolution of the fourth level bottom-corner vortices at $15000 \leq Re \leq 20000$ is demonstrated. It is shown that at $Re > 10000$ the fluid flow in the third and fourth level vortices has a clear Stokes mode. For these reasons, a comparison of the parameters of such vortices with the Moffatt analytical solution of fluid flow near sharp corners is performed. It has been found that the numerical and analytical results agree fairly well. Substantiation of the accuracy of the high-Re steady-state solution is carried out in the context of its saturation at an n-fold increase in the number of nodes along each spatial coordinate, false viscosity effect and solution convergence analysis of the behavior of dynamic systems.

Key words: Navier–Stokes equations, a lid-driven cavity flow, steady-state solution, high Reynolds numbers

1. Введение

Исследованию движения вязкой жидкости в каверне с подвижной верхней крышкой (Рис. 1) посвящено множество работ, в подавляющем большинстве которых рассматривается двумерный случай. Привлекательность задачи в такой постановке объясняется, с одной стороны, простотой геометрии расчетной области и зависимостью решения от единственного параметра — числа Рейнольдса, а с другой стороны — наличием большого количества особенностей, характерных для течений несжимаемой вязкой жидкости: сложной многоуровневой вихревой структуры; пограничных слоев вдоль стенок замкнутой полости; разрывов полей решения в верхних угловых точках каверны как первого рода (по компонентам скорости и, вообще говоря, по давлению), так и второго рода (по завихренности).

Поскольку течения в кавернах, начиная с чисел $Re \approx 700 \div 800$, фактически не являются ни двумерными, ни ламинарными (гидродинамически устойчивыми) [1], то решения в случае плоской каверны уже при $Re > 800$ перестают соответствовать параметрам движения реальной жидкости. Тем не менее, в силу вышеуказанных причин и большого объема наработанного материала, двумерная задача с успехом исполняет роль своеобразного «испытательного стенда», с помощью которого апробируются новые технологии в сфере вычислительной гидромеханики течений несжимаемых вязких жидкостей.

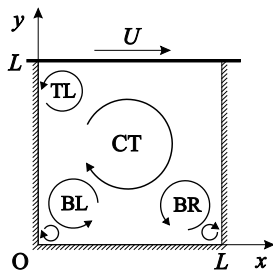


Рис. 1. Схема течения в каверне и обозначения возможных вихрей: CT – центральный вихрь; в общем случае TL – верхняя левая, BL – нижняя левая, BR – нижняя правая группы вихрей

В истории появления публикаций на обсуждаемую тему прослеживается интересная закономерность. На начальном этапе получаемые решения, по мере роста производительности вычислительной техники и эффективности численных методов, усложнялись и становились точнее за счет увеличения числа Re и применения более подробных сеточных разрешений расчетной области. Так, если в [2, 3] (середина 60-х годов) максимальное число Рейнольдса Re_{max} составляло $500 \div 1000$, а сеточное разрешение — не более 51×51 узлов, то в [4, 5] (на рубеже 70–80-х годов) максимальные значения выросли до $Re_{max} = 10^4$ и 257×257 узлов. После столь бурного старта увеличение значения числа Re не наблюдалось вплоть до середины 90-х годов — до момента появления работы [6], в которой приведены параметры стационарного решения при $Re = 12500$. Из немногочисленных исследований начального этапа, в которых стационарные решения найдены при значении $Re = 10^4$, следует упомянуть публикации [7–9].

В этих работах были использованы как равномерные, так и неравномерные сетки с разрешением не более чем 256×256 узлов. В некоторых из них авторы отмечали, что при попытках увеличения числа Рейнольдса свыше 10^4 возникали циклические колебания параметров приближения решения с одновременным нарушением сходимости. В работе [6] подобная неустойчивость решения зафиксирована при $Re = 16000$.

Вследствие этого широко распространилось предположение о принципиальном отсутствии стационарного решения для чисел Рейнольдса, превосходящих некоторое критическое значение Re_* , близкое к 10^4 . В период с начала 90-х и до второй половины 2000-х годов опубликовано множество работ, посвященных устойчивости решения и определению Re_* [10–16]. При этом критическое значение числа Рейнольдса находилось, как правило, в пределах от 7000 до 9000, однако были и исключения: например, $Re_* \leq 11000$ в [14], а в [12] обсуждалась потеря устойчивости решения при $Re_* \approx 13000$. В это же время практически не появлялись публикации, в которых представлялись бы результаты для Re , превышающих общепринятый диапазон потери устойчивости — $7000 \div 9000$. Можно лишь упомянуть работы [17, 18]. В [17] приводятся результаты для $Re = 20000$ и 25000 , но, по словам авторов, просто для демонстрации возможностей рассматриваемого метода решения, без обсуждения вопроса устойчивости; в [18] приведены картины течения для чисел Re вплоть до 10000.

Ситуация изменилась с появлением публикации [19], в которой на основе схемы второго порядка аппроксимации и достаточных подробных сеточных разрешений области — вплоть до 601×601 , стационарные решения найдены для $Re \leq 21000$. Год спустя вышла работа почти того же авторского коллектива [20], в которой результаты получены для $Re \leq 20000$ на тех же сетках, что и в [19], но с применением разностной схемы четвертого порядка. В серии работ [21–23] число Re значительно превышало предел в 10000 и было доведено до 50000 [22]. При этом решения для чисел Рейнольдса из диапазона $10000 < Re \leq 35000$ хорошо согласуются между собой (см. [1, 19, 22, 23]). Что касается решения для $Re = 50000$, то оно принципиально отличается от решений для меньших значений числа Рейнольдса и, поскольку присутствует всего лишь в одной работе, нуждается в подтверждении достоверности, например, путем сравнения с независимыми аналогичными данными других авторов.

Интересно, что в работах последних лет с результатами при $Re > 10000$ [1, 19–23] говорится об отсутствии у исследователей единства во мнениях о возможности построения стационарного решения для больших чисел Рейнольдса. Кроме того, авторам настоящей статьи не известны новые публикации, посвященные проблеме устойчивости численного решения для $Re > 10000$. При этом типичным обоснованием корректности полученных при $Re > 10000$ решений выступают следующие рассуждения [1]:

1. Если допустить, что искомое решение изначально нестационарное, и при этом найти его на основе стационарных уравнений Навье–Стокса, то это будет означать ошибочность искомого допущения и, соответственно, ошибочность выводов многочисленных работ об отсутствии стационарного решения при больших числах Re .

2. Если попытка решения задачи методом установления с использованием нестационарных уравнений Навье–Стокса увенчается успехом, то это будет явным доказательством существования стационарного решения при стационарной формулировке задачи.

Авторы работ [21–23], хотя и неявно, придерживаются той же логики: если решение получено, то оно существует. Действительно совпадающие между собой результаты решения одной и той же задачи, найденные независимо друг от друга, заслуживают высокого доверия, и тем более, если они подкреплены [1, 23] «выходом» на аналитическое решение в виде экстремума завихренности центрального вихря при $Re \rightarrow \infty$ со значением, равным $\omega_0 = -1,886$ [3].

Приведенная аргументация в пользу корректности решений при $Re > 10000$ является важной, но явно недостаточной, поскольку имеется ряд вопросов, связанных с построением решения при больших числах Рейнольдса, которые не нашли своего отражения в литературе, а именно:

1. Насколько сильно ошибки, обусловленные процессом аппроксимации и итерационными алгоритмами, влияют на процесс численного нахождения стационарного решения задачи? Иными словами, будет ли решение при сгущении сетки стремиться к некоторому предельному устойчивому состоянию? При этом сгущать сетку желательно не на 20–40% как в [23], а кратно.

2. В закрученных течениях, в силу локально-одномерного принципа построения разностных схем, особенно отчетливо проявляется «размазывание» параметров течения, направленного перпендикулярно к вектору скорости потока. Этот эффект традиционно интерпретируется как проявление схемной диссипации (вязкости) $\Gamma_a = \Gamma_a(x, y)$. В такой ситуации полученное решение считается соответствующим не исходному постоянному значению Re , а переменному $Re_{эф}$, вычисляемому через эффективную вязкость $\nu_{эф} = \nu + \Gamma_a$, где ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Так, например, в работе [3], где минимальный сеточный шаг равняется 0,02, максимальное число Рейнольдса не превышает $Re = 10000$, поскольку в этом случае, как нетрудно проверить с помощью соответствующего расчета, среднее значение схемной диссипации (вязкости) составляет $\Gamma_a \approx 0,43\nu$. При этом увеличение сеточного шага при фиксированном Re (что, естественно, повышает Γ_a) приводит к осцилляциям приближений решения, а увеличение Re при фиксированном шаге — к невыполнению требований по точности. Поэтому возникает вопрос о количественной оценке двумерного поля $Re_{эф}$ и степени его влияния на соответствие установленного численно решения задачи заявленному постоянному значению Re .

3. В [1] утверждается, что анализ устойчивости численного решения проводился различными исследователями при грубых сетках — не более чем 257×257 узлов. Соответственно, именно в этом, по мнению автора, заключалась основная причина возникновения бифуркации Хопфа при числах Рейнольдса, равных или превышающих $Re \sim 10^4$. Однако существуют работы, в которых устойчивость анализируется при более подробных сетках: 512×512 [14, 16], 1024×1024 [15] и даже при 2048×2048 [10]. И во всех этих работах исследователям не удалось добиться гидродинамической устойчивости решения при больших числах Re . В частности, в [16] при $Re = 10000$ и сетке 513×513 было выполнено 40000 итераций, более половины которых соответствуют циклическим колебаниям параметров потока около некоторого своего среднего состояния. В подобной ситуации было бы интересно более тщательно изучить процесс установления решения, например, с точки зрения поведения динамических систем при разных Re и различных сеточных разбиениях области.

4. В работе [3] для условия $Re \rightarrow \infty$ приведен профиль горизонтальной компоненты вектора скорости в вертикальном сечении, проходящем через центр каверны. Однако сопоставление с ним соответствующих профилей из принадлежащих другим авторам численных решений при больших Re в литературе почему-то отсутствует, хотя при больших Re эти профили практически не отличаются друг от друга [1, 19], то есть наблюдается их стремление к некоей предельной кривой. С другой стороны, в [24] получены аналитические выражения для определения параметров вихрей около углов в условиях стокового течения. Применительно к задаче описания течения в каверне данные соотношения должны выполняться для нижних угловых вихрей второго (не всегда), а также третьего и четвертого уровней. К сожалению, в работах [1, 19–23] не удалось визуализировать вихри четвертого уровня по причине использования равномерных сеток и в силу малых размеров вихрей, что не позволило провести сравнение расчетных и аналитических результатов. Возможно, оно могло предоставить дополнительные аргументы в пользу корректности численных решений задачи при больших числах Рейнольдса.

В связи с вышесказанным основной целью настоящего исследования является максимально возможное обоснование корректности и всесторонний анализ стационарного решения рассматриваемой задачи для чисел Рейнольдса $Re \geq 10000$.

2. Постановка задачи и метод решения

Математическая постановка задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с подвижной верхней крышкой (Рис. 1) формулировалась в виде системы безразмерных нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

а также начальных $u = v = 0$ и краевых условий:

– на верхней подвижной границе ($0 \leq x \leq 1, y = 1$) $u = 1, v = 0$;

– на остальных границах $u = v = 0$.

Здесь: t — время; x, y — декартовы координаты; u, v — соответственно проекции вектора скорости потока \mathbf{V} (при этом $|\mathbf{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$) на оси Ox, Oy ; p — давление; $Re = UL/\nu$ — число Рейнольдса, где U — скорость движения крышки, L — размер стороны каверны, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. В интервале времени $0 \leq t \leq 1$ крышка каверны плавно, по синусоидальному закону «разгонялась» от состояния покоя до максимальной скорости U , которая далее не менялась.

Для численного решения задачи был применен несколько измененный алгоритм расщепления [25]. Отличие заключалось в том, что в настоящей работе задача Неймана формулировалась не для давления p , а для его поправки p' , с точностью до множителя равной разности полей давления на текущем и предыдущем слоях по времени. Понятно, что при установлении итерационного процесса решения $p' \rightarrow 0$.

Исходные дифференциальные уравнения аппроксимировались при помощи метода контрольного объема [26] со вторым порядком аппроксимации по пространству и первым — по времени. Пространственная сетка, вообще говоря, была неравномерной, со сгущением по степенному закону к стенкам каверны и отношением среднего шага сетки к минимальному как 5:1. Разностная схема записывалась в неявном виде, что при определении шагов по времени позволило использовать числа Куранта, много большие 1, тем самым ускорялся процесс сходимости решения к искомому стационарному состоянию. Получаемые системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) разрешались неявным итерационным полилинейным рекуррентным методом, ускоренным в подпространствах Крылова [27]. Точность решения СЛАУ определялась согласно соотношению

$$\|\Phi^k - \Phi^{k-1}\|_1 < \xi_\Phi \|\Phi^k\|_1, \quad (1)$$

при одновременном контроле относительного уменьшения первой нормы невязки соответствующей СЛАУ. Здесь: Φ — один из числовых векторов искомого решения $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}\}$, где $\mathbf{u} = \{u_{ij}\}$, $\mathbf{v} = \{v_{ij}\}$, $\mathbf{p} = \{p_{ij}\}$ — соответственно числовые векторы компонент скорости и давления решения соответствующей СЛАУ; i, j — индексы узлов разностной сетки; k — номер итерации при решении СЛАУ. Удобство использования условия (1) связано с простотой определения необходимого количества верных знаков в искомом решении системы. Как показали расчеты, величина относительного уменьшения первой нормы первоначальной невязки $\|\mathbf{R}^k\|_1 / \|\mathbf{R}^0\|_1$ всегда была, как минимум, на порядок меньше соответствующего заданного значения ξ_Φ , где \mathbf{R} — числовой вектор невязки решения СЛАУ.

Решение всей задачи считалось установившимся при выполнении условия $D_v = \frac{\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_1 + \|\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}\|_1}{\tau} < \varepsilon$, где τ — шаг по времени, n — номер слоя по времени. В зависимости от сеточного разбиения, числа Рейнольдса и числа Куранта величина ξ_Φ для \mathbf{u} и \mathbf{v} принималась равной $10^{-7} \div 10^{-9}$, а для \mathbf{p} — $10^{-6} \div 10^{-7}$, исходя из требования расчета функции тока ψ с точностью до 10^{-13} (литературные данные). Практика вычислений показала, что значения $\varepsilon \sim 10^{-5}$ вполне достаточно для установления решения. Попытки дальнейшего увеличения точности сходимости вплоть до $\varepsilon \sim 10^{-8}$ не привели к изменению величины числовых векторов $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}\}$. Во всех вычислениях интегральный баланс массы — суммарный поток поперек произвольно выбранного сечения каверны — составлял, в зависимости от места выбора сечения, $10^{-6} \div 10^{-8}$.

Все расчеты выполнены на PCIntelCorei5-750 (4 ядра), 2,66 GHz, RAM 12 Gb.

На рисунке 2 и в таблице 1 приведены результаты решения задачи при $Re = 10000$ и сеточном разбиении области с 2049×2049 узлами. Названия вихрей соответствуют буквенным обозначениям, введенным на рисунке 1; нижний индекс указывает на уровень вихря — порядковый номер в цепочке вихрей от центра к углу (стенке), при этом центральный вихрь СТ считается вихрем нулевого уровня. Данное решение вполне устойчиво и хорошо согласуется с результатами работ [17, 19, 20], причем в силу подробной сетки настоящие результаты тяготеют к решению из [20], полученному с помощью разностной аппроксимации четвертого порядка.

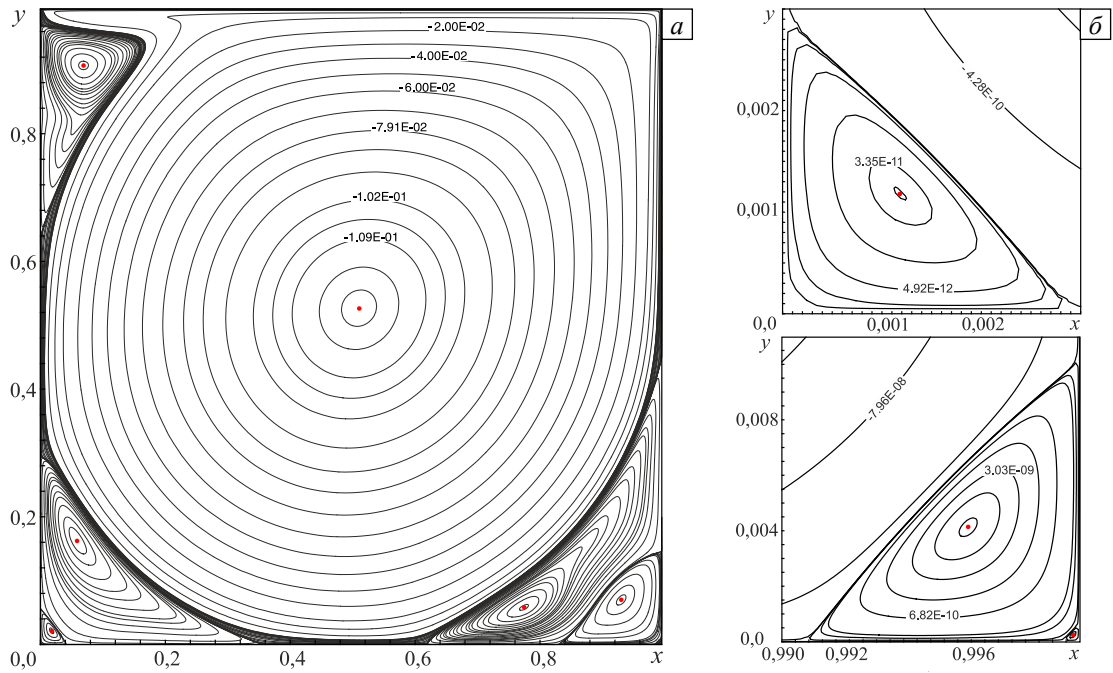


Рис. 2. Общая картина течения при $Re = 10000$ и сетке 2049×2049 (а); вихри BL_3 , BR_3 , BR_4 в увеличенном виде (б)

Таблица 1. Параметры вихрей при $Re = 10000$ и сеточном разрешении 2049×2049 узлов; FD – метод конечных разностей; FE – метод конечных элементов; M_4 – сеточное покрытие области из 49156 треугольников; индекс m в выражении $O(h^m)$ означает порядок разностной аппроксимации, p – порядок аппроксимирующего полинома

Источник цитирования и параметры решения	Вихрь	Координаты центров		Значения экстремумов		Вихрь	Координаты центров		Значения экстремумов	
		x_c	y_c	Функция тока ψ_c	Завихренность ω_c		x_c	y_c	Функция тока ψ_c	Завихренность ω_c
[20], FD, 601×601 , $O(h^4)$	СТ	0,5117	0,5300	-0,1223	-1,9182	TL ₁	0,0700	0,9100	$2,62 \cdot 10^{-3}$	2,3223
[19], FD, 601×601 , $O(h^2)$		0,5117	0,5300	-0,1204	-1,8890		0,0717	0,9117	$2,59 \cdot 10^{-3}$	2,2476
[17], FE, M_4 , $p = 6$		0,5119	0,5300	-0,1224	-		0,0705	0,9106	$2,63 \cdot 10^{-3}$	-
Авторский результат 2049×2049 , FD, $O(h^2)$		0,5119	0,5298	-0,1221	-1,9093		0,0706	0,9104	$2,62 \cdot 10^{-3}$	2,3152
[20], FD, 601×601 , $O(h^4)$	BL ₁	0,0583	0,1633	$1,61 \cdot 10^{-3}$	2,1820	BR ₁	0,7750	0,0600	$3,19 \cdot 10^{-3}$	3,7564
[19], FD, 601×601 , $O(h^2)$		0,0583	0,1633	$1,59 \cdot 10^{-3}$	2,1508		0,7767	0,0600	$3,18 \cdot 10^{-3}$	3,6970
[17], FE, M_4 , $p = 6$		0,0588	0,1623	$1,62 \cdot 10^{-3}$	-		0,7751	0,0593	$3,19 \cdot 10^{-3}$	-
Авторский результат 2049×2049 , FD, $O(h^2)$		0,0588	0,1624	$1,62 \cdot 10^{-3}$	2,1620		0,7751	0,0593	$3,19 \cdot 10^{-3}$	3,7865
[20], FD, 601×601 , $O(h^4)$	BL ₂	0,0167	0,0200	$-1,10 \cdot 10^{-6}$	-0,0302	BR ₂	0,9350	0,0683	$-1,40 \cdot 10^{-4}$	-0,3096
[19], FD, 601×601 , $O(h^2)$		0,0167	0,0200	$-1,02 \cdot 10^{-6}$	-0,0310		0,9350	0,0667	$-1,34 \cdot 10^{-4}$	-0,3026
[17], FE, M_4 , $p = 6$		0,0172	0,0203	$-1,13 \cdot 10^{-6}$	-		0,9351	0,0678	$-1,41 \cdot 10^{-4}$	-
Авторский результат 2049×2049 , FD, $O(h^2)$		0,0173	0,0202	$-1,13 \cdot 10^{-6}$	-0,0323		0,9353	0,0681	$-1,41 \cdot 10^{-4}$	-0,3071
[20], FD, 601×601 , $O(h^4)$	BL ₃	-	-	-	-	BR ₃	0,9967	0,0050	$3,75 \cdot 10^{-9}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$
[19], FD, 601×601 , $O(h^2)$		0,0017	0,0017	$1,44 \cdot 10^{-10}$	$7,82 \cdot 10^{-4}$		0,9967	0,0050	$5,19 \cdot 10^{-9}$	$2,57 \cdot 10^{-3}$
[17], FE, M_4 , $p = 6$		0,0011	0,0011	$3,08 \cdot 10^{-11}$	-		0,9960	0,0040	$3,96 \cdot 10^{-9}$	-
Авторский результат 2049×2049 , FD, $O(h^2)$		0,0012	0,0012	$4,91 \cdot 10^{-11}$	$3,02 \cdot 10^{-4}$		0,9959	0,0042	$4,19 \cdot 10^{-9}$	$2,64 \cdot 10^{-3}$
[17], FE, M_4 , $p = 6$	BL ₄	-	-	-	-	BR ₄	0,9998	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$-1,09 \cdot 10^{-13}$	-
Авторский результат 2049×2049 , FD, $O(h^2)$		-	-	-	-		0,9998	$2,48 \cdot 10^{-4}$	$-1,43 \cdot 10^{-13}$	$-1,94 \cdot 10^{-5}$

3. Обоснование стационарного решения задачи при больших числах Рейнольдса

В пользу корректности найденных при $Re \geq 10000$ решений задачи говорит не только их соответствие результатам других исследований, но также еще ряд факторов, которые будут рассмотрены в этом разделе. На рисунке 3 представлены профили горизонтальной и вертикальной компонент скорости в сечениях, проходящих через центр каверны. С одной стороны, видно хорошее совпадение с результатами из [4, 19, 23], а с другой, — насыщение решения по мере увеличения сеточного разбиения от 513×513 до 2049×2049 . Кривые 3 и 4 практически сливаются на общих графиках и различимы лишь на увеличенных фрагментах профилей (см. выноски). Соответствующие общие картины течения в виде полей вектора скорости \mathbf{V} или изолиний функции тока ψ , полученные на этих сетках, визуальных различий не имеют. Что касается устойчивости счета, то неявная форма записи разностных схем позволила использовать числа Куранта от 30 до 70 и даже выше с целью максимального ускорения процесса установления решения. Более подробно вопросы устойчивости итерационного процесса вычислений, эффективности применяемого численного метода, затрат компьютерного времени для различных сеточных разбиений при решении данной задачи изложены в [28].

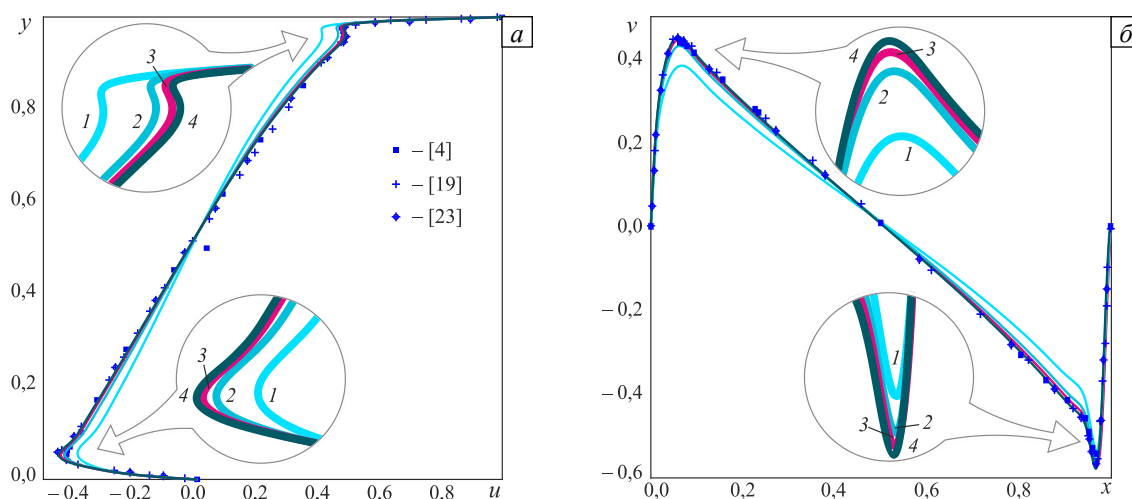


Рис. 3. Профили горизонтальной (а) и вертикальной (б) компонент скорости течения в сечениях, проходящих через центр каверны при $Re = 10000$ и различных сеточных разбиениях: 513×513 (кривая 1), 1025×1025 (2), 1537×1537 (3), 2049×2049 (4)

Влияние схемной вязкости на решение рассматриваемой задачи обсуждалось в литературе неоднократно [29, 30], и в качестве приема, позволяющего ее уменьшить при неизменном разрешении, предлагалось прибегать к неравномерной сетке с минимизацией сеточного шага около стенок каверны в так называемых «зонах больших градиентов» [30]. В силу того, что используемая в настоящей работе схема второго порядка не предполагает выделения схемной вязкости в явном виде путем разложения в ряды Тейлора, в данном случае имеет смысл проанализировать величину схемной диссипации (вязкости), возникающей вследствие локально-одномерной природы разностных уравнений.

На рисунке 4 представлены поля эффективного числа Рейнольдса, рассчитанного по формуле $Re_{эф} = UL/(\nu + \Gamma_a)$, в которой оценочное выражение для Γ_a взято из [26]:

$$\Gamma_a = \nu Re \frac{|\mathbf{V}| \Delta x \Delta y \sin 2\theta}{4(\Delta y \sin^3 \theta + \Delta x \cos^3 \theta)},$$

где θ — угол наклона вектора скорости к направлению оси x (его значение изменяется от 0 до $\pi/2$), Δx , Δy — сеточные шаги.

Нетрудно видеть, что изолинии $Re_{эф}$ приведены с шагом, равным 10% от номинального значения Re , и более светлые участки фона соответствуют меньшим значениям $Re_{эф}$. При этом четыре фрагмента рисунка делятся на две группы: левую (Рис. 4а, в) и правую (Рис. 4б, г), в которых структуры полей $Re_{эф}$ практически совпадают. Справедливость такого деления подтверждается значениями $Re_{эф}$, взятыми в процентном отношении к Re (см. Табл. 2). Такое сохранение структуры полей $Re_{эф}$ при одновременном удвоении как количества узлов сеточного разбиения области вдоль каждой координаты,

так и величины Re , находится в полном согласии с оценкой из работы [30], в которой говорится, что при двумерных расчетах для сохранения влияния схемной диссипации на неизменном уровне необходимо при росте Re число точек разбиения увеличивать как $Re^{2/k}$, где k — порядок разностной аппроксимации исходных уравнений.

В такой ситуации проверка на корректность решения задачи при больших числах Рейнольдса основывается на отмеченном практическом совпадении полей $Re_{эф}$ в каждой из групп. Действительно, решение при $Re = 5000$ признается правильным всеми исследователями, поскольку нижней границе потери стабильности решения соответствует $Re_* = 7000 \div 7500$. С другой стороны, если допустить обоснованность решения при $Re = 10000$ на сетке 1025×1025 (Рис. 4б) в силу того, что подобное решение было найдено в [1, 19–21, 23] на похожих сеточных разбиениях, то тем более будет обоснованным решение, соответствующее фрагменту 4в, полученное на более подробной сетке 2049×2049 .

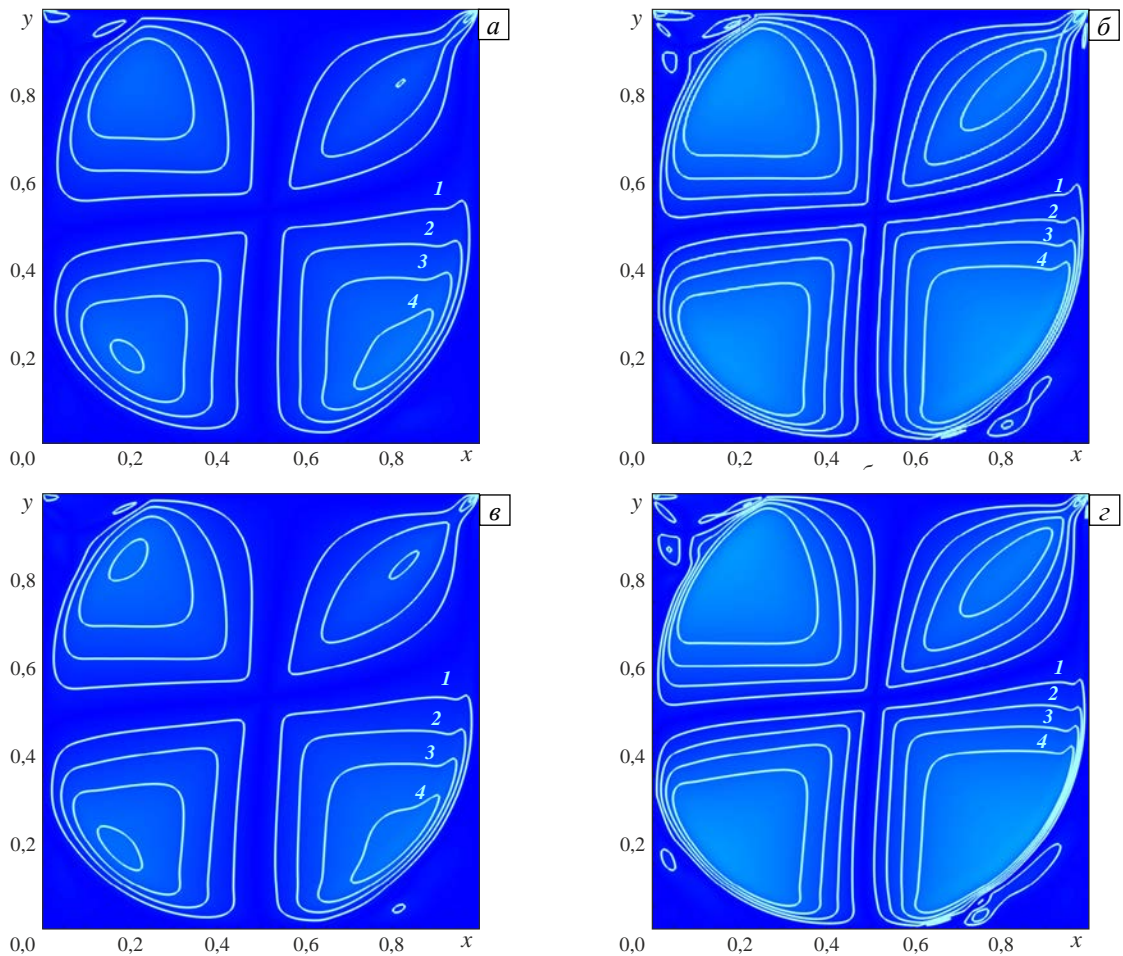


Рис. 4. Поля $Re_{эф}$ в зависимости от числа Рейнольдса и сеточного разбиения области: при $Re = 5000$, 1025×1025 (а) $Re_{эф}$ составляет 4500 (кривая 1), 4000 (2), 3500 (3), 3000 (4); при $Re = 10000$, 1025×1025 (б) $Re_{эф}$ составляет 9000 (1), 8000 (2), 7000 (3), 6000 (4); при $Re = 10000$, 2049×2049 (в) $Re_{эф}$ составляет 9000 (1), 8000 (2), 7000 (3), 6000 (4); при $Re = 20000$, 2049×2049 (г) $Re_{эф}$ составляет 18000 (1), 16000 (2), 14000 (3), 12000 (4)

Таблица 2. Минимальные и средние значения полей $Re_{эф}$, изображенных на рисунке 4

Левая группа			Правая группа		
Фрагмент рисунка	$Re_{эф}$ (% от Re)		Фрагмент рисунка	$Re_{эф}$ (% от Re)	
Рис. 4а ($Re = 5000$)	минимум	2736 (55%)	Рис. 4б ($Re = 10000$)	минимум	3816 (38%)
	в среднем	4234 (85%)		в среднем	7549 (75%)
Рис. 4в ($Re = 10000$)	минимум	5406 (54%)	Рис. 4г ($Re = 20000$)	минимум	7524 (38%)
	в среднем	8432 (84%)		в среднем	15022 (75%)

По причине одинакового качественного вида картин полей $Re_{эф}$ у пары фрагментов 4а и 4в и у пары 4б и 4г и в силу совпадения процентных значений $Re_{эф}$ от Re в среднем и по минимуму в этих же парах (см. Табл. 2), можно сделать вывод о корректности решения при $Re = 20000$ на сетке 2049×2049 .

Процесс сходимости решения к искомому стационарному состоянию полезно рассмотреть также с точки зрения поведения динамической системы, зависящей от единственного параметра — Re . На рисунке 5 представлены кривые сходимости решения в координатах $(\lg D_V, \lg \|p'\|_1)$. Отступление от традиционных координат фазового пространства позволяет представить на плоскости поведение системы в целом, а не локальные взаимоотношения в произвольно выбранной точке расчетной области, например, пары (u, v) как в [15]. На всех четырех фрагментах рисунка сходимость начинается с монотонного участка, но только на фрагменте 5а кривая сходимости полностью монотонная. С ростом Re устойчивость процесса сходимости понижается, причем настолько, что на фрагментах 5в ($Re = 10000$) и 5г ($Re = 20000$) первоначально монотонный участок сразу же, без «раскачки», как на фрагменте рисунка 5б, переходит в хаотичный. Характерной и в то же время естественной особенностью поведения кривых сходимости в окрестности устойчивого узла на первых трех фрагментах рисунка 5 является их монотонность. Тем интереснее фрагмент 5г, на котором кривая так и не выходит на монотонный участок и до последнего момента демонстрирует четкий периодический рисунок. Сходимость при этом достигается за счет уменьшения амплитуды взаимных колебаний пары $(\lg D_V, \lg \|p'\|_1)$, что особенно хорошо видно на выноске справа внизу, в которой кривая построена в линейных координатах $(D_V, \|p'\|_1)$.

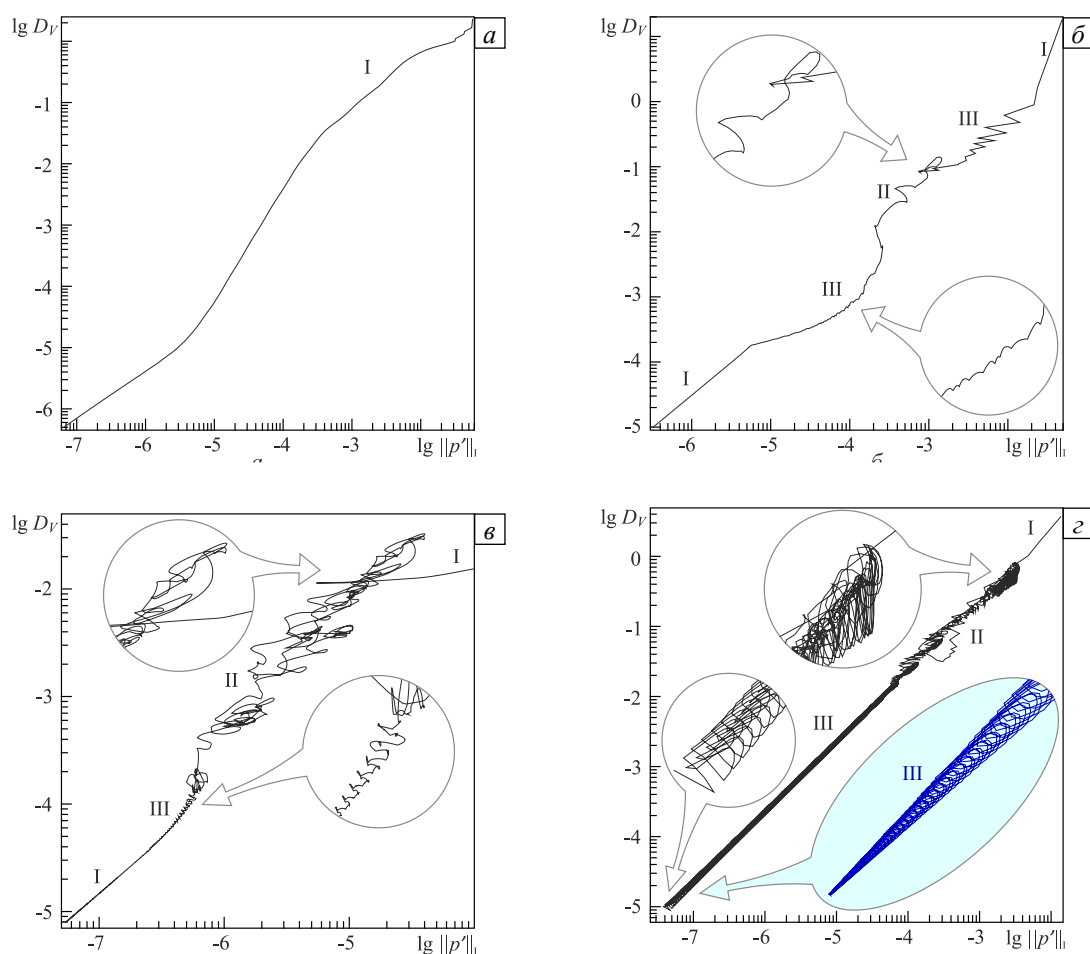


Рис. 5. Кривые сходимости (установления) решения в зависимости от Re и сеточного разрешения расчетной области: $Re = 1000$, 513×513 (а); $Re = 5000$, 1025×1025 (б); $Re = 10000$, 2049×2049 (в); $Re = 20000$, 2049×2049 (г); участки кривых: I – монотонный, II – хаотичный, III – периодический

На рисунке 6 показаны профили параметров течения для различных чисел Re в сечениях, проходящих через центр каверны. Сеточное разбиение области во всех вариантах составляет 2049×2049 . На первых двух фрагментах рисунка также приведены данные по соответствующим профилям скоростей из работ [4, 19, 23] и предельный профиль компоненты u при $Re \rightarrow \infty$ из [3], совмещенный с сечением профиля u при $Re = 20000$. Небольшое расхождение полученных результатов с данными других авторов объясняется большей спрямленностью последних в центральной области каверны. Любопытно, что при этом предельный профиль из [3] имеет явный S -образный изгиб. Также хорошо видно, что по мере роста числа Re толщина пограничного слоя уменьшается, а интенсивность завихренности ω в пограничном слое, наоборот, возрастает. В целом же вычисленные профили можно характеризовать как самоподобные со слабой динамикой в зависимости от числа Рейнольдса лишь в узкой зоне пограничного слоя.

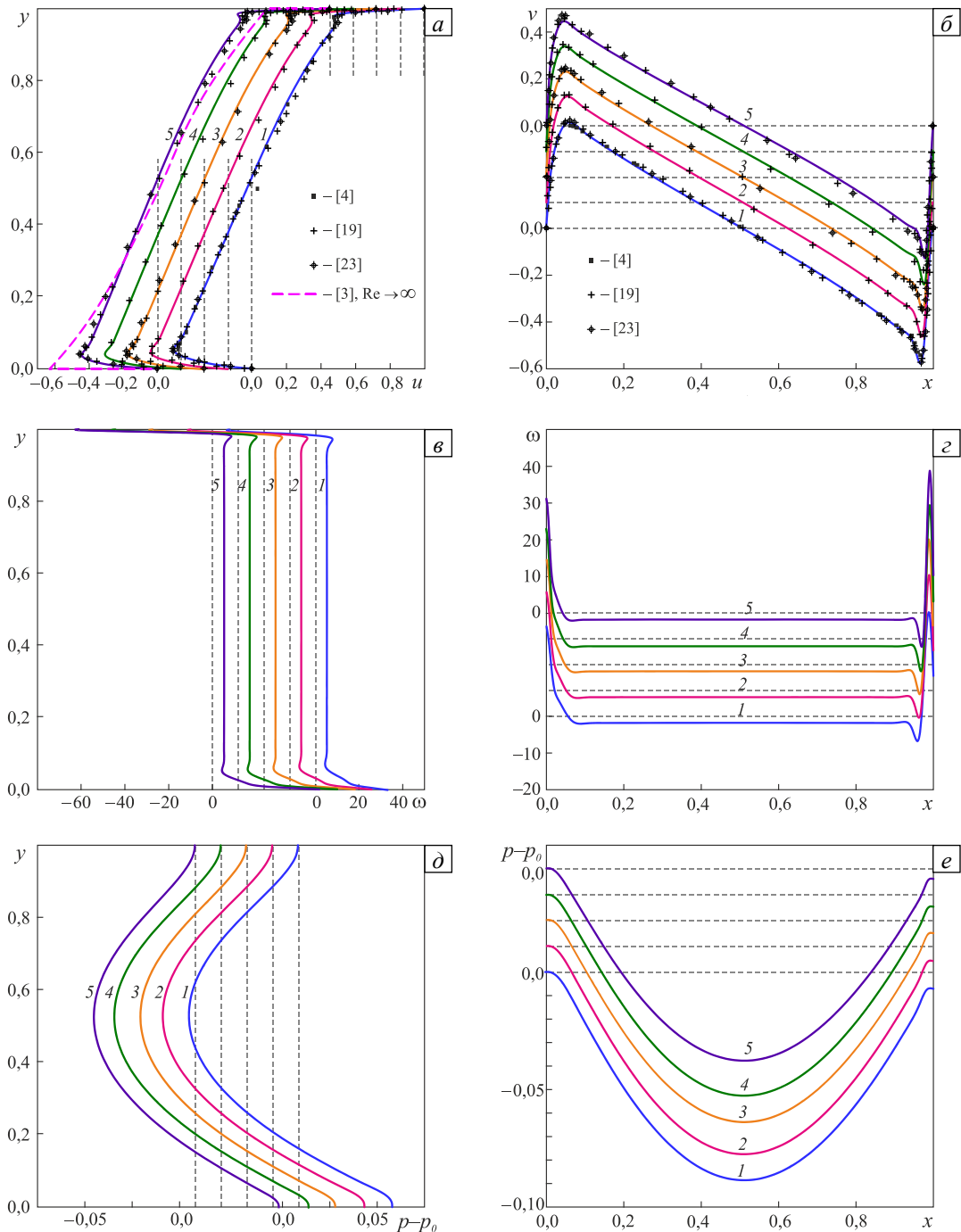


Рис. 6. Профили компонент u и v вектора скорости, завихренности ω и давления $(p - p_0)$ (p_0 – давление на крышке) в вертикальном и горизонтальном сечениях, проходящих через центр каверны: u (а); v (б); ω (в, г); $(p - p_0)$ (д, е) при различных значениях Re : 10000 (кривая 1), 12500 (2), 15000 (3), 17500 (4), 20000 (5)

Картина течения при $Re = 20000$ представлена на рисунке 7 и, по сравнению с вариантом при $Re = 10000$ (см. Рис. 2), имеет ряд отличий. Во-первых, появились два новых вихря: TL_2 и BL_4 . Во-вторых, нижние вихри первого уровня BL_1 и BR_2 стали тоньше, за счет чего произошло увеличение размеров нижних вихрей следующих уровней. В-третьих, у вихрей TL_1 и BR_1 образовались вторые центры вращения BR_1^x , TL_1^x и, как следствие, седловые точки BR_1^x , TL_1^x . В этой ситуации логично предположить, что в ближайшем будущем (в смысле роста Re) можно ожидать деление вихрей TL_1 и BR_1 на более мелкие части. Однако, как следует из работ [21–23], для этого необходимо увеличить Re еще на $20000 \div 30000$ единиц, что, разумеется, требует дополнительной проверки.

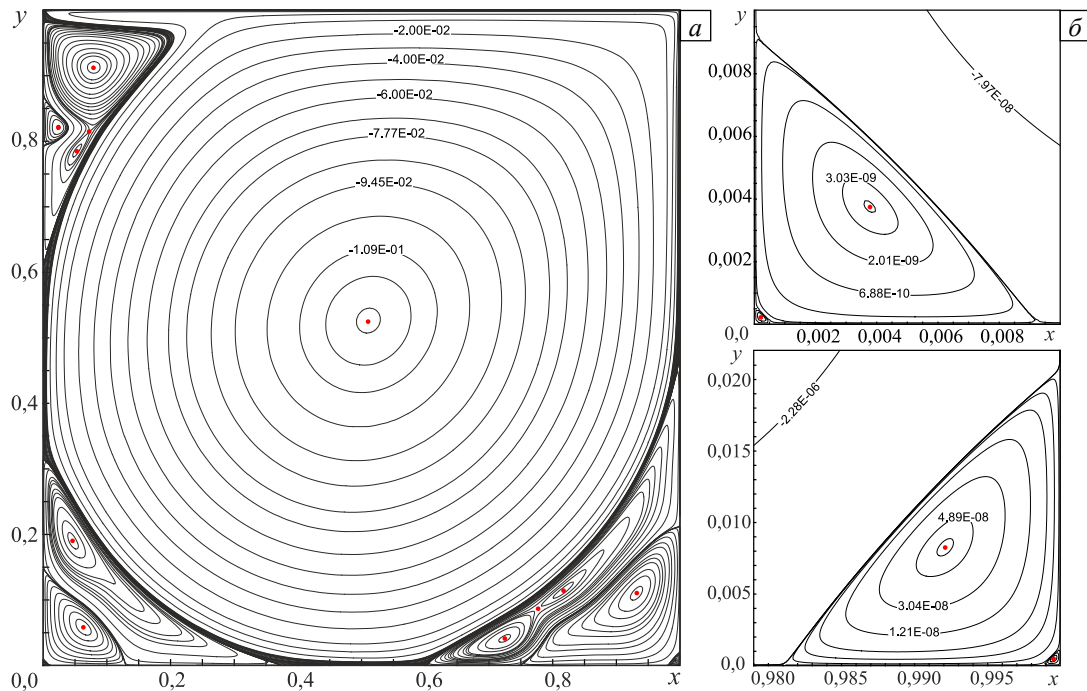


Рис. 7. Общая картина течения при $Re = 20000$ и сетке 2049×2049 (а); вихри BL_3 , BL_4 , BR_3 , BR_4 в увеличенном виде (б)

В таблицах 3 и 4 приведены параметры как вторичных вихрей с седловыми точками, так и классических. В таблице 4 расхождение авторских результатов и найденных другими исследователями при повышенной точности аппроксимации более заметно. Не спасает даже очень подробное сеточное разбиение. Проблема эта не нова: еще в [3] во избежание возникающих осцилляций приближенных решений при повышении Re приходилось уменьшать сеточный шаг, что в свою очередь затрудняло процесс получения решения, обеспечивающего наперед заданную малую невязку. Следовательно, для сохранения точности результатов необходимо либо дальнейшее увеличение сеточного разрешения (что приводит к абсолютно неразумному времени счета [31, 32] без гарантии установления решения с требуемой точностью), либо повышение порядка аппроксимации [17, 20].

В свое время в работе [24] было получено аналитическое решение, согласно которому течение вязкой жидкости вблизи острого угла должно состоять из последовательности вихрей (так называемой цепочки вихрей Моффатта, Рис. 8), движение которых описывается уравнениями Стокса. Решение это представлено как $r^{(s)} = \rho^{(s)}/\rho^{(0)}$, $w^{(s)} = V^{(s)}/V^{(0)}$, где ρ — характерный размер вихря, $V^{(s)}$ — модуль скорости потока в точке стыка соседних вихрей, s — номер вихря в цепочке вихрей Моффатта. При этом индекс $s = 0$ соответствует базовому вихрю, параметры которого $\rho^{(0)}$ и $V^{(0)}$ считаются известными.

Таблица 3. Параметры вторичных особых точек вихрей при $Re = 20000$ и сеточном разрешении 2049×2049 узлов

Вихрь	Координаты центров		Значения экстремумов	
	x_c	y_c	Функция тока ψ_c	Завихренность ω_c
BR_1^2	0,8210	0,1149	0,0018	6,6544
BR_1^x	0,7808	0,0867	0,0016	6,5307
TL_1^2	0,0531	0,7871	$5,00 \cdot 10^{-4}$	3,0605
TL_1^x	0,0714	0,8147	$4,43 \cdot 10^{-4}$	2,5669

Таблица 4. Параметры вихрей при $Re = 20000$ и сеточном разрешении 2049×2049 узлов; FD – метод конечных разностей; FE – метод конечных элементов; M_4 – сеточное покрытие области из 49156 треугольников; индекс m в выражении $O(h^m)$ означает порядок разностной аппроксимации, p – порядок аппроксимирующего полинома

Источник цитирования и параметры решения	Вихрь	Координаты центров		Значения экстремумов		Вихрь	Координаты центров		Значения экстремумов	
		x_c	y_c	Функция тока ψ_c	Завихренность ω_c		x_c	y_c	Функция тока ψ_c	Завихренность ω_c
[20], FD, $601 \times 601, O(h^4)$	СТ	0,5100	0,5267	-0,1217	-1,9000					
[17], FE, $M_4, p = 6$		0,5090	0,5259	-0,1221	-					
Авторский результат $2049 \times 2049, FD, O(h^2)$		0,5107	0,5264	-0,1140	-1,7619					
[20], FD, $601 \times 601, O(h^4)$	TL ₁	0,0800	0,9117	$3,72 \cdot 10^{-3}$	2,4976	TL ₂	0,0250	0,8200	$-7,08 \cdot 10^{-5}$	-0,9830
[17], FE, $M_4, p = 6$		0,0827	0,9123	$4,10 \cdot 10^{-3}$	-		0,0291	0,8153	$-1,31 \cdot 10^{-4}$	-
Авторский результат $2049 \times 2049, FD, O(h^2)$		0,0794	0,9124	$3,63 \cdot 10^{-3}$	2,5030		0,0242	0,8211	$-6,83 \cdot 10^{-5}$	-0,9468
[20], FD, $601 \times 601, O(h^4)$	BL ₁	0,0483	0,1817	$1,61 \cdot 10^{-3}$	2,8851	BR ₁	0,7200	0,0433	$2,80 \cdot 10^{-3}$	6,1253
[17], FE, $M_4, p = 6$		0,0480	0,1832	$1,64 \cdot 10^{-3}$	-		0,7229	0,0431	$2,63 \cdot 10^{-3}$	-
Авторский результат $2049 \times 2049, FD, O(h^2)$		0,0466	0,1897	$1,72 \cdot 10^{-3}$	3,2979		0,7249	0,0412	$3,04 \cdot 10^{-3}$	7,3253
[20], FD, $601 \times 601, O(h^4)$	BL ₂	0,0583	0,0533	$-7,81 \cdot 10^{-5}$	-0,2433	BR ₂	0,9300	0,1050	$-4,61 \cdot 10^{-4}$	-0,5545
[17], FE, $M_4, p = 6$		0,0595	0,0545	$-8,58 \cdot 10^{-5}$	-		0,9304	0,1049	$-4,63 \cdot 10^{-4}$	-
Авторский результат $2049 \times 2049, FD, O(h^2)$		0,0632	0,0579	$-1,11 \cdot 10^{-4}$	-0,2847		0,9319	0,1101	$-5,69 \cdot 10^{-4}$	-0,6740
[20], FD, $601 \times 601, O(h^4)$	BL ₃	0,0033	0,0033	$2,36 \cdot 10^{-9}$	$1,81 \cdot 10^{-3}$	BR ₃	0,9933	0,0067	$2,72 \cdot 10^{-8}$	$4,97 \cdot 10^{-3}$
[17], FE, $M_4, p = 6$		0,0035	0,0035	$2,44 \cdot 10^{-9}$	-		0,9932	0,0070	$2,75 \cdot 10^{-8}$	-
Авторский результат $2049 \times 2049, FD, O(h^2)$		0,0037	0,0037	$3,43 \cdot 10^{-9}$	$2,19 \cdot 10^{-3}$		0,9919	0,0081	$5,03 \cdot 10^{-8}$	$8,01 \cdot 10^{-3}$
[17], FE, $M_4, p = 6$	BL ₄	$2,09 \cdot 10^{-4}$	$2,09 \cdot 10^{-4}$	$-6,74 \cdot 10^{-14}$	-	BR ₄	0,9996	0,0004	$-7,58 \cdot 10^{-13}$	-
Авторский результат $2049 \times 2049, FD, O(h^2)$		$2,44 \cdot 10^{-4}$	$2,44 \cdot 10^{-4}$	$-1,09 \cdot 10^{-13}$	$-2,22 \cdot 10^{-5}$		0,9995	0,0005	$-1,49 \cdot 10^{-12}$	$-6,32 \cdot 10^{-5}$

В таблице 5, где за базовые вихри приняты вихри второго уровня BL₂ и BR₂, приведены численные и аналитические результаты, сравнение которых говорит об их близости: относительная ошибка в среднем не превышает 15÷20%. Исключение составляют значения $r^{(s)}$ и $w^{(s)}$ для правого нижнего угла при $Re = 17500$ и 20000 . Дело в том, что здесь вихрь BR₂ уже не в полной мере соответствует стоковому течению, поскольку нарушена симметрия структуры вихря относительно биссектрисы угла (Рис. 7) — на таких масштабах начинает сказываться конвективный перенос. Однако если за базовый вихрь ($s=0$) принять симметричный BR₃, то тогда ошибка по отношению к аналитическому решению не превысит 10÷15%. В этом нетрудно убедиться, если разделить параметры с индексом $s=2$ на соответствующие параметры с индексом $s=1$.

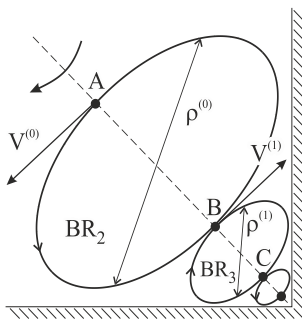


Рис. 8. Схема цепочки вихрей Моффатта применительно к правому нижнему углу каверны

В литературе практически отсутствуют изображения вихрей четвертого уровня в силу малости их относительных характерных размеров (менее 10^{-3}). В настоящем исследовании, благодаря неравномерной сетке (минимальный шаг около стенки составлял $\approx 10^{-4}$), эти вихри удалось «проявить». На рисунке 9, где представлены сами вихри при различных значениях Re , сеточные линии позволяют оценить точность изображенных структур. Основной особенностью вихрей как четвертого, так и третьего уровней (Рис. 2б, Табл. 1; Рис. 7б, Табл. 4), является расположение их центров на биссектрисах углов, что говорит об исключительно стоковом характере течения в нижних углах каверны при масштабах менее 0,1 в рассматриваемом диапазоне чисел Re .

Таблица 5. Параметры вихрей $BL_2 \div BL_4$ и $BR_2 \div BR_4$ для различных Re , вычисленные авторами и найденные согласно аналитическому решению Моффатта для прямого угла

Значение Re	Уровень вихря s в цепочке Моффатта	$r^{(s)}$			$w^{(s)}$		
		[24]	Авторские результаты		[24]	Авторские результаты	
			BL	BR		BL	BR
10000	0	1	0,04920	0,15570	1	$3,91 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-2}$
	1	0,06140	0,05894	0,06489	$4,86 \cdot 10^{-4}$	$4,68 \cdot 10^{-4}$	$4,95 \cdot 10^{-4}$
	2	0,00377	–	0,00321	$2,36 \cdot 10^{-7}$	–	$2,48 \cdot 10^{-7}$
12500	0	1	0,07730	0,17950	1	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$2,04 \cdot 10^{-2}$
	1	0,06140	0,06084	0,06715	$4,86 \cdot 10^{-4}$	$4,65 \cdot 10^{-4}$	$5,11 \cdot 10^{-4}$
	2	0,00377	0,00388	0,00334	$2,36 \cdot 10^{-7}$	$3,92 \cdot 10^{-7}$	$2,33 \cdot 10^{-7}$
15000	0	1	0,10490	0,19000	1	$4,13 \cdot 10^{-3}$	$2,62 \cdot 10^{-2}$
	1	0,06140	0,06101	0,07105	$4,86 \cdot 10^{-4}$	$4,31 \cdot 10^{-4}$	$5,80 \cdot 10^{-4}$
	2	0,00377	0,00350	0,00368	$2,36 \cdot 10^{-7}$	$3,12 \cdot 10^{-7}$	$2,78 \cdot 10^{-7}$
17500	0	1	0,12500	0,21400	1	$7,07 \cdot 10^{-3}$	$3,17 \cdot 10^{-2}$
	1	0,06140	0,06480	0,07430	$4,86 \cdot 10^{-4}$	$4,87 \cdot 10^{-4}$	$7,10 \cdot 10^{-4}$
	2	0,00377	0,00432	0,00397	$2,36 \cdot 10^{-7}$	$2,60 \cdot 10^{-7}$	$3,31 \cdot 10^{-7}$
20000	0	1	0,14060	0,22690	1	$9,67 \cdot 10^{-3}$	$3,45 \cdot 10^{-2}$
	1	0,06140	0,06579	0,08726	$4,86 \cdot 10^{-4}$	$5,13 \cdot 10^{-4}$	$1,06 \cdot 10^{-3}$
	2	0,00377	0,00327	0,00485	$2,36 \cdot 10^{-7}$	$2,43 \cdot 10^{-7}$	$5,39 \cdot 10^{-7}$

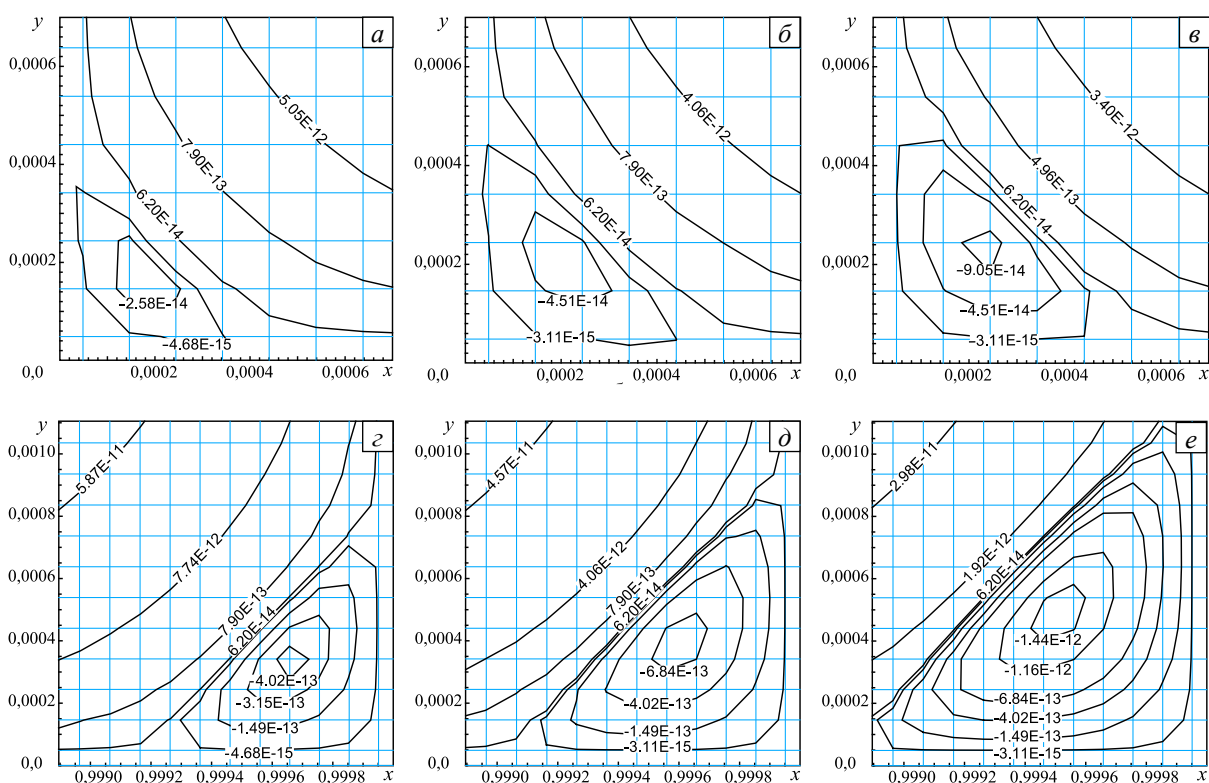


Рис. 9. Вихри четвертого уровня BL_4 (а–в) и BR_4 (z–е) при сетке 2049×2049 и различных Re : $Re=15000$ (а, z), $Re=17500$ (б, д), $Re=20000$ (в, е)

4. Заключение

В работе получены результаты численного решения классической задачи, в которой рассматривается стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в плоской каверне с подвижной верхней крышкой при больших числах Рейнольдса ($Re \geq 10000$). Для $Re=10000$ и 20000 приведены подробные структуры течений вплоть до вихрей четвертого уровня, которые удалось обнаружить вследствие использования неравномерных сеток высокого разрешения. Показана сложная структура вихрей первого уровня при $Re=20000$, а именно наличие двух центров вращения и седловых точек, а также ярко выраженный стоковский характер течения вихрей третьего и четвертого уровней.

В этом смысле вихри второго уровня занимают промежуточное положение. В диапазоне чисел Re от 15000 до 20000 явным образом продемонстрирована эволюция вихрей четвертого уровня в нижних углах каверны. Показаны профили компонент скорости, завихренности и давления в сечениях, проходящих через центра каверны. Достоверность авторских результатов подтверждается, где это возможно, сравнением с литературными данными.

Процесс сходимости (установления) решения анализируется с позиции поведения динамических систем в зависимости от значения параметра системы — числа Re . Выявлен характер кривой сходимости и, в частности, любопытный случай при $Re = 20000$, когда сходимость решения достигается не за счет конечной монотонизации кривой, а за счет уменьшения амплитуды взаимных колебаний параметров динамической системы при неизменном сохранении периодической структуры самой кривой сходимости.

Изучение вопроса построения решения задачи при $Re \geq 10000$ с точки зрения насыщения решения в условиях кратного увеличения разрешения сеточного разбиения области, соотношения структур полей эффективного числа Рейнольдса для различных Re и сеточных разбиений, сравнения с аналитическими решениями в предельных ситуациях, а также сопоставления с численными результатами других исследователей однозначно говорит о корректности найденных стационарных решений поставленной задачи при больших числах Рейнольдса.

В итоге на основании обзора литературы и результатов, установленных авторами данной статьи, можно сделать следующие выводы:

1. Современные вычислительные технологии позволяют находить стационарные решения задач, изучающих течения несжимаемой вязкой жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса в диапазоне $10000 \leq Re \leq 20000$ и, возможно, еще больших.
2. С ростом числа Re устойчивость процесса установления решения резко снижается.
3. Устойчивость вычислений связана с точностью представления решения: чем выше порядок аппроксимации и/или подробнее сеточное разрешение, тем устойчивей расчет.
4. Повышение точности решения целесообразнее производить за счет более высокого порядка аппроксимации, поскольку увеличение сеточного разрешения влечет за собой неразумный рост времени вычислений.

Литература

1. *Erturk E.* Discussions on driven cavity flow // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 2009. – Vol. 60, no. 3. – P. 275-294. DOI
2. *Симуни Л.М.* Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме // ПМТФ. – 1965. – № 6. – С. 106-108.
3. *Burggraf O.R.* Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows // *J. Fluid Mech.* – 1966. – Vol. 24, no. 1. – P. 113-151. DOI
4. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys.* – 1982. – Vol. 48, no. 3. – P. 387-411. DOI
5. *Benjamin A.S., Denny V.E.* On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re // *J. Comput. Phys.* – 1979. – Vol. 33, no. 3. – P. 340-358. DOI
6. *Barragy E., Carey G.F.* Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // *Comput. Fluids.* – 1997. – Vol. 26, no. 5. – P. 453-468. DOI
7. *Schreiber R., Keller H.B.* Driven cavity flows by efficient numerical techniques // *J. Comput. Phys.* – 1983. – Vol. 49, no. 2. – P. 310-333. DOI
8. *Rogers S.E., Kwak D.* An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations // *Appl. Numer. Math.* – 1991. – Vol. 8, no. 1. – P. 43-64. DOI
9. *Liao S.-J., Zhu J.-M.* A short note on high-order streamfunction-vorticity formulations of 2D steady state Navier–Stokes equations // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 1996. – Vol. 22, no. 1. – P. 1-9. DOI
10. *Bruneau C.-H., Jouron C.* An efficient scheme for solving steady incompressible Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.* – 1990. – Vol. 89, no. 2. – P. 389-413. DOI
11. *Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.* Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // ЖВММФ. – 1999. – Т. 39, № 8. – С. 1378-1392.
12. *Shankar P.N., Deshpande M.D.* Fluid mechanics in the driven cavity // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2000. – Vol. 32. – P. 93-136. DOI
13. *Kupferman R.* A central-difference scheme for a pure stream function formulation of incompressible viscous flow // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2001. – Vol. 23, no. 1. – P. 1-18. DOI
14. *Marinova R.S., Christov C.I., Marinov T.T.* A fully coupled solver for incompressible Navier–Stokes equations using operator splitting // *Int. J. Comput. Fluid D.* – 2003. – Vol. 17, no. 5. – P. 371-385. DOI
15. *Bruneau C.-H., Saad M.* The 2D lid-driven cavity problem revisited // *Comput. Fluids.* – 2006. – Vol. 35, no. 3. – P. 326-348. DOI
16. *Kumar D.S., Kumar K.S., Kumar M.D.* A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method // *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics.* – 2009. – Vol. 3, no. 3. – P. 336-354.
17. *Shapeev A.V., Lin P.* An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2009. – Vol. 31, no. 3. – P. 1874-1900. DOI
18. *Волков П.К., Переверзев А.В.* Метод конечных элементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «скорости–давление» // Матем. моделирование. – 2003. – Т. 15, № 3. – С. 15-28.

19. Erturk E., Corke T.C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 2005. – Vol. 48, no. 7. – P. 747-774. DOI
20. Erturk E., Gökçöl C. Fourth-order compact formulation of Navier–Stokes equations and driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 2006. – Vol. 50, no. 4. – P. 421-436. DOI
21. Cardoso N., Bicudo P. Time dependent simulation of the driven lid cavity at high Reynolds number // arXiv: D0809.3098v2[physics.flu-dyn]. – 20 November 2009. – P. 1-20. (URL: <http://arxiv.org/pdf/0809.3098.pdf>).
22. Hachem E., Rivaux B., Kloczko T., Digonnet H., Coupez T. Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number // *J. Comput. Phys.* – 2010. – Vol. 229, no. 23. – P. 8643-8665. DOI
23. Wahba E.M. Steady flow simulations inside a driven cavity up to Reynolds number 35000 // *Comput. Fluids.* – 2012. – Vol. 66. – P. 85-97. DOI
24. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* – 1964. – Vol. 18, no. 1. – P. 1-18. DOI
25. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Шенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // *ЖВММФ.* – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197-207. DOI
26. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
27. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Ускорение полинейного рекуррентного метода в подпространствах Крылова // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика.* – 2011. – № 2. – С. 45-54.
28. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное решение уравнений Навье–Стокса при моделировании двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика.* – 2014. – № 3. – С. 94-108.
29. Белов И.А., Исаев С.А. Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и больших числах Рейнольдса // *ПМТФ.* – 1982. – № 1. – С. 41-45.
30. Копченков В.И., Крайко А.Н., Левин М.П. К использованию существенно неравномерных сеток при численном решении уравнений Навье–Стокса // *ЖВММФ.* – 1982. – Т. 22, № 6. – С. 1457-1467. DOI
31. Каушанова С.В., Окулова Н.Н. Математическое моделирование течения вязкой теплопроводной жидкости с использованием метода LS-STAG // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки.* – 2012. – № S2. – С. 86-97.
32. Деги Д.В., Старченко А.В. Численное решение уравнений Навье–Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика.* – 2012. – № 2. – С. 88-98.

References

1. Erturk E. Discussions on driven cavity flow. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 2009, vol. 60, no. 3, pp. 275-294. DOI
2. Simuni L.M. Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме [Numerical solution of the problem of fluid motion in a square cavity]. *PMTF – J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1965, no. 6, pp. 106-108.
3. Burggraf O.R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 24, no. 1, pp. 113-151. DOI
4. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 1982, vol. 48, no. 3, pp. 387-411. DOI
5. Benjamin A.S., Denny V.E. On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re. *J. Comput. Phys.*, 1979, vol. 33, no. 3, pp. 340-358. DOI
6. Barragy E., Carey G.F. Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements. *Comput. Fluids.*, 1997, vol. 26, no. 5, pp. 453-468. DOI
7. Schreiber R., Keller H.B. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comput. Phys.*, 1983, vol. 49, no. 2, pp. 310-333. DOI
8. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations. *Appl. Numer. Math.*, 1991, vol. 8, no. 1, pp. 43-64. DOI
9. Liao S.-J., Zhu J.-M. A short note on high-order streamfunction-vorticity formulations of 2D steady state Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1996, vol. 22, no. 1, pp. 1-9. DOI
10. Bruneau C.-H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 1990, vol. 89, no. 2, pp. 389-413. DOI
11. Garanzha V.A., Kon'shin V.N. Numerical algorithms for viscous fluid flows based on high-order accurate conservative compact schemes. *Comp. Math. Math. Phys.*, 1999, v. 39, no. 8, pp. 1321-1334.
12. Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2000, vol. 32, pp. 93-136. DOI
13. Kupferman R. A central-difference scheme for a pure stream function formulation of incompressible viscous flow. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2001, vol. 23, no. 1, pp. 1-18. DOI
14. Marinova R.S., Christov C.I., Marinov T.T. A fully coupled solver for incompressible Navier–Stokes equations using operator splitting. *Int. J. Comput. Fluid D.*, 2003, vol. 17, no. 5, pp. 371-385. DOI
15. Bruneau C.-H., Saad M. The 2D lid-driven cavity problem revisited. *Comput. Fluids*, 2006, vol. 35, no. 3, pp. 326-348. DOI
16. Kumar D.S., Kumar K.S., Kumar M.D. A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2009, v. 3, no. 3, pp. 336-354.
17. Shapeev A.V., Lin P. An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2009, vol. 31, no. 3, pp. 1874-1900. DOI
18. Volkov P.K., Pereverzev A.V. Метод конечноэлементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «скорост–давление» [Finite elements method to solve the boundary-value problems of regularizing equations for incompressible liquid written for velocity–pressure variables]. *Математическое Моделирование – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2003, vol. 15, no. 3, pp. 15-28.

19. Erturk E., Corke T.C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 2005, vol. 48, no. 7, pp. 747-774. DOI
20. Erturk E., Gökçöl C. Fourth-order compact formulation of Navier–Stokes equations and driven cavity flow at high Reynolds numbers. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 2006, vol. 50, no. 4, pp. 421-436. DOI
21. Cardoso N., Bicudo P. *Time dependent simulation of the driven lid cavity at high Reynolds number*. arXiv: D0809.3098v2[physics.flu-dyn], 20 November 2009. 20 p. (URL: <http://arxiv.org/pdf/0809.3098.pdf>).
22. Hachem E., Rivaux B., Kloczko T., Digonnet H., Coupez T. Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number. *J. Comput. Phys.*, 2010, vol. 229, no. 23, pp. 8643-8665. DOI
23. Wahba E.M. Steady flow simulations inside a driven cavity up to Reynolds number 35000. *Comput. Fluids*, 2012, vol. 66, pp. 85-97. DOI
24. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 18, no. 1, pp. 1-18. DOI
25. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1975, vol. 15, no. 1. – P. 190-200. DOI
26. Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197 p.
27. Fomin A.A., Fomina L.N. Uskorenie polinejnogo rekurrentnogo metoda v podprostranstvakh Krylova [Acceleration of the line-by-line recurrent method in Krylov subspaces]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2011, no. 2, pp. 45-54.
28. Fomin A. A., Fomina L. N. Chislennoe reshenie uravnenij Navie–Stoksa pri modelirovanii dvumernyx techenij vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti [Numerical solution of the Navier–Stokes equations in the modeling of two-dimensional viscous incompressible fluid flows]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 3, pp. 94-108.
29. Belov I.A., Isaev S.A. Tsirkulyatsionnoe dvizhenie zhidkosti v pryamougolnoj kaverne pri srednikh i bolshikh chislakh Reinoldsa [Circular motion of fluid in a rectangular cavity at medium and high Reynolds numbers]. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1982, no. 1, pp. 41-45.
30. Kopchenov V.I., Kraiko A.N., Levin M.P. Essentially non-uniform meshes for the numerical solution of the Navier–Stokes equations. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 183-193. DOI
31. Kashtanova S.V., Okulova N.N. Matematicheskoe modelirovanie techeniya viazkoj teploprovodnoj zhidkosti s ispolzovaniem metoda LS-STAG [Mathematical modeling of viscous fluid flows using the method LS-STAG]. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences*, 2012, no. S2, pp. 86-97.
32. Degi D.V., Starchenko A.V. Chislennoe reshenie uravnenij Navie–Stoksa na kompyuterakh s parallelnoj arkhitekturoj [Numerical solution of Navier–Stokes equations on computers with parallel architecture]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2012, no. 2, pp. 88-98.

Поступила в редакцию 04.06.2014; опубликована в электронном виде 30.12.2014

Сведения об авторах

Фомин Александр Аркадьевич, кфмн, вед. эксперт, Кузбасский государственный университет им. Т.Ф. Горбачева (КузГТУ), 650000, Россия, Кемерово, ул. Весенняя, д. 28; e-mail: fomin_aa@mail.ru

Фомина Любовь Николаевна, кфмн, доц., Кемеровский государственный университет (КемГУ), 650043, Россия, Кемерово, ул. Красная, д. 6; e-mail: lubafomina@mail.ru