

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.30
УДК 539.376+539.4

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ДО РАЗРУШЕНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И.А. Банщикова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

В рамках кинетической теории ползучести Работнова, описывающей все три стадии ползучести с учётом накопления повреждений, исследуется напряжённо-деформированное состояние (НДС) кольцевых нагруженных осесимметрично пластин в любой момент времени вплоть до начала разрушения. Временем начала разрушения считается момент, когда в какой-либо точке пластины параметр повреждённости достигает критического значения, равного единице (неповреждённому материалу отвечает нулевая величина этого параметра). Расчёт НДС осуществляется двумя способами, а затем проводится сравнение результатов. В первом случае задача неустановившейся ползучести с учётом повреждаемости сводится к аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала пластины. Для упрощения решения в определяющих уравнениях критерий Мизеса линейризуется, что, по сути, эквивалентно использованию критерия Треска–Сен-Венана. Чтобы найти истинное решение, необходимо известное решение при установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени. Для нахождения этих функций получена соответствующая система уравнений. В основе другого способа расчёта лежит метод конечных элементов комплекса ANSYS; при этом в определяющие уравнения входит критерий Мизеса, а для моделирования накопления повреждений в пакете активируется пользовательская процедура UserCreep. Построены зависимости времени начала разрушения от величины изгибающего момента, приложенного по контуру внутреннего отверстия кольцевой пластины. Диаграммы, полученные двумя способами, показали, что применение критерия Треска–Сен-Венана даёт нижнюю оценку времени начала разрушения конструкции.

Ключевые слова: кольцевые осесимметричные пластины, изгиб, ползучесть, параметр повреждённости, длительная прочность, время начала разрушения

THE STRESS-STRAIN STATE AND DURATION TO FRACTURE OF RING PLATES UNDER CREEP CONDITIONS

I.A. Banshchikova

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

The stress-strain state of axisymmetrically loaded ring plates is investigated at any time before the beginning of fracture using the Rabotnov kinetic creep theory, which describes all three stages of creep. The time of onset of fracture is the time at which at any point of the plate the damage parameter reaches a critical value equal to unity (damage parameter is equal to zero for the undamaged material). The calculation of stress-strain state is carried out in two ways, and then the results are compared. In the first case, the solution of the unsteady-state creep problem taking into account damage accumulation is based on the solution of the steady-state creep problem. For simplicity, the von Mises criterion in constitutive equations is linearized, which is equivalent to using the Tresca–Saint-Venant criterion. In order to obtain a solution to the unsteady-state creep problem, it is necessary to multiply the known solution of the steady-state creep problem by some functions of coordinates and time. These functions can be found from the corresponding system of equations. The second technique is based on a finite element method, and the constitutive equations include the von Mises criterion. In the ANSYS program, a custom UserCreep procedure is activated for modeling damage accumulation. Dependences of the time of onset of fracture on the value of a bending moment applied to the contour of the inner hole of a ring plate are plotted. Diagrams obtained by two methods show that the use of the Tresca–Saint-Venant criterion provides a lower estimate for the time of onset of fracture.

Key words: axisymmetric ring plates, bending, creep, damage parameter, long-term strength, time of onset of fracture

1. Введение

Нормативный срок эксплуатации элементов конструкций часто отождествляют с продолжительностью времени до начала их разрушения. Отличие в оценках этого времени обусловлено использованием в расчётах разных вариантов теории ползучести, различных механизмов разрушения и критериев длительной прочности, а также видом объектов исследования [1–11]. Среди публикаций, посвященных расчёту напряжённо-деформированного состояния гибких пластин с учётом повреждаемости, можно отметить работы [6–10]. В книге [6] конечно-разностным методом исследуются пластины в геометрически линейной постановке с повреждаемостью, представляемой в виде тензора второго ранга. В [7–10] вычисления произведены с учётом геометрической нелинейности методами конечно-элементной дискретизации и R-функций в сочетании с методом Ритца. В настоящей работе на основе положений кинетической теории ползучести Работнова, учитывающей накопление повреждений в материале, найдено НДС осесимметричных кольцевых пластин двумя способами и выполнено сравнение результатов расчёта.

Первый способ, развитый в работах [12–15] применительно к вращающимся дискам, трубам, пластинам, основан на сведении задачи деформирования пластины в условиях неустановившейся

ползучести к аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала. При этом критерий Мизеса в определяющих уравнениях линеаризуется, что, по сути, эквивалентно использованию критерия Треска–Сен-Венана. Для того чтобы получить истинное решение, необходимо известное решение для установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени.

В основе другого способа лежит метод конечных элементов (МКЭ) комплекса ANSYS. Кроме того, в определяющие уравнения входит критерий Мизеса. Предполагается, что деформации пластины малы. Достижение параметром поврежденности критического значения при малых деформациях характерно для хрупкого разрушения.

2. Определяющие и разрешающие соотношения

Процесс деформирования в условиях ползучести описывается соотношениями кинетической теории Ю.Н. Работнова [1, 2]:

$$\eta_{kl} = \frac{W}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{kl}}, \quad W = \frac{B_1 \sigma_3^{n+1}}{\phi(\omega)}, \quad \phi(\omega) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_2 \sigma_{*3}^{g+1}}{\phi(\omega)}, \quad \omega(x_j, 0) = 0, \quad \omega(x_j^*, t_*) = 1 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь: η_{kl} , σ_{kl} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений; W — мощность диссипируемой энергии, $W = \eta_{kl} \sigma_{kl}$; σ_3 , σ_{*3} — однородные относительно напряжений функции (в качестве эквивалентного напряжения σ_3 может рассматриваться или интенсивность напряжений σ_i (критерий Мизеса), или максимальное касательное напряжение (критерий Треска), или другие функции; эквивалентным напряжением σ_{*3} может быть и σ_i (критерий длительной прочности Каца), и максимальное нормальное напряжение (критерий длительной прочности Джонсона), и другие критерии); параметр ω с феноменологических позиций описывает накопление повреждений в материале (для неповрежденного материала $\omega = 0$ во всех точках элемента конструкции x_j ($j = 1, 2, 3$); если в момент времени $t = t_*$ в какой-то точке x_j^* параметр принимает значение $\omega = 1$, то будем говорить, что в этой точке тела произошло разрушение); время $t = t_*$ — это время начала разрушения тела; B_1 , B_2 , n , g , m , α — константы ползучести.

Из кинетической теории (1), (2) следуют, как частные случаи, экспериментально обоснованные теории: теория кратковременной ползучести [16], энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности [17], теория упрочнения и различные её модификации [1, 2].

Для упрощения получения результатов выполним замену: $\mu = 1 - \omega^{\alpha+1}$. Тогда соотношения (1), (2) преобразуются к виду:

$$\eta_{kl} = \frac{W}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{kl}}, \quad W = \frac{B_1 \sigma_3^{n+1}}{\phi(\mu)}, \quad \phi(\mu) = \mu^m (1 - \mu)^{\alpha/(\alpha+1)} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{(\alpha+1)B_2 \sigma_{*3}^{g+1}}{\mu^m}, \quad \mu(x_j, 0) = 1, \quad \mu(x_j^*, t_*) = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Рассмотрим кольцевую пластину толщиной h при $0 \leq t \leq t_*$ под действием осесимметричной нагрузки. Считаем, что в результате изгиба в пластине реализуется приближённо плоское напряжённое состояние, касательные напряжения в окружном сечении пластины учитывать не будем [18]. Системе координат $Ox_1x_2x_3$ поставим в соответствие цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$, в которой действуют напряжения: окружное — $\sigma_{11} = \sigma_\varphi$, радиальное — $\sigma_{22} = \sigma_r$ и перпендикулярное плоскости $Or\varphi$ — $\sigma_{33} = \sigma_z = 0$. Если $\sigma_3 = \sigma_i$ и $\sigma_{*3} = \sigma_i$, то при сделанных предположениях первое из соотношений (3) представляется как

$$\eta_\varphi = \frac{B_1 \sigma_i^{n-1}}{2\phi(\mu)} (2\sigma_\varphi - \sigma_r), \quad \eta_r = \frac{B_1 \sigma_i^{n-1}}{2\phi(\mu)} (2\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad \eta_z = -\frac{B_1 \sigma_i^{n-1}}{2\phi(\mu)} (\sigma_\varphi + \sigma_r), \quad (5)$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_r^2}. \quad (6)$$

Второе из соотношений (3) записывается как $W = \eta_i \sigma_i$ [2]. Отсюда для интенсивности скоростей деформаций ползучести η_i получаем:

$$\eta_i = d\varepsilon_i^{cr} / dt = B_1 \sigma_i^n / \phi(\mu), \quad (7)$$

ε_i^{cr} — интенсивность деформаций ползучести.

С учётом несжимаемости материала ($\eta_r + \eta_\phi + \eta_z = 0$) выразим η_i через компоненты тензора скоростей деформаций ползучести:

$$\eta_i = 2\sqrt{\eta_\phi^2 + \eta_\phi \eta_r + \eta_r^2} / \sqrt{3}. \quad (8)$$

Принимая во внимание соотношения (6)–(8), находим из (5) компоненты напряжений σ_ϕ , σ_r :

$$\sigma_\phi = \frac{4}{3} \left(\frac{\phi(\mu)}{B_1} \right)^{1/n} \eta_i^{(1-n)/n} \left(\eta_\phi + \frac{1}{2} \eta_r \right), \quad \sigma_r = \frac{4}{3} \left(\frac{\phi(\mu)}{B_1} \right)^{1/n} \eta_i^{(1-n)/n} \left(\eta_r + \frac{1}{2} \eta_\phi \right). \quad (9)$$

Предполагая, что прогибы от действия осесимметричной нагрузки малы по сравнению с толщиной пластины, в рамках гипотез Кирхгофа–Лява имеем:

$$\eta_\phi = z \frac{\psi}{r} = -z \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr}, \quad \eta_r = z \frac{d\psi}{dr} = -z \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2}, \quad (10)$$

где w — прогиб точек срединной плоскости пластины; $\psi = \dot{v}$ — скорость поворота нормали к срединной плоскости ($dw/dr = -v$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, $a \leq r \leq b$, a , b — внутренний и внешний радиусы кольцевой пластины).

Интенсивности изгибающих моментов в радиальном и окружном сечениях пластины связаны с соответствующими напряжениями соотношениями:

$$M_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi z dz, \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz. \quad (11)$$

Используя (10) и (11), выражения для напряжений (9) в результате ряда преобразований можно привести к виду [1, 18]:

$$\sigma_\phi = [\phi(\mu)]^{1/n} (q/D) |z|^{(1-n)/n} z M_\phi = l M_\phi, \quad \sigma_r = [\phi(\mu)]^{1/n} (q/D) |z|^{(1-n)/n} z M_r = l M_r. \quad (12)$$

Здесь обозначено: $D(r, t) = 2q \int_0^{h/2} [\phi(\mu)]^{1/n} z^{(n+1)/n} dz$, $q = (2/\sqrt{3})^{(n+1)/n} (B_1)^{-1/n}$.

Уравнения равновесия тонкой круглой (кольцевой) пластины имеют вид [1, 18]:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\phi}{r} = Q, \quad \frac{d}{dr}(Qr) = -pr, \quad (13)$$

где $Q(r, t) = Q(r)$ — интенсивность поперечной силы, действующей в окружном сечении пластины; p — интенсивность внешней равномерно распределённой постоянной нагрузки.

Примем следующие граничные условия для $M_r(r, t)$ в точках, расположенных на внутренней ($r = a$) и наружной ($r = b$) кромках при $0 \leq t \leq t_*$:

$$M_r(a, t) = M_r(a), \quad M_r(b, t) = M_r(b),$$

где $M_r(a)$, $M_r(b)$ — заданные значения.

Введём обозначение $M_i = \sqrt{M_\phi^2 - M_\phi M_r + M_r^2}$ и представим компоненты скоростей деформаций ползучести в виде:

$$\eta_\phi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_\phi}, \quad \eta_r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_r}. \quad (14)$$

Система уравнений (3)–(14) позволяет рассчитать напряжённо-деформированное состояние осесимметрично нагруженных кольцевых пластин в любой момент времени вплоть до начала разрушения.

2. Методики расчёта

2.1. Способ 1. Решение путём сведения задачи к аналогичной в предположении установившейся ползучести материала

Результаты определения НДС равномерно нагретых круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин в предположении установившейся ползучести их материала достаточно хорошо известны. Использование критерия Мизеса является затруднительным, и решение в общем случае возможно только численными методами, например МКЭ. Для упрощения соответствующих вычислений квадратичный критерий Мизеса можно линеаризовать. При постоянной величине M_i связь изгибающих моментов M_r и M_ϕ друг с другом представима в виде эллипса, главные оси которого наклонены к осям координат под углом 45° , а контур отсекает на них отрезки, равные M_i . Этот эллипс может быть заменён шестиугольником [1, 14, 18]. Тогда величина M_i приближённо выражается через M_r и M_ϕ , что эквивалентно линеаризации критерия Мизеса и переходу к критерию Треска–Сен-Венана. Важно, что величина M_i зависит от местоположения точки в области эллипса. Например, если точка (M_ϕ, M_r) принадлежит области $M_r > M_\phi > 0$, то $M_i = M_r$; если $M_\phi > M_r > 0$, то $M_i = M_\phi$; если $M_\phi > 0$, $M_r < 0$, то $M_i = M_\phi - M_r$ и так далее.

Рассмотрим пример, когда $M_i = M_\phi - M_r$, причём $M_\phi > 0$, $M_r < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \eta_\phi &= \left(2/\sqrt{3}\right)^{n+1} z(M_\phi - M_r)^n / D^n, \\ \eta_r &= -\left(2/\sqrt{3}\right)^{n+1} z(M_\phi - M_r)^n / D^n. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что $\eta_\phi + \eta_r = 0$. Подставляя сюда (10), можно переписать $\psi(r, t)$ в виде произведения функции координат на функцию времени:

$$\psi(r, t) = C(t)/r = C^\circ [X(t)]^n / r = \psi^\circ [X(t)]^n, \quad (16)$$

где $C(t)$ — константа интегрирования, зависящая от времени; здесь и далее символ « \circ » относится к величинам, полученным из решения этой же самой задачи в предположении установившейся ползучести.

Далее необходимо выразить решение для неустановившейся ползучести как произведение решения при установившейся ползучести и функций $X(t)$ и $\mu(r, z, t)$. Из (10), используя (16), находим скорости деформаций ползучести, а из их сопоставления с (15) получаем:

$$M_i = M_\phi - M_r = \left(\sqrt{3}/2\right)^{(n+1)/n} (C^\circ)^{1/n} D(r, t) r^{-2/n} [X(t)]^{-1}. \quad (17)$$

Из первого уравнения равновесия (13) с учётом заданных граничных условий для M_r на внутреннем и внешнем контурах пластины следует:

$$M_r(r, t) = M_r(a) + \left(\sqrt{3}/2\right)^{(n+1)/n} (C^\circ)^{1/n} [X(t)]^{-1} \int_a^r D(\zeta, t) \zeta^{-1-2/n} d\zeta + \bar{Q}(r), \quad (18)$$

$$\int_a^b \left\{ 2 \int_0^{h/2} [\phi(\mu)]^{1/n} z^{(n+1)/n} dz \right\} r^{-1-2/n} dr = J J_1 X(t). \quad (19)$$

Здесь $\bar{Q}(r) = \int_a^r Q(\zeta) d\zeta$, $J = 2 \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz$, $J_1 = \int_a^b r^{-1-2/n} dr$, $C^\circ = \frac{B_1^{1/n}}{JJ_1} (M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b))$.

После ряда преобразований интенсивность напряжений представляется в виде:

$$\sigma_i = l M_i = l^\circ M_i^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) = \sigma_i^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \quad (20)$$

где l и M_i вычисляются согласно (12), (17); $l^\circ = |z|^{(1-n)/n} z / J$, $M_i^\circ = (M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)) \cdot r^{-2/n} / J_1$.

Уравнение (4), учитывая выражение (3) для функции $\phi(\mu)$, приведём к виду

$$\int_1^\mu \Psi(z) dz = -[(m+1)t^\circ]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau, \quad (21)$$

где $\Psi(z) = z^{m(n-g-1)/n} (1-z)^{-\alpha(g+1)/(n(\alpha+1))}$, $t^\circ = [(\alpha+1)(m+1)B_2\sigma_i^{\circ g+1}]^{-1}$.

Таким образом, система уравнений (19), (21) есть система для определения функции времени $X(t)$ и параметра повреждённости $\mu(r, z, t)$. Зная их, можно рассчитать НДС пластины в любой момент времени вплоть до начала разрушения. Действительно, из (16) определяется скорость $\psi(r, t) = \psi^\circ [X(t)]^{-n}$, с использованием которой из (10) вычисляются скорости деформаций ползучести

$$\begin{aligned} \eta_\phi(r, z, t) &= \eta_\phi^\circ [X(t)]^{-n}, \\ \eta_r(r, z, t) &= \eta_r^\circ [X(t)]^{-n}, \\ \eta_\phi^\circ &= z\psi^\circ / r, \quad \eta_r^\circ = z d\psi^\circ / dr, \end{aligned} \quad (22)$$

а из (8) — $\eta_i(r, z, t) = \eta_i^\circ [X(t)]^{-n}$. Далее, по найденным из (17), (18) M_i , M_ϕ , M_r рассчитывается, согласно (20), интенсивность напряжений $\sigma_i(r, z, t) = \sigma_i^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t)$, а в соответствии с (12) — компоненты напряжений $\sigma_\phi(r, z, t)$, $\sigma_r(r, z, t)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия. По известной функции μ выясняется время начала разрушения t_* и точка с координатами r^* , z^* , в которой μ впервые принимает нулевое значение.

Записанные по аналогии выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\phi(r, z, t) &= \sigma_\phi^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \\ \sigma_r(r, z, t) &= \sigma_r^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \end{aligned} \quad (23)$$

связанные с кинематически возможными скоростями деформаций (22) законом (9), не удовлетворяют уравнениям равновесия, однако они, как показали расчёты, в рассмотренном конкретном примере приводят к приемлемым результатам. Компоненты напряжений σ_ϕ° , σ_r° соответствуют решению задачи установившейся ползучести [18] и являются статически допустимыми. Компоненты напряжений (23) таковыми не являются, но если подставить (23) в (6), то получим соотношение (20). Отсюда следует, что поле (23) можно сделать статически допустимым. Для этого положим

$$\begin{aligned} \sigma_\phi(r, z, t) &= \sigma_\phi^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) + F(r, z, t), \\ \sigma_r(r, z, t) &= \sigma_r^\circ [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) + F(r, z, t). \end{aligned} \quad (24)$$

Составляющая $F(r, z, t)$ вычисляется из условия удовлетворения компонент (24) уравнениям равновесия с учётом (12) и (18):

$$F(r, z, t) = \left(\frac{q}{D} M_r - \frac{1}{JX(t)} M_r^\circ \right) |z|^{(1-n)/n} z [\phi(\mu)]^{1/n}.$$

В случае $\alpha = 0$, $m \neq 0$, характерном для многих конструкционных сплавов, из (21) и (19) следует:

$$\mu = \left[1 - \frac{\nu}{t^\circ} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta, \quad (25)$$

$$\text{где } \beta = \frac{m}{n + m(n - g - 1)}, \quad \nu = \frac{n + m(n - g - 1)}{n(m + 1)};$$

$$\int_a^b \left\{ 2 \int_0^{h/2} \left[1 - \frac{\nu}{t^\circ} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta z^{(n+1)/n} dz \right\} r^{-1-2/n} dr = JJ_1 X(t). \quad (26)$$

При $\beta=1$ система (25), (26) разрешается в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} X(t) &= (1 - t/\bar{t}^\circ)^{1/(g+2)}, \\ \bar{t}^\circ &= JJ_1 / \int_a^b \left[2 \int_0^{h/2} (z^{(n+1)/n} / t^\circ(r, z)) dz \right] r^{-1-2/n} dr, \\ [\mu(r, z, t)]^{m/n} &= \left\{ 1 - (\bar{t}^\circ / t^\circ) \left[1 - (1 - t/\bar{t}^\circ)^{1/(g+2)} \right] \right\}, \\ t_* &= \bar{t}^\circ \left[1 - (1 - t_*^\circ / \bar{t}^\circ)^{g+2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $t_*^\circ = t^\circ(r^*, z^*)$ — время, определяемое согласно (21) и соответствующее решению при установившейся ползучести в точке, где впервые происходит разрушение. Если $\beta \neq 1$, то решение уравнения (26) можно получить численно любым из известных методов [19], например, методом Эйлера или методом Рунге–Кутты, выполнив замену $Y(t) = \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau$ и перейдя к дифференциальному уравнению по времени относительно $Y(t)$.

В работе [14] отмечается, что методика прогнозирования разрушения на основе сведения задачи неустановившейся ползучести к аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала может быть обобщена на элементы конструкций другого вида и вне зависимости от условий нагружения и закрепления (трубы под действием постоянного внутреннего давления, балки в условиях изгиба постоянным моментом, вращающиеся диски). Следовательно, методика применима и к расчёту НДС при ползучести пластин с различными граничными условиями и прикладываемыми нагрузками.

2.2. Способ 2. Решение методом конечных элементов

При численном решении в качестве эквивалентного напряжения σ_i берётся интенсивность напряжений σ_i , то есть критерий Мизеса (6). Для расчётов выбран четырёхузловой оболочечный конечный элемент SHELL181 пакета ANSYS. В силу осесимметрии рассматривается сегмент кольца в один градус с разбиением на 50 элементов вдоль радиуса и 11-точечным разбиением по толщине. Для решения системы дифференциальных уравнений по времени используется неявная схема численного интегрирования [19], а также процедура автоматического деления шага пополам.

Поскольку в моделях ползучести, встроенных в пакет ANSYS, отсутствует учёт третьей стадии ползучести, реализацию кинетической модели (1), (2) осуществляет пользовательская подпрограмма UserCreep.f, написанная на языке Фортран. Применение этой подпрограммы требует перекомпиляции пакета. Указания на запуск UserCreep.f можно найти в окне с программной документацией ANSYS Release Documentation. Для активации подпрограммы в основном программном коде служит команда TB, CREEP с параметром TBOPT=100. С помощью команды TBDATA вводятся константы материала для модели (1), (2). Вычисление значений интенсивности деформаций ползучести и параметра повреждённости в каждой точке разбиения по толщине элемента выполняется в подпрограмме UserCreep.f на основе следующей встроенной схемы:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_i^{cr})^{k+1} &= (\varepsilon_i^{cr})^k + (\Delta \varepsilon_i^{cr})^{k+1}, \\ (\Delta \varepsilon_i^{cr})^{k+1} &= \frac{B_1 (\sigma_i^k)^n}{\phi(\omega^k)} \Delta t^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\omega^{k+1} = \omega^k + \frac{B_2(\sigma_i^k)^{g+1}}{\phi(\omega^k)} \Delta t^{k+1}.$$

Здесь символ k относится к величинам на k -й итерации, Δt — шаг по времени.

3. Расчёт НДС кольцевой пластины, нагруженной по внутреннему контуру изгибающим моментом

Вычисления проведены для пластины толщиной $h=0,01$ м при радиусах $a=0,05$ м и $b=0,1$ м, безразмерный радиус $\rho=r/a$, соответственно, составляет: $1 \leq \rho \leq 2$. По внешнему краю пластина шарнирно опёрта, внутренний край свободен от закреплений, на нём действует изгибающий момент $M_r(a) = -M = -600$ Н·м. Кроме того, $M_r(b) = 0$, $Q = 0$, $p = 0$. Материал пластины имел константы, близкие к описывающим поведение сплава Д16 при температуре эксплуатации 250°C : $B_1 = 3,52 \cdot 10^{-15}$ МПа $^{-n}$ / час; $B_2 = 2,76 \cdot 10^{-15}$ МПа $^{-g-1}$ / час; $n = 6$; $m = 8$; $g = 4,75$; $\alpha = 0$ [2, 20]. Поскольку в данном случае $\beta = 1$, можно воспользоваться аналитическим решением (27).

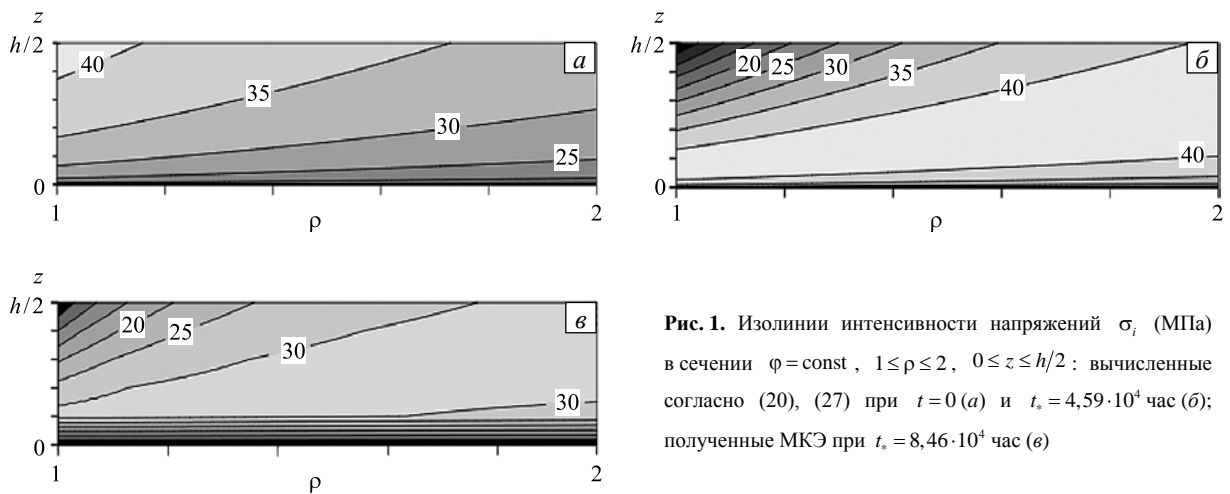


Рис. 1. Изолинии интенсивности напряжений σ_i (МПа) в сечении $\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$: вычисленные согласно (20), (27) при $t = 0$ (а) и $t_* = 4,59 \cdot 10^4$ час (б); полученные МКЭ при $t_* = 8,46 \cdot 10^4$ час (в)

На рисунке 1 представлены изолинии интенсивности напряжений σ_i в сечениях $\{1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq z \leq h/2\}$, отвечающие решению задачи в предположении установившейся ползучести при $t = 0$ и в момент времени $t_* = 4,59 \cdot 10^4$ час, рассчитанные по формулам (20), (27), а также при $t_* = 8,46 \cdot 10^4$ час, полученные численным методом. Результаты расчётов показывают, что в процессе ползучести в пластине идёт непрерывный процесс перераспределения напряжений и накопления повреждений в материале. Очевидно, что опасное сечение — это $\{\rho = 1, z = h/2\}$. Именно отсюда с момента t_* начинается распространяться разрушение.

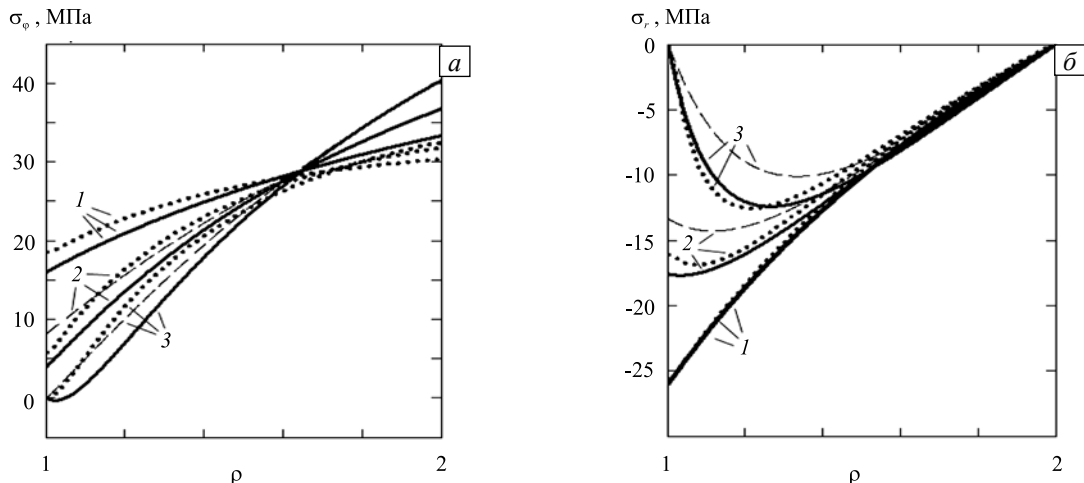


Рис. 2. Зависимость σ_φ (а) и σ_r (б) от ρ при $z = h/2$: сплошные и штриховые линии – расчёт по (12) и (23) соответственно; пунктирные линии – расчёт МКЭ

На рисунке 2 сплошными и штриховыми линиями показаны распределения компонент σ_φ , σ_r в сечении $\{1 \leq \rho \leq 2, z = h/2\}$, рассчитанные по (12) и (23) соответственно. Цифрами обозначены линии для $t = 0$ (линии 1); $4,0 \cdot 10^4$ час (линии 2) и $t_* = 4,59 \cdot 10^4$ час (линии 3) (линии 1, штриховая и сплошная, совпадают). Напряжения (23), связанные с кинематически возможными скоростями деформаций ползучести, можно использовать в качестве верхней оценки. На этом же рисунке пунктирными линиями 1, 2 и 3 изображены аналогичные результаты для компонент напряжений, рассчитанных МКЭ в моменты времени $t = 0, 7,0 \cdot 10^4$ час и $t_* = 8,46 \cdot 10^4$ час.

На рисунке 3а сплошными и пунктирными линиями изображены зависимости интенсивности напряжений σ_i (соответствующие компоненты σ_φ и σ_r см. на рисунке 2) при $z = h/2$ от ρ , вычисленные по (20) и МКЭ. В целом картина распределения напряжений, полученных 1-м способом, близка к результатам 2-го — численного, способа расчёта. Рисунок 3б содержит рассчитанные МКЭ зависимости

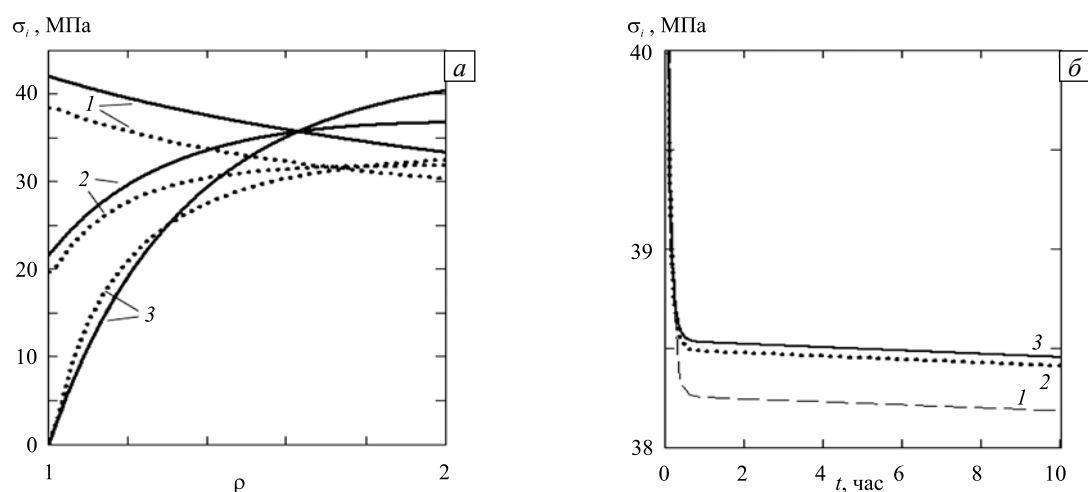


Рис. 3. Зависимости интенсивности напряжений σ_i (соответствующие компоненты σ_φ и σ_r см. на рисунке 2) в сечении $z = h/2$ от ρ (а) и от времени при $\rho = 1$ и различном шаге интегрирования по времени (б); на (а) сплошные линии соответствуют расчёту по (20), пунктирные – расчёту МКЭ; на (б) максимальному шагу интегрирования 5, 2, 1 час отвечают линии 1, 2, 3

интенсивности напряжений при $\{\rho = 1, z = h/2\}$ от времени при максимальном шаге интегрирования на установившейся стадии ползучести, равном 5, 2, 1 час (см. линии 1, 2, 3 соответственно). Отличие интенсивностей напряжений в момент времени $t = 10^4$ час при шагах 5 час и 1 час (см. линии 1 и 3) составляет 0,7%, а при шагах 2 час и 1 час (см. линии 2 и 3) — 0,1%. При этом время до разрушения t_*

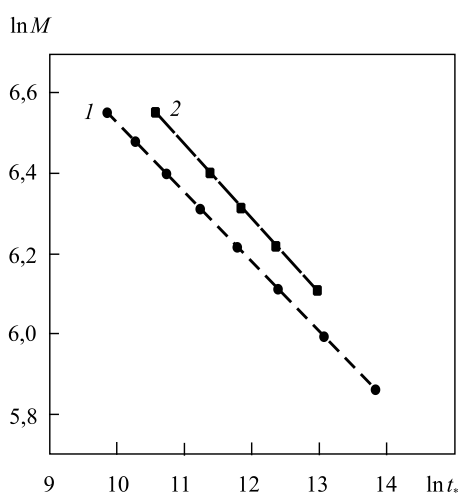


Рис. 4. Зависимость времени начала разрушения t_* от величины изгибающего момента M , приложенного на внутреннем контуре пластины: расчёт по (27) (линия 1) и МКЭ (2)

отличается, соответственно, на 18% и 3%. При уменьшении максимального шага интегрирования время t_* уменьшается и стремится к некоторому предельному значению, однако при этом существенно возрастает общее время счёта. На всех рисунках, за исключением рисунка 3б, графики построены по результатам расчётов МКЭ с максимальным шагом интегрирования 2 часа.

На рисунке 4 демонстрируются зависимости времени начала разрушения t_* от величины изгибающего момента M , приложенного на внутреннем радиусе пластины, в логарифмических координатах. Линии 1 и 2 относятся к результатам, полученным 1-м и 2-м способами. Используя эти прямые линии (или их продолжение), можно прогнозировать время начала разрушения при различных значениях приложенной нагрузки. На диаграмме видно, что применение критерия Треска–Сен-Венана (линия 1) даёт нижнюю оценку времени начала разрушения конструкции.

4. Заключение

Для задачи изгиба кольцевой пластины моментом, приложенным на внутреннем контуре, время начала разрушения, вычисленное с применением критерия Мизеса, почти в два раза больше времени, полученного с использованием критерия Треска–Сен-Венана. Однако упрощенный способ расчёта позволяет прогнозировать зачастую интересующую расчётчиков нижнюю оценку времени начала разрушения. Окончательный выбор критерия должен определяться в результате экспериментальных исследований.

Следует отметить также, что методика прогнозирования разрушения на основе упрощённого способа расчёта напряжённо-деформированного состояния с учётом накопления повреждений, опирающегося на решение в предположении установившейся ползучести, может быть применена к пластинам с различными условиями нагружения и закрепления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН III.23.3. (проект III.23.3.2.) и РФФИ (проект № 15-01-07631-а).

Литература

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 1997. – 278 с.
3. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
4. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник // Под общ. ред. С.А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.
5. Никитенко А.Ф. Нижняя и верхняя оценки времени начала разрушения элементов конструкций // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 164-169. (English version [DOI](#)).
6. Skrzypek J.J., Ganczarski A. Modeling of material damage and failure of structures. Theory and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 326 p.
7. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions // Arch. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 67, no. 5. – P. 339-352. [DOI](#)
8. Altenbach H., Altenbach J., Naumenko K. On the prediction of creep damage by bending of thin-walled structures // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 1997. – Vol. 1, no. 2. – P. 181-193. [DOI](#)
9. Altenbach H. Topical problems and applications of creep theory // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, no. 6. – P. 631-655. [DOI](#)
10. Золочевский А.А., Скелпус А.Н., Скелпус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.
11. Локощенко А.М., Соколов А.В. Ползучесть и длительное разрушение цилиндрической оболочки под внешним давлением в присутствии агрессивной среды // МТТ. – 2014. – № 1. – С. 65-76. (English version [DOI](#)).
12. Заев В.А., Никитенко А.Ф. Расчет напряженно-деформированного состояния изгибаемых кольцевых пластин с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // ПМТФ. – 1993. – Т. 34, № 3. – С. 142-146. (English version [DOI](#)).
13. Никитенко А.Ф., Любашевская И.В. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб // Проблемы прочности. – 2005. – № 5. – С. 30-44. (English version [DOI](#)).
14. Банщикова И.А., Никитенко А.Ф. Ползучесть осесимметрично нагруженных пластин с учетом накопления повреждений в их материале // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, № 5. – С. 157-168. (English version [DOI](#)).
15. Банщикова И.А., Никитенко А.Ф. Расчет напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения элементов конструкций при ползучести // Динамика сплошной среды. Докл. Всерос. Конф. «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», Новосибирск, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 9-13 октября 2006 г. / Под ред. чл.-корр. РАН Б.Д. Аннина, д-ра техн. наук М.А. Легана. – Новосибирск, 2007. – Вып. 125. – С. 14-19.
16. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 224 с.
17. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1986. – 96 с.
18. Калинин Н.Н. Исследование установившейся ползучести круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин // Расчеты на прочность. – М.: Машгиз, 1963. – Вып. 9. – С. 173-195.
19. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
20. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 1. Основные гипотезы и экспериментальная проверка // Проблемы прочности. – 1976. – № 11. – С. 3-8.

References

1. Rabotnov Yu.N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam: North-Holland, 1969. 836 p.
2. Nikitenko A.F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and long-term strength of metal materials]. Novosibirsk: Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 1997. 278 p.
3. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti* [The theory of creep]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 456 p.
4. *Zakonomernosti polzuchesti i dlitel'noj prochnosti. Spravochnik* [Laws of creep and long-term strength: Handbook], ed. by S.A. Shesterikov et al. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 101 p.

5. Nikitenko A.F. Lower and upper estimates of the rupture time for structural elements. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2001, Vol. 42, no. 1, pp. 146-151. DOI
6. Skrzypek J.J., Ganczarski A. *Modeling of material damage and failure of structures. Theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 326 p.
7. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions. *Arch. Appl. Mech.*, 1997, vol. 67, no. 5, pp. 339-352. DOI
8. Altenbach H., Altenbach J., Naumenko K. On the prediction of creep damage by bending of thin-walled structures. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1997, vol. 1, no. 2, pp. 181-193. DOI
9. Altenbach H. Topical problems and applications of creep theory. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, no. 6, pp. 631-655. DOI
10. Zolochovsky A.A., Sklepus A.N., Sklepus S.N. *Nelinejnaya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Nonlinear solid mechanics]. Khar'kov: Business Investor Group, 2011. 720 p.
11. Lokoshchenko A.M., Sokolov A.V. Creep and long-time fracture of a cylindrical shell under external pressure in the presence of an aggressive medium. *Mechanics of Solids*. 2014, vol. 49, no. 1, pp. 49-58. DOI
12. Zaev V.A., Nikitenko A.F. Calculation of the stress-strain state of bent annular plates taking account of material damage during creep. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1993, vol. 34, no. 3, pp. 423-426. DOI
13. Nikitenko A.F., Lyubashevskaya I.V. Kinetic theory of creep and creep-rupture strength analysis of structural components. Part 1. Stress-strain state in nonuniformly heated thick-walled pipes. *Strength Mater.*, 2005, vol. 37, no. 5, pp. 460-470. DOI
14. Banshchikova I.A., Nikitenko A.F. Creep of axisymmetrically loaded plates with allowance for damage accumulation in their material. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2006, vol. 47, no. 5, pp. 747-756. DOI
15. Banshchikova I.A., Nikitenko A.F. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoianiya i dlitel'nosti do razrusheniya elementov konstruksii pri polzuchesti [Calculation of stress-strain state and time-prior to fracture of structural elements at creep]. *Dinamika sploshnoj sredy – Dynamics of continuous media*, 2007, no. 125, pp. 14-19.
16. Rabotnov Yu.N., Mileiko S.T. *Kratkovremennaya polzuchest'* [Short-term creep]. Moscow: Nauka, 1970. 224 p.
17. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. *Energeticheskij variant teorii polzuchesti* [Energy version of the theory of creep]. Novosibirsk: M.A. Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 1986. 96 p.
18. Malinin N.N. Issledovanie ustanovivshejsya polzuchesti kruglykh i kol'tsevykh osesimmetrichno nagruzhennykh plastin [Investigation of steady-state creep of axisymmetrically loaded circular and ring plates]. *Raschety na prochnost'* [Strength calculations]. Moscow: Mashgiz, 1963, no. 9. Pp. 173-195.
19. Boyle J.T., Spence J. *Stress analysis for creep*. London: Butterworths, 1983.
20. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. K obosnovaniuu energeticheskogo varianta teorii polzuchesti. Soobshchenie 1. Osnovnye gipotezy i eksperimental'naya proverka [Justification of the energy variant of the theory of creep. Report 1. Basic hypotheses and their experimental verification]. *Problemy prochnosti – Strength problems*, 1976, no. 11, pp. 3-8.

Поступила в редакцию 27.07.2015; опубликована в электронном виде 30.12.2015