DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32
УДК 519.6/531

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА МЮЛЛЕРА И ПРИНЦИПА АРГУМЕНТА К ЗАДАЧАМ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.П. Матвеенко[1], М.А. Севодин[2], Н.В. Севодина[1]

[1]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*
[2]*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация*

Численная реализация ряда задач механики деформируемого твердого тела приводит к алгебраической проблеме действительных или комплексных собственных значений. При использовании дискретных численных методов, в частности, метода конечных элементов, как с точки зрения погрешностей соответствующего численного метода, так и с точки зрения механического содержания изучаемых задач, имеет смысл решать лишь частичную проблему собственных значений. Данное обстоятельство определяет требование к алгоритму, состоящее в том, что собственные значения должны находиться в порядке их возрастания. В работе предлагается алгоритм решения алгебраической проблемы собственных значений, основанный на использовании метода Мюллера. Демонстрируется, что алгоритм эффективен, но имеет лишь один недостаток, связанный с условием нахождения корней в порядке возрастания при решении алгебраической проблемы комплексных собственных значений. Для устранения этого недостатка к данному алгоритму предлагается дополнительная процедура на основе принципа аргумента. Описывается методика нахождения собственных значений, созданная на основе метода Мюллера и принципа аргумента. Приведены ссылки на работы, которые содержат приложения рассматриваемого алгоритма в задачах механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: алгебраическая проблема собственных значений, частичная проблема собственных значений, метод Мюллера, принцип аргумента, комплексные собственные значения

APPLICATIONS OF MULLER’S METHOD AND THE ARGUMENT PRINCIPLE TO EIGENVALUE PROBLEMS IN SOLID MECHANICS

V.P. Matveenko[1], M.A. Sevodin[2] and N.V. Sevodina[1]

[1]*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*
[2]*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation*

Numerical implementation of the problems of solid mechanics leads to an algebraic problem of real and complex eigenvalues. Using discrete numerical methods, in particular, the finite element technique, it makes sense to solve only the partial eigenvalue problem both from the standpoint of errors of the corresponding numerical method and the mechanical content of the problems under study. This determines the requirement for an algorithm which implies that eigenvalues must be sought in ascending order. In the present paper, we propose an algorithm to solve an algebraic problem of complex eigenvalues using the Muller method. It is shown that even though the algorithm is an efficient one, it has a drawback related to the condition for evaluating roots in ascending order. In order to eliminate this disadvantage, we apply an additional procedure based on the argument principle to the developed algorithm. A technique for calculating eigenvalues that is built upon the Muller method and the argument principle is described. Relevant studies that demonstrate the use of the proposed algorithm for solving the problems of solid mechanics problems are discussed.

Key words: algebraic eigenvalue problem, partial eigenvalue problem, Muller’s method, argument principle, complex eigenvalue

1. Введение

Многочисленные и различные по содержанию задачи математической физики при их решении численными методами приводятся к алгебраической проблеме собственных значений. В механике деформируемого твердого тела примерами таких задач являются:
– собственные колебания вязкоупругих тел [1];
– собственные колебания электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями, включающими элементы емкости, индуктивности, сопротивления [2];
– устойчивость быстровращающихся деформируемых тел [3–5];
– устойчивость оболочек, взаимодействующих с потоком жидкости или газа [6];
– расчет показателей сингулярности напряжений в особых точках упругих двумерных и трехмерных тел [7].

Для перечисленных задач получение приемлемых результатов на основе численных методов в значительной мере определяется эффективностью алгоритма решения алгебраической проблемы собственных значений. При выборе соответствующего алгоритма необходимо учитывать возможность решения алгебраической проблемы комплексных собственных значений. Следует отметить, что для рассматриваемых задач, которые, как правило, сводятся к алгебраической задаче большой размерности, имеет смысл решать только частичную проблему собственных значений [8], то есть определять не весь спектр собственных значений. Последнее обстоятельство выдвигает жесткое условие для алгоритма, состоящее в том, что собственные значения должны быть гарантированно найдены либо в заданном интервале, либо в требуемой последовательности, например, в порядке возрастания действительных частей в случае комплексных собственных значений.

При решении названных выше задач механики апробировано несколько алгоритмов решения алгебраической задачи на собственные значения (метод Ланцоша, метод последовательности Штурма с обратными итерациями, QR и LR-преобразования [9–11]), но приемлемые численные результаты были получены при использовании метода Мюллера [12] с различными сценариями выбора начальных приближений и принципа аргумента [13]. Известно успешное совместное применение данной комбинации при нахождении глубоких нулей дисперсионного уравнения Рытова [14].

2. Метод Мюллера в алгебраических задачах на собственные значения

Классический вариант метода Мюллера, или метода парабол [9], ориентирован на определение комплексных корней алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 . \tag{1}$$

В процедуре метода Мюллера из некоторых точек $\lambda_0, \lambda_{1,}\ \lambda_2$ создается последовательность $\{\lambda_m\}$ следующим образом: если уже известны $\lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}, \lambda_m\ (m \ge 2)$, то для поиска λ_{m+1} по значениям характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ в точках $\lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}, \lambda_m$ строится интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени $L_{2,m}(\lambda)$, и за λ_{m+1} принимается ближайший к λ_m корень уравнения $L_{2,m}(\lambda) = 0$.

В работе Мюллера [12] доказана сходимость последовательности $\{\lambda_m\}$ в случае, если начальные приближения $\lambda_0, \lambda_{1,}\ \lambda_2$ располагаются в достаточно малой окрестности корня уравнения (1). При практическом применении счет прекращается при условии $\left|(\lambda_m - \lambda_{m-1})/\lambda_m\right| < \varepsilon$, где ε — заданная величина, характеризующая относительную погрешность определения значения корня. В работе [15], со ссылкой на опыт применения метода, содержится утверждение, что последовательность $\{\lambda_m\}$ всегда сходится к некоторому корню уравнения (1) и не зависит от выбора $\lambda_0, \lambda_{1,}\ \lambda_2$. Авторам настоящей работы в выполненных численных экспериментах также не удалось обнаружить примеры, которые опровергают это утверждение.

Для отыскания ($k+1$)-го корня, где $k = 1, 2, \ldots, n-2$, метод применяется к уравнению меньшей степени:

$$P_n(\lambda)\Big/\Big[\big(\lambda - \lambda^{(1)}\big)\big(\lambda - \lambda^{(2)}\big)\ldots\big(\lambda - \lambda^{(k)}\big)\Big] = 0 .$$

Здесь $\lambda^{(k)}$ — найденный k-й корень.

Метод Мюллера распространяется и на решение алгебраической проблемы собственных значений

$$\big([A] - \lambda[B]\big)\{\delta\} = 0 , \tag{2}$$

где $[A], [B]$ — квадратные матрицы n-го порядка с комплексными коэффициентами; λ — собственное значение; $\{\delta\}$ — собственный вектор. При этом операция вычисления значений характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ для уравнения (2) в точках $\lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}, \lambda_m$ заменяется операцией вычисления определителя $\det\big([A] - \lambda[B]\big)$. Поиск значений определителя при этом проводится с помощью метода Гаусса.

При использовании метода Мюллера для решения частичной алгебраической проблемы собственных значений (2) важна гарантия нахождения корней в требуемой последовательности. В работе [15] содержится утверждение, что при $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ последовательность $\{\lambda_m\}$ сходится к наименьшему по модулю корню. Выполненными численными экспериментами это подтверждается только для алгебраической проблемы с действительными собственными значениями и при отсутствии корней в интервале $[-1; 1]$. В частности, можно привести пример полинома, у которого имеются корни в интервале $[-1; 1]$:

$$P(\lambda) = (\lambda + 0{,}15)(\lambda - 0{,}15)(\lambda - 0{,}9)(\lambda - 0{,}91)(\lambda - 0{,}96)(\lambda - 1{,}05)(\lambda - 1{,}5)^2 .$$

Здесь методом Мюллера при начальных приближениях $\lambda_0 = -1,\ \ \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 0$ и заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-10}$ корни находятся с нарушением условия $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, а именно $\lambda^{(1)} = 0{,}96$; $\lambda^{(2)} = 1{,}05$; $\lambda^{(3)} = 0{,}91,$; $\lambda^{(4)} = 0{,}90$; $\lambda^{(5)} = 1{,}5$; $\lambda^{(6)} = 1{,}5$; … .

Для задач с действительными собственными значениями в результате численных экспериментов также было установлено, что при выборе начальных приближений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_{\min}$, где $\lambda_{\min}$ наименьший корень, собственные значения будут находиться в порядке их возрастания. В частности, в задачах исследования собственных колебаний упругих тел, где собственные значения действительны и положительны, начальные приближения могут быть выбраны следующим образом: $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

При решении алгебраической проблемы комплексных собственных значений не удалось обнаружить начальные приближения, которые обеспечивали бы отыскание корней в необходимой последовательности, например в порядке возрастания их модулей. Иллюстрацией этому является достаточно простой пример:

$$P(\lambda) = (\lambda - 0{,}91)(\lambda - 1{,}05)(\lambda - (0{,}9 + 0{,}01i))(\lambda - 1{,}5)^2 \times (\lambda - (0{,}15 + 0{,}7i))(\lambda - (0{,}15 - 0{,}7i))(\lambda - (0{,}96 + 2i)) .$$

Здесь при $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ и $\varepsilon = 10^{-10}$ корни находятся в последовательности: $\lambda^{(1)} = 0{,}9 + 0{,}01i$, $\lambda^{(2)} = 0{,}91$, $\lambda^{(3)} = 0{,}15 + 0{,}07i$, $\lambda^{(4)} = 1{,}5$, $\lambda^{(5)} = 0{,}15 - 0{,}07i$, $\lambda^{(6)} = 1{,}05$, $\lambda^{(7)} = 1{,}5$. В данном случае третий по величине модуля корень определяется первым.

В некоторых задачах механики деформируемого твердого тела могут быть найдены схемы вычислений, позволяющие при решении частичной алгебраической проблемы комплексных собственных значений находить корни в нужной последовательности. В качестве примера рассмотрим задачу исследования собственных колебаний вязкоупругих тел при условии, что реологические свойства проявляются только при деформациях сдвига. При решении этой задачи методом конечных элементов ее алгебраическим аналогом является следующая система уравнений: $\left([A] - \lambda[B]\right)\{\delta\} = 0$, где $[A]$ — матрица жесткости с комплексными коэффициентами; $[B]$ — матрица масс; $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ — комплексные собственные значения, в которых действительная часть λ_R определяет собственную частоту колебаний, а мнимая часть λ_I — характеризует скорость затухания колебаний соответствующей моды. Комплексный характер коэффициентов матрицы жесткости обуславливается в данном случае величиной комплексного модуля сдвига: $G = G_M + iG_I$. Для метода Мюллера в этой задаче можно найти приближения, обеспечивающие отыскание корней в нужной последовательности. Действительно, если положить $G_I = 0$, то будут найдены собственные частоты колебаний упругого тела, которые определят область начальных приближений для поиска соответствующей собственной частоты колебаний вязкоупругого тела. В данном случае используется доказанная сходимость метода Мюллера. Гарантия успешности применения такого приема может быть повышена, если, увеличивая пошагово мнимую часть комплексного модуля от 0 до G_I, использовать вычисленные собственные значения с текущего шага в качестве области начальных приближений для следующего шага.

3. Методика определения собственных значений с использованием принципа аргумента

Более радикальным вариантом успешного применения метода Мюллера при решении частичной проблемы комплексных собственных значений является совместное использование с ним принципа аргумента [13]. Принцип аргумента позволяет определить для уравнения (1) число корней с учетом их кратности в заданной области. Суть принципа заключается в следующем: если многочлен $P_n(\lambda)$ на границе C области D (Рис. 1) не имеет нулей, то число нулей N многочлена в области D, равняется числу оборотов вектора $\boldsymbol{w}$ при обходе кривой G, соответствующей границе C при отображении $\boldsymbol{w} = P(\lambda)$, и находится по формуле

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathrm{C}} \arg P(\lambda) . \tag{3}$$

Здесь $\Delta_{\mathrm{C}} \arg P(\lambda)$ обозначает полное приращение $\arg P(\lambda)$ при обходе контура C.

Опираясь на принцип аргумента, алгоритм поиска собственных значений методом Мюллера можно построить следующим образом. Задается область (см. Рис. 1), где возможны собственные значения.

Граница области C разбивается на отрезки, и в произвольно взятых точках каждого отрезка вычисляется значение полинома $P_n(\lambda_i)$ (или, для уравнения (2), — определителя). Затем подсчитывается количество оборотов вокруг начала координат (с учетом направления обхода), которое совершает вектор $\boldsymbol{w} = P(\lambda)$ при последовательном движении от точки к точке границы области C. Число собственных значений в рассматриваемой области равняется числу оборотов вектора $\boldsymbol{w}$ вокруг начала координат. (Рис. 2). Если вектор совершает обороты вне начала координат (см. Рис. 3*б*) или в процессе обхода меняет направление так, что в итоге общее количество оборотов с учетом направления обхода равно нулю (см. Рис. 3*в*), то это говорит об отсутствии корней в рассматриваемой области.

Проверка условия отсутствия нулей многочлена на границе C рассматриваемой области должна быть предусмотрена в программе, реализующей алгоритм. А именно, если $P_n(\lambda_i) = 0$ ($\det([A] - \lambda_i[B]) = 0$) в точке границы λ_i, то необходимо предложить изменение данного участка границы. Аналогичным образом на уровне алгоритма должен производиться контроль величины шага при обходе контура C. При слишком большом шаге — например, при изменении угла поворота вектора $\boldsymbol{w} = P(\lambda)$ более чем на $90°$ — необходимо предложить изменение величины шага.

При известном числе корней в рассматриваемой области последнюю можно делить на подобласти с целью уточнения значений начальных приближений для метода Мюллера.

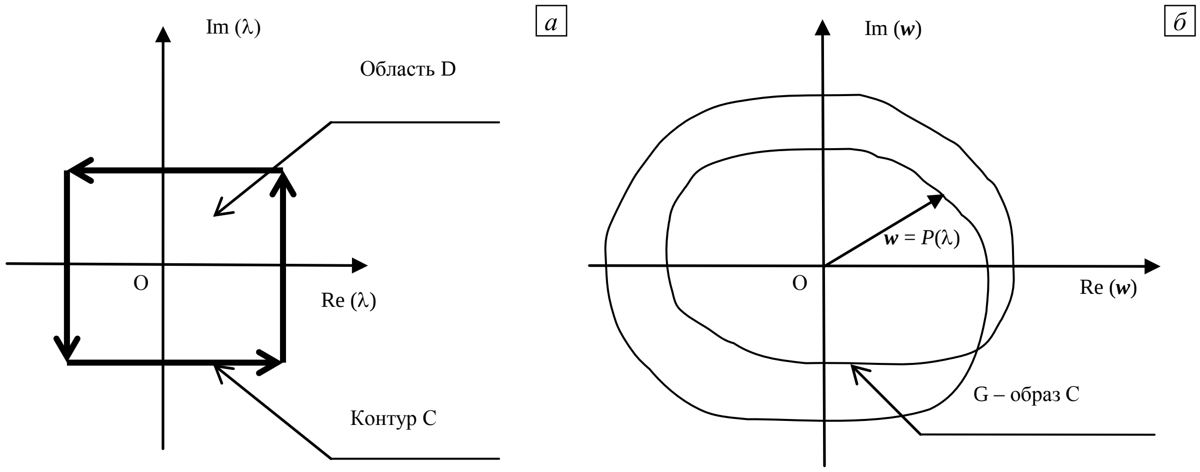

Рис. 1. Графическая интерпретация принципа аргумента

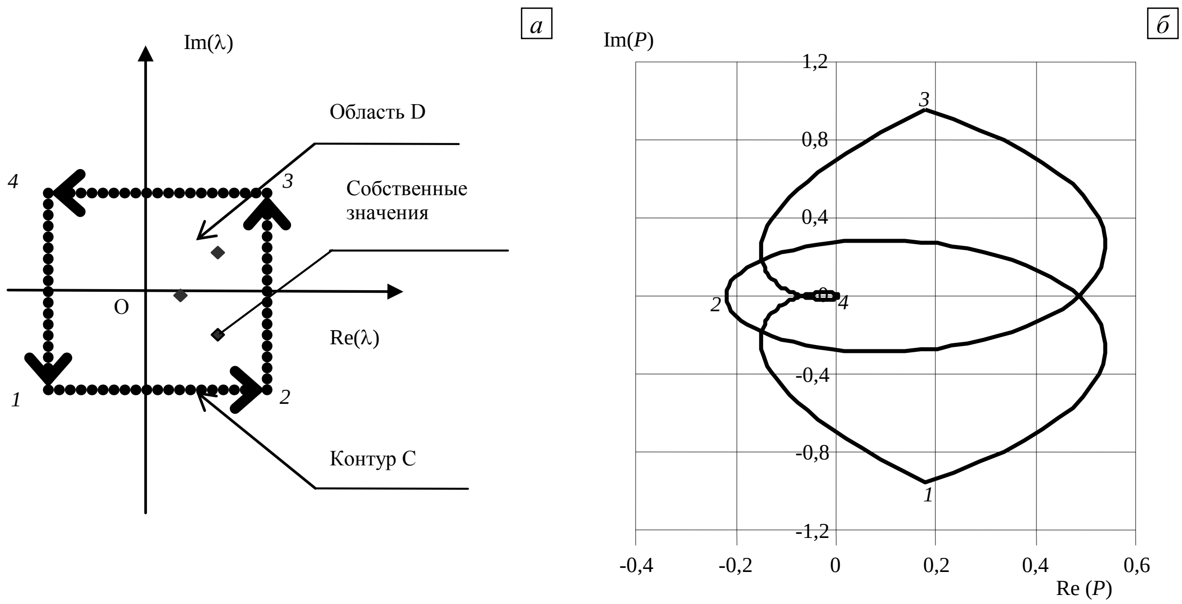

Рис. 2. Вариант графического представления движения вектора $\boldsymbol{w}$ при наличии внутри рассматриваемой области трех собственных значений

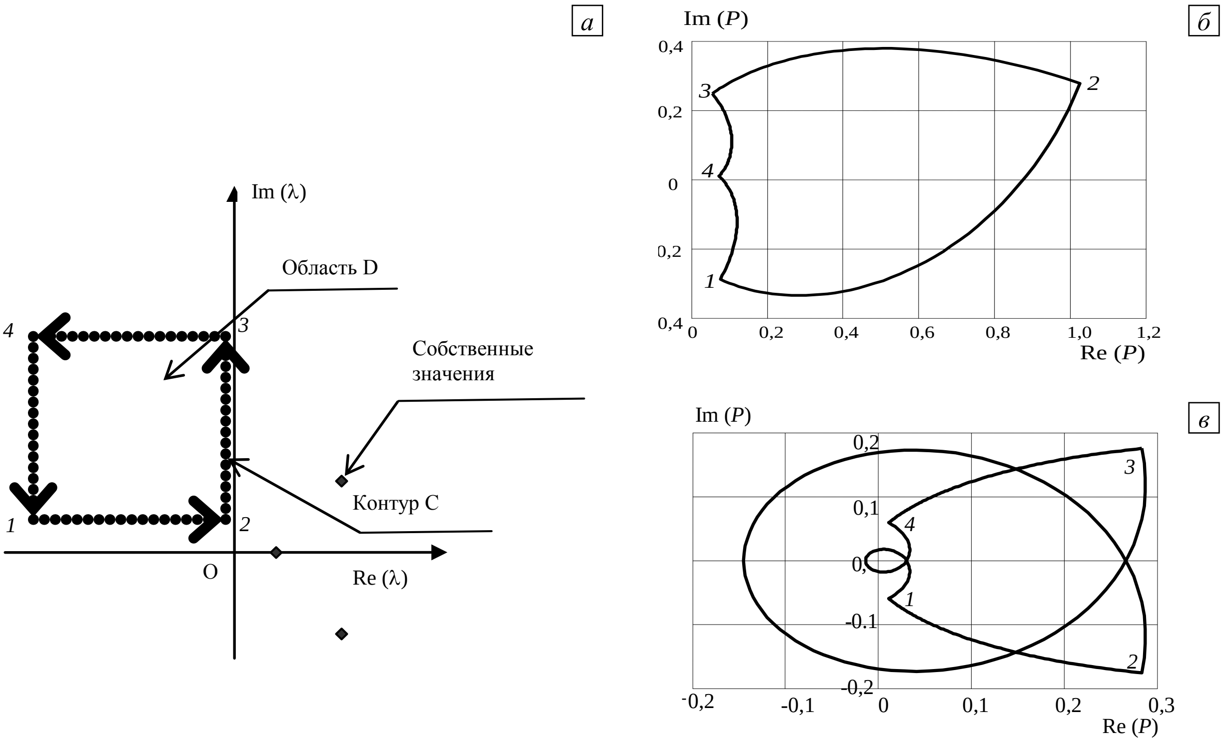

Рис. 3. Варианты графического представления движения вектора $\boldsymbol{w}$ при отсутствии собственных значений внутри рассматриваемой области

4. Заключение

Использование метода Мюллера совместно с принципом аргумента позволяет строить эффективные алгоритмы решения частичных алгебраических проблем комплексных собственных значений. Предложенный на их основе алгоритм позволил получить численные результаты при решении ряда задач механики деформируемого твердого тела [1, 2, 6,7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №12-01-00453-а, 14-01-96003-р_урал-а) и Программы фундаментальных исследований РАН УрО-25П (проект №12-П-1018).

Литература

1. *Matveenko V.P., Kligman E.P.* Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // J. Vib. Control. – 1997. – Vol. 3, no. 1. – P. 87-102. DOI
2. *Матвеенко В.П., Клигман Е.П., Юрлов М.А., Юрлова Н.А.* Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами // Физ. мезомех. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 75-85.
3. *Troyanovskii I.Ye., Shardakov I.N., Shevelev N.A.* The problem of the eigenvalues and modes of rotating deformable structures // J. Appl. Math. Mech. – 1991. – Vol. 55, no. 5. – P. 733-740. DOI
4. *Шевелев Н.А., Домбровский И.В.* Численное моделирование динамического поведения пространственных элементов машиностроительных конструкций // Вычисл. мех. сплош. сред.– 2008. – Т. 1, № 2. – С. 106-112. DOI
5. *Шевелев Н.А., Домбровский И.В.* Численный анализ динамических характеристик вращающихся деформируемых конструкций // Вычисл. мех. сплош. сред.– 2010. – Т. 3, № 1. – С. 93-104. DOI
6. *Bochkarev S.A., Matveyenko V.P., Shardakov I.N.* Numerical analysis of panel flutter in shells of revolution // J. Vib. Control. – 1997. – Vol. 3, no. 1. – P. 33-54. DOI
7. *Matveenko V.P., Nakaryakova T.O., Sevodina N.V., Shardakov I.N.* Stress singularity at the vertex of homogeneous and composite cones for different boundary conditions // J. Appl. Math. Mech. – 2008. – Vol. 72, no. 3. – P. 331-337. DOI
8. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 655 с.
9. *Lanczos C.* An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1950. – Vol. 45, no. 4. – P. 255-282. DOI
10. *Francis J.G.F.* The QR transformation – Part 2 // Comput. J. – 1961. – Vol. 4. – P. 332-345.
11. *Кублановская В.Н.* Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений. XII, Зап. научн. сем. ПОМИ. – СПб.: ПОМИ, 1997. – Т. 238. – С. 7-328. DOI
12. *Muller D.E.* A method for solving algebraic equations using an automatic computer // Mathematical Table and Other Aids to Computation. – 1956. – Vol. 10, no. 5. – P. 208-215. DOI
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

14. *Protopopov V.V.* Computing first order zeros of analytic functions with large values of derivatives // Numerical Methods and Programming. – 2007. – Vol. 8. – P. 311-316.
15. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 620 с.

References

1. Matveenko V.P., Kligman E.P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions. *J. Vib. Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87-102. DOI
2. Matveenko V.P., Kligman E.P., Yurlov M.A., Yurlova N.A. Simulation and optimization of dynamic characteristics of smart structures based on piezoelectric materials. *Phys. Mesomech*., 2012, vol. 15, no. 1, pp.75-85.
3. Troyanovskii I.Ye., Shardakov I.N., Shevelev N.A. The problem of the eigenvalues and modes of rotating deformable structures. *J. Appl. Math. Mech*., 1991, vol. 55, no. 5, pp. 733-740. DOI
4. Shevelev N.A., Dombrovskiy I.V. Numerical modeling of the dynamic behavior of spatial elements of machine-building constructions. *Vycisl. meh. splos. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 106-112. DOI
5. Shevelev N.A., Dombrovskiy I.V. Numerical analysis of the dynamic characteristics of rotating deformed structures. *Vycisl. meh. splos. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 93-104. DOI
6. Bochkarev S.A., Matveyenko V.P., Shardakov I.N. Numerical analysis of panel flutter in shells of revolution. *J. Vib. Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 33-54. DOI
7. Matveenko V.P., Nakaryakova T.O., Sevodina N.V., Shardakov I.N. Stress singularity at the vertex of homogeneous and composite cones for different boundary conditions. *J. Appl. Math. Mech*., 2008, vol. 72, no. 3, pp. 331-337. DOI
8. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Computational methods in linear algebra*. San Francisco, California: Freeman, 1963.
9. Lanczos C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Nat. Bur. Stand*., 1950, vol. 45, no. 4, pp. 255-282. DOI
10. Francis J.G.F. The QR transformation – Part 2. *Comput. J.*, 1961, vol. 4, pp. 332-345.
11. Kublanovskaya V.N. Methods and algorithms of solving spectral problems for polynomial and rational matrices. *Journal of Mathematical Sciences*, 1999, vol. 96, no. 3, pp. 3085-3287. DOI
12. Muller D.E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Mathematical Table and Other Aids to Computation*, 1956, vol. 10, no. 5, pp. 208-215. DOI
13. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka, 1973. 736 p.
14. Protopopov V.V. Computing first order zeros of analytic functions with large values of derivatives. *Numerical Methods and Programming*, 2007, vol. 8, pp. 311-316.
15. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenij* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz, 1966, vol. 2. 620 p.

Поступила в редакцию 23.09.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014

Сведения об авторах

Матвеенко Валерий Павлович, акад., дир., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: mvp@icmm.ru

Севодин Михаил Алексеевич, кфмн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский пр., д. 29; e-mail: m.sevodin@mail.ru

Севодина Наталья Витальевна, ктн, нс, ИМСС УрО РАН; e-mail: natsev@icmm.ru