

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.3.31](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.31)  
УДК 539.3

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ

П.О. Деревянкина<sup>1</sup>, Ю.С. Кузнецова<sup>1</sup>, Н.А. Труфанов<sup>1</sup>, И.Н. Шардаков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

<sup>2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Изложены теоретические положения метода геометрического погружения в напряжениях применительно к решению краевой задачи теории упругости изотропного однородного тела с произвольной формой границы. Основная идея метода заключается в построении сходящейся итерационной процедуры, позволяющей получать решение в области сложной пространственной конфигурации как последовательность решений задач в некоторой более простой по форме (канонической) области. Вариационная постановка задачи, полученная в рамках принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно), сведена к абстрактной математической проблеме – исследованию одного операторного уравнения с помощью методов функционального анализа. Главные результаты работы состоят в формулировке вида дифференциального представления задачи в канонической области, соответствующего основному вариационному уравнению метода геометрического погружения, задании возможных типов граничных условий на границе канонической области, построении итерационной процедуры метода геометрического погружения в напряжениях, доказательстве теоремы о сходимости итерационного процесса в терминах элементов введенных пространств тензоров напряжений. Для демонстрации метода геометрического погружения рассмотрена модельная задача, имеющая точное решение. С использованием метода конечных элементов в напряжениях для реализации решений задач в канонической области выполнен сравнительный анализ скорости и качества практической сходимости предложенной схемы и традиционного метода конечных элементов в перемещениях, имеющегося в программном комплексе ANSYS.

*Ключевые слова:* теория упругости, постановка в напряжениях, вариационный принцип Кастильяно, метод геометрического погружения, метод конечных элементов

## THEORETICAL PRINCIPLES OF A STRESS-BASED GEOMETRICAL IMMERSION METHOD

P.O. Derevyankina<sup>1</sup>, Yu.S. Kuznetsova<sup>1</sup>, N.A. Trufanov<sup>1</sup> and I.N. Shardakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The main theoretical principles of a stress-based geometrical immersion method which is applied to solve the boundary value problem of elasticity theory for isotropic homogeneous body with a complex spatial configuration are described. The basic idea of the method is to construct a convergent iterative procedure in order to find a solution for the area of complex spatial configuration as a sequence of problem solutions for some area of a more simple (canonical) form. The variational formulation of the problem is based on the variational principle of minimum additional work (Kastilyano's principle) and reduced to an abstract mathematical problem – study of one operator equation by the methods of functional analysis. According to the variational equation of the geometrical immersion method, differential formulation of the problem for the canonical area is obtained. The types of boundary conditions that need to be formulated for a new part of the boundary of the canonical area are prescribed. An iterative procedure for the stress-based geometrical immersion method is developed, and the convergence theorem for this iteration procedure is formulated in terms of the elements of these spaces of stress tensors. We consider a model problem, which has an exact solution and demonstrates the effectiveness of the geometrical immersion method. Application of the stress-based finite element method for solving the problem for the canonical area allows us to perform a comparative analysis of the rate and quality of practical convergence of the proposed scheme and the traditional displacement-based finite element method used in the software package ANSYS.

*Key words:* boundary value problem of elasticity theory, stress-based formulation, Kastilyano's variational principle, geometrical immersion, method, finite element method

### 1. Введение

Постановка краевой задачи теории упругости традиционно может быть выполнена в перемещениях или напряжениях [1–3], что при использовании вариационной формулировки подразумевает применение, соответственно, принципов минимума общей потенциальной энергии системы (принципа Лагранжа) или минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно). Численные методы теории упругости, такие как метод конечных элементов (МКЭ) [4, 5], вариационно-разностный метод [3, 6, 7], реализующие экстремальные принципы, в большинстве случаев базируются на их формулировке в перемещениях как более удобной с точки зрения выбора базисных функций. При этом к базисным функциям предъявляются достаточно просто удовлетворяемые требования кинематической допустимости, которые подразумевают выполнение граничных условий в перемещениях и существование первых производных по пространственным переменным. Известные недостатки численных решений в перемещениях заключаются в низкой точности определения полей деформаций и напряжений, проблеме анализа слабосжимаемых материалов, невозможности расчета несжимаемых тел [4, 5]. В связи с этим

широкое развитие получили смешанные (в перемещениях и напряжениях) формулировки задачи, опирающиеся на различные вариационные принципы [5, 8], при практическом воплощении более сложные, но в известной степени свободные от указанных недостатков.

Метод конечных элементов в напряжениях на основе вариационного принципа Кастильяно [9–12] применяется достаточно ограниченно, прежде всего, из-за сложности построения базисных функций, которые в данной формулировке должны быть статически допустимыми, то есть удовлетворяющими в элементе уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Особенно затруднителен выбор функций формы для изопараметрических элементов в напряжениях, поэтому распространение главным образом получили элементы прямоугольной формы для плоских задач [11] и возможные пространственные обобщения на их основе, пригодные для решения задач теории упругости в канонических по форме областях.

Существует ряд способов сведения краевой задачи теории упругости для области произвольной формы к задаче для канонической области: метод фиктивных областей [13, 14], метод геометрического погружения (МГП) [15] и другие. Ранее МГП сформулирован в перемещениях. Предложены эффективные алгоритмы реализации процедуры погружения с использованием метода конечных элементов, вариационно-разностного метода, метода граничных элементов [15], имеются обобщения этой процедуры на задачи для неупругих материалов [16–19].

В данной работе предлагается теоретическое обоснование метода геометрического погружения применительно к задаче теории упругости в напряжениях. Имеющиеся примеры реализации итерационной процедуры МГП на основе принципа Кастильяно [20, 21] демонстрируют работоспособность алгоритма. Привлекательность этого подхода связана с принципиальной возможностью получения при численной реализации посредством МГП полей напряжений с точностью более высокой, чем при решении в перемещениях, учета несжимаемости и слабой сжимаемости материалов, применения имеющихся наработок по МКЭ в напряжениях. Кроме того, получение решения задачи в перемещениях и в напряжениях позволяет построить вариационные нижнюю и верхнюю границы, в которых лежит точное решение задачи.

## 2. Постановка задачи

В  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  ( $n=1, 2, 3$ ) рассматривается связанное ограниченное открытое множество  $D$  с непрерывной по Липшицу [22] границей  $S$ . Замыкание  $\bar{D} = D \cup S$  множества  $D$  определяет в  $R^n$  область, занятую упругим изотропным телом.

Постановка краевой задачи теории упругости в напряжениях [1] при отсутствии объемных сил включает уравнения равновесия, уравнения совместности в напряжениях (соотношения Бельтрами–Митчелла), статические граничные условия и кинематические граничные условия:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

$$\frac{3\sigma_{.ij}}{1+\nu} + \Delta\sigma_{ij} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = T_i, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad (3)$$

$$u_i(\hat{\sigma}) = U_i, \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (4)$$

где  $S = S_\sigma \cup S_u$  ( $S_\sigma$ ,  $S_u$  — части границы  $S$ , на которых заданы, соответственно, поверхностные силы и перемещения);  $\mathbf{T}$  — вектор заданных на границе  $S_\sigma$  усилий с компонентами  $T_i$ ;  $\mathbf{x} \in D$  — радиус-вектор произвольной точки области, занятой упругим телом, с компонентами  $x_i$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $S$ , имеющий компоненты  $n_i$ ;  $\hat{\sigma}$  — симметричный тензор напряжений с компонентами  $\sigma_{ij}$ ;  $\sigma = \sigma_{kk}/3$  — среднее нормальное напряжение;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений с компонентами  $u_i$ ;  $\mathbf{U}$  — вектор заданных на границе  $S_u$  перемещений с компонентами  $U_i$ ; символ « $\cdot$ » в индексах означает взятие производной по пространственной переменной (или переменным) с индексом (или индексами), стоящим после него.

Тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  связан с тензором деформаций  $\hat{\varepsilon}$ , имеющим компоненты  $\varepsilon_{ij}$ , физическим законом Гука:  $\hat{\sigma} = \lambda I_1(\hat{\varepsilon})\hat{E} + 2\mu\hat{\varepsilon}$ , или в обратной записи  $\hat{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\hat{\sigma} - \frac{\nu}{E}I_1(\hat{\sigma})\hat{E}$ , где  $\hat{E}$  — единичный тензор;  $I_1(\hat{\varepsilon})$  — первый инвариант тензора деформаций [1];  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие параметры Ламе;  $I_1(\hat{\sigma})$  — первый инвариант тензора напряжений [1];  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Связь линейного тензора деформаций  $\hat{\varepsilon}$  с вектором перемещений  $\mathbf{u}$  определяется геометрическими соотношениями Коши:  $\hat{\varepsilon} = \text{def}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}((\nabla\mathbf{u})^T + \nabla\mathbf{u})$ , а его компоненты  $\varepsilon_{ij}$  удовлетворяют условию совместности в форме Сен-Венана:  $\text{Ink}(\hat{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii,kj} - \varepsilon_{ik,ij} - \varepsilon_{ij,ki} + \varepsilon_{jk,ii} = 0$ . Представление граничного условия на  $S_u$  в форме (4) требует записи компонент вектора перемещений через компоненты тензора деформаций с помощью формул Чезаро [1] и замену деформаций напряжениями в соответствии с законом Гука. Известно, что формулы Чезаро дают неединственное выражение для связи перемещений и деформаций (с точностью до смещений среды как абсолютно жесткого тела). Чтобы исключить неединственность решения, предполагаем, что наложение на упругую систему кинематических связей вида (4) обеспечивает отсутствие жестких смещений и поворотов.

В тензорной форме задача (1)–(4) переписывается в виде:

$$\text{div} \hat{\sigma}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D; \tag{5}$$

$$\Delta \hat{\sigma}(\mathbf{x}) + \frac{1}{1+\nu} \text{grad}(\text{div} \hat{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in D; \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_\sigma; \tag{7}$$

$$\mathbf{u}(\hat{\sigma}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\hat{\sigma}(\mathbf{x})) = \mathbf{U}, \quad \mathbf{x} \in S_u, \tag{8}$$

где  $\mathbf{f}(\hat{\sigma}) = \text{def}^{-1} \left[ \frac{1+\nu}{E} \hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} I_1(\hat{\sigma}) \hat{E} \right]$ .

### 3. Вариационная постановка задачи

Рассмотрим функционал дополнительной работы упругого тела [1–3]:

$$P_{\text{доп}}(\hat{\sigma}) = \int_D A(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u = \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u, \tag{9}$$

определенный на множестве статически допустимых полей напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия (1) в области  $D$  и статическим граничным условиям (3) на границе  $S_\sigma$ . В выражении (9) приняты обозначения:  $A(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2E} [(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\sigma_{kk}]$ ,  $t_i = \sigma_{ij}n_j$  — усилия на поверхности  $S_u$ .

Проварьируем функционал (9), учитывая, что вариации  $\delta\sigma_{ij}$  также являются статически допустимыми функциями, то есть удовлетворяющими условиям:  $\delta\sigma_{ij,j} = 0$  при  $\mathbf{x} \in D$ ;  $\delta\sigma_{ij}n_j = 0$  при  $\mathbf{x} \in S_\sigma$ ;  $\delta\sigma_{ij}$  произвольны при  $\mathbf{x} \in S_u$ . Тогда вариационная постановка задачи примет вид:

$$\delta P_{\text{доп}}(\hat{\sigma}) = 0, \tag{10}$$

где

$$\delta P_{\text{доп}}(\hat{\sigma}) = \int_D \delta\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\delta\hat{\sigma}) U_i dS_u. \tag{11}$$

Отсюда следует выполнение естественным образом уравнений Бельтрами–Митчелла (6) в области  $D$  и граничных условий в перемещениях (8) на  $S_u$  [1–3].

### 4. Используемые пространства и нормы

Введем в рассмотрение пространство  $V$  векторов перемещений  $\mathbf{u}: V(R^n) = \{\mathbf{u} \in H^3(R^n)\}$ , где через  $H^m(R^n)$  [22] будем обозначать пространство Соболева, состоящее из функций  $\mathbf{u} \in L_2(R^n)$ , все частные производные которых в смысле обобщенных функций до порядка  $m$  включительно принадлежат пространству  $L_2(R^n)$  (интегрируемых с квадратом в области  $R^n$ ). Действуя на элементы  $\mathbf{u} \in V(R^n)$  линейным дифференциальным оператором  $\text{def}(\mathbf{u})$ , получим пространство тензоров деформаций  $\hat{\varepsilon}$ :

$$W(R^n) = \{ \hat{\varepsilon} \in H^2(R^n), \text{Ink}(\hat{\varepsilon}) = 0, \hat{\varepsilon} = \text{def}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in V(R^n) \}.$$

Линейное преобразование  $L\hat{\varepsilon} = {}^4\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\varepsilon}$  элементов  $\hat{\varepsilon} \in W(R^n)$ , где  ${}^4\hat{\mathbf{C}}$  — тензор упругих постоянных материала, дает пространство тензоров напряжений  $\hat{\sigma}$ :

$$\Phi(R^n) = \{ \hat{\sigma} \in H^2(R^n), \hat{\sigma} = L\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon} \in W(R^n) \}.$$

Рассмотрим подпространство  $\Psi(D)$  пространства  $\Phi(R^n)$ :

$$\Psi(D) = \{ \hat{\psi} \in \Phi(D); \text{div} \hat{\psi} = 0, \mathbf{x} \in D; \hat{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in S_\sigma \},$$

где  $\hat{\sigma} = \hat{\psi} + \hat{\phi}$ ,  $(\hat{\phi} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}, \mathbf{x} \in S_\sigma)$ . Пространство  $\Psi(D)$  является полным замкнутым подпространством

Соболева [22, 23]:  $\Psi^2(D) = H^2(D) = \{ \hat{\psi} \in L_2(D), \partial^\alpha \hat{\psi} \in L_2(D), |\alpha| \leq 2 \}$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N^n$ .

Здесь использованы мультииндексные обозначения частных производных [22].

Определим скалярные произведения:

$$\begin{aligned} \forall \hat{\chi}, \hat{\psi} \in \Psi(D) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle &= \int_D \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD; \\ \forall \mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{f}(\hat{\psi}) \in L_2(S_u) \quad (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{f}(\hat{\psi})) &= \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{f}(\hat{\psi}) dS_u = \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{U} dS_u, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{f}(\hat{\psi}) \equiv \mathbf{U}$  — операторы, отображающие элементы  $\hat{\psi}, \hat{\chi} \in H^2(D)$  в элементы векторного пространства  $L_2(S_u)$ . Порождаемые введенными скалярными произведениями нормы соответствующих пространств имеют вид:

$$\forall \hat{\psi} \in \Psi(D) \quad \|\hat{\psi}\| = \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle^{1/2}; \quad (12)$$

$$\forall \mathbf{t} \in L_2(S_u) \quad \|\mathbf{t}\|_{S_u} = (\mathbf{t}, \mathbf{t})^{1/2}. \quad (13)$$

С учетом вышесказанного функционал (9) переписется как  $\Pi_{\text{дон}}(\hat{\psi}) = \frac{1}{2} \int_D \hat{\psi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD - \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\psi}) \cdot \mathbf{U} dS_u$  или

$$\Pi_{\text{дон}}(\hat{\psi}) = \frac{1}{2} \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle - (\mathbf{t}(\hat{\psi}), \mathbf{U}), \text{ а его вариация (11) примет вид: } \delta \Pi_{\text{дон}}(\hat{\psi}) = \int_D \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD - \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{U} dS_u.$$

В итоге приходим к вариационному уравнению

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi(D) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle = (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \quad (14)$$

для которого, согласно теореме Лакса–Мильграма [22], существует единственное решение  $\hat{\psi} \in \Psi(D)$ . Обобщенное решение краевой задачи (5)–(8) получается из вариационного уравнения (14):  $\forall \hat{\chi} \in \Psi(D)$ , и сообщает, в соответствии с вариационным принципом Кастильяно, минимум функционалу  $\Pi_{\text{дон}}(\hat{\psi})$ .

## 5. Введение канонической области. Связь элементов пространств $\Psi(D)$ и $\Psi_0(D_0)$

Для осуществления геометрического погружения введем в рассмотрение каноническую область  $\bar{D}_0$ , представляющую собой замыкание  $\bar{D}_0 = D_0 \cup S_0$  ограниченного открытого множества  $D_0 \subset R^n$ , имеющего непрерывную по Липшицу границу  $S_0$  (Рис. 1).

Пусть выполняется условие

$$\bar{D} \subset \bar{D}_0. \quad (15)$$

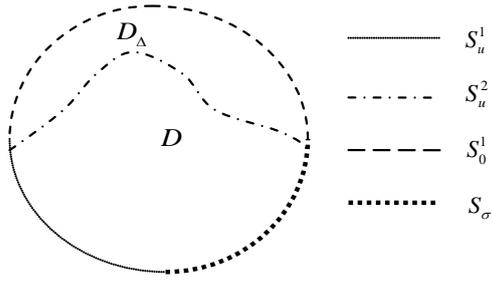


Рис. 1. Исходная область  $D$ , область дополнения  $D_\Delta$  и обозначения границ

Также полагаем, что  $S_u^1 = S_u \cap S_0$ ,  $S_u^2 = S_u \cap S_\Delta$ , где  $S_\Delta$  — непрерывная по Липшицу граница области  $D_\Delta = D_0 \setminus D$  — дополнения множества  $D$  до  $D_0$ . Таким образом,  $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$ ,  $S_0 = S_u^1 \cup S_0^1 \cup S_\sigma$ ,  $S_0^1 = S_0 \cap S_\Delta$ ,  $S_\Delta = S_0^1 \cup S_u^2$ .

Найдем соответствие решения уравнения (14) полному замкнутому пространству

$$\Psi_0(D_0) = \{ \hat{\psi} \in \Phi(D_0); \operatorname{div} \hat{\psi} = 0, \mathbf{x} \in D_0; \hat{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in S_\sigma; F(\hat{\psi}) = 0, \mathbf{x} \in S_0^1 \} \quad (16)$$

со скалярным произведением

$$\forall \hat{\chi}, \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle_0 = \int_{D_0} \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD_0 \quad (17)$$

и нормой  $\forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \quad \|\hat{\psi}\|_0 = \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_0^{1/2}$ . В (16) как  $F(\hat{\psi})$  обозначен однородный линейный оператор, зависящий от тензора  $\hat{\psi}$  или только от некоторых его компонент. Введем два однозначных отображения:

- 1)  $\gamma: \Psi_0(D_0) \rightarrow \Psi(D): \forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \quad \exists \hat{\chi} \in \Psi(D): \hat{\chi} = \gamma(\hat{\psi});$
- 2)  $\varphi: \Psi(D) \rightarrow \Psi_0(D_0): \forall \hat{\chi} \in \Psi(D) \quad \exists \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0): \hat{\psi} = \varphi(\hat{\chi}).$

Первое утверждает, что  $\forall \mathbf{x} \in D \quad \hat{\chi} = \hat{\psi}$ , означая тем самым сужение области определения  $\forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0)$  до  $D$ , при этом справедливо неравенство  $\forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \quad \|\hat{\psi}\|_0 \geq \|\gamma(\hat{\psi})\|$ , которое следует из положительной определенности функционалов (12), (17) и условия (15). Из второго однозначного отображения следует, что  $\forall \mathbf{x} \in D \quad \hat{\psi} = \hat{\chi}$  и  $\forall \mathbf{x} \in D_\Delta \quad \hat{\psi} = \hat{\chi}_*$ , где  $\hat{\chi}_*$  — решение краевой задачи:

$$\Delta \hat{\chi}_* + \frac{1}{1+\nu} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \hat{\chi}_*) = 0, \quad \mathbf{x} \in D_\Delta; \quad (18)$$

$$\hat{\chi}_* = \hat{\chi}, \quad \mathbf{x} \in S_\Delta \cap S. \quad (19)$$

Для  $\mathbf{x} \in S_0^1$  краевое условие (19), как станет ясно из дальнейшего изложения, может иметь один из следующих типов:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_* &= 0, & \mathbf{x} \in S_0^1; & & 1 \\ u_i(\hat{\chi}_*) n_j &= 0, & \mathbf{x} \in S_0^1; & & 2 \\ \chi_{*ij} &= 0, \quad u_k n_l = 0, & i, j \neq k, \quad i, j \neq l, & \mathbf{x} \in S_0^1, & 3 \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности при  $\mathbf{x} \in S_0^1$ ;  $u_i$  — компонента вектора  $\mathbf{u}$ . При таких краевых условиях существует единственное решение задачи (18)–(20). Таким образом, отображение  $\varphi$  расширяет область определения  $\forall \hat{\chi} \in \Psi(D)$  до  $D_0$ , продолжая элемент  $\hat{\chi}$  однозначно и непрерывно по значению  $\hat{\chi}$  при  $\mathbf{x} \in S_\Delta \cap S$  решением задачи (18)–(20) при  $\mathbf{x} \in D_\Delta$ .

Итак, из анализа построенных отображений можно заключить:

- областью значений отображения  $\gamma: \Psi_0(D_0) \rightarrow \Psi(D)$  служит все пространство  $\Psi(D)$ ;
- решению  $\hat{\psi} \in \Psi(D)$  вариационного уравнения (14) отвечает единственный элемент  $\varphi(\hat{\psi}) \in \Psi_0(D_0)$ , что следует из однозначности отображения  $\varphi: \Psi(D) \rightarrow \Psi_0(D_0)$ .

Эти утверждения позволяют установить соответствие решения уравнения (14) —  $\hat{\psi} \in \Psi(D)$ , пространству  $\Psi_0(D_0)$ :

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \gamma(\hat{\chi}), \gamma(\varphi(\hat{\psi})) \rangle = (\mathbf{t}(\gamma(\hat{\chi})), \mathbf{U}). \quad (21)$$

Запись  $\gamma(\varphi(\hat{\psi}))$  означает последовательное действие отображений:  $\varphi$  — на элемент  $\hat{\psi} \in \Psi(D)$  и  $\gamma$  — на элемент  $\varphi(\hat{\psi}) \in \Psi_0(D_0)$ . Отметим, что

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad (\mathbf{t}(\gamma(\hat{\chi})), \mathbf{U}) = (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}). \quad (22)$$

Для элементов пространства  $\Psi_0(D_0)$  имеет место равенство [23]:

$$\forall \hat{\psi}, \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \gamma(\hat{\chi}), \gamma(\hat{\psi}) \rangle = \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle_0 - \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle_\Delta, \quad (23)$$

где билинейная форма  $\langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle_\Delta = \int_{D_\Delta} \hat{\chi} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD_\Delta$  симметрична и при  $\hat{\chi} = \hat{\psi}$  является положительным функционалом, для которого вследствие определения  $D_\Delta$  справедливо неравенство

$$\forall \hat{\psi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_0 \geq \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_\Delta. \quad (24)$$

Используя (21)–(23), можно получить уравнение

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \varphi(\hat{\psi}) \rangle_0 = \langle \hat{\chi}, \varphi(\hat{\psi}) \rangle_\Delta + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \quad (25)$$

которое будет основополагающим для метода геометрического погружения в вариационной формулировке. Из существования и единственности решения  $\hat{\psi} \in \Psi(D)$  исходного уравнения (14), из построенных однозначных отображений, а также из равенства (23) следуют существование и единственность решения  $\varphi(\hat{\psi}) \in \Psi_0(D_0)$  — решения вариационного уравнения (25).

## 6. Вариационный принцип Кастильяно

Из общих методических соображений приведем основные положения вариационного принципа Кастильяно, следуя работам [1, 2]. Принцип Кастильяно утверждает, что из всех статически возможных напряженных состояний тела при заданных внешних силах в действительности реализуется только то напряженное состояние, для которого функционал (9) имеет минимум, то есть следует уравнение (10). Покажем, что условие (10) влечет за собой выполнение уравнений Бельтрами–Митчелла, представляющих уравнения Эйлера–Остроградского для функционала (9), а также выполнение кинематических граничных условий (4) на части  $S_u$  поверхности тела как естественных граничных условий вариационной задачи.

С учетом того, что вариации  $\delta\sigma_{ij}$  должны подчиняться условиям, отмеченным в разделе 3, которые являются уравнениями связей, и следуя методу неопределенных множителей Лагранжа [1, 2], запишем условие стационарности (10) в следующем виде:

$$\delta\Pi_{\text{дон}} = \int_D \left[ \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} \right] dD - \int_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j U_i dS_u = 0, \quad (26)$$

где  $\frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}]$ ,  $\lambda_i$  — неопределенные множители — компоненты некоторого вектора  $\lambda$  в области  $D$ , занятой телом.

Применяя формулу Остроградского, преобразуем в (26) объемный интеграл:

$$\int_D \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} dD = \int_D (\lambda_i \delta\sigma_{ij})_{,j} dD - \int_D \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} dD = \int_S \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS - \int_D \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} dD, \quad (27)$$

где  $(\lambda_{i,j})$  — компоненты несимметричного тензора второго ранга, в которых можно выделить симметричные и кососимметричные:  $\lambda_{i,j} = \frac{1}{2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) + \frac{1}{2}(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i})$ . Тогда объемный интеграл в (27)

перепишется в виде:  $\int_D \lambda_{i,j} \delta \sigma_{ij} dD = \frac{1}{2} \int_D (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD + \frac{1}{2} \int_D (\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD = \frac{1}{2} \int_D (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD$ , поскольку произведение  $(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij}$  будет равно нулю, так как напряжения  $\delta \sigma_{ij}$  — компоненты симметричного тензора.

В поверхностном интеграле из (27) учтем, что  $\delta \sigma_{ij} n_j = 0$  при  $\mathbf{x} \in S_\sigma$ :

$$\int_S \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS = \int_{S_u} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_u + \int_{S_\sigma} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_\sigma = \int_{S_u} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_u.$$

Тогда условие стационарности (26) станет следующим:

$$\delta \Pi_{\text{доп}} = \int_D \left[ \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} dD + \int_{S_u} (\lambda_i - U_i) \delta \sigma_{ij} n_j dS_u = 0. \quad (28)$$

Здесь шесть вариаций  $\delta \sigma_{ij}$ , связанных тремя уравнениями  $\delta \sigma_{ij,j} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in D$ , при соответствующем выборе трех компонент  $\lambda_i$  лагранжева вектора  $\boldsymbol{\lambda}$  можно считать произвольными.

В подинтегральных выражениях условия стационарности (28) приравняем нулю множители перед вариациями  $\delta \sigma_{ij}$  и получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} &= \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}), \quad \mathbf{x} \in D; & 1 \\ \lambda_i &= U_i, \quad \mathbf{x} \in S_u & 2 \end{aligned} \quad (29)$$

В (29)<sub>1</sub> выражение справа представляет собой симметричную часть тензора, определяемую компонентами вектора  $\boldsymbol{\lambda}$ ; второе соотношение показывает, что вектор  $\boldsymbol{\lambda}$  должен быть равен вектору  $\mathbf{U}$ , заданному на поверхности  $S_u$  тела. Очевидно, что вектор  $\boldsymbol{\lambda}$  можно отождествить с вектором перемещения  $\mathbf{u}$  в области  $D$ , то есть считать тензор, определяемый правой частью (29)<sub>1</sub>, тензором деформаций  $\hat{\varepsilon}$ . Следовательно, его компоненты должны подчиняться зависимостям Сен-Венана:  $\text{Ink}(\hat{\varepsilon}) = 0$ . Подставляя в них значения компонент  $\varepsilon_{ij}$ , выраженные левой частью (29)<sub>1</sub>, приходим к уравнениям Бельтрами как к уравнениям Эйлера–Остроградского для функционала  $\Pi_{\text{доп}}$ , для которого соотношения (29)<sub>2</sub> становятся естественными граничными условиями вариационной задачи.

Теперь описанную методику применим к задаче теории упругости, учитывая погружение исходной области сложной пространственной конфигурации в каноническую область. Выполним тождественное преобразование выражения дополнительной работы (9):

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{доп}} &= \int_D A(\sigma_{ij}) dD - \int_{S_u} t_i U_i dS_u + \int_{D_\Delta} A(\sigma_{ij}) dD_\Delta - \int_{D_\Delta} A(\sigma_{ij}) dD_\Delta = \\ &= \int_{D_0} A(\sigma_{ij}) dD_0 - \int_{S_u} t_i U_i dS_u - \int_{D_\Delta} A(\sigma_{ij}) dD_\Delta. \end{aligned} \quad (30)$$

Условие минимума функционала (30) примет вид:

$$\delta \Pi_{\text{доп}} = \int_D \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dD - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j U_i dS_u - \int_{D_\Delta} \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dD_\Delta = 0.$$

Прибегнем к методу неопределенных множителей Лагранжа и формуле Остроградского:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{доп}} &= \int_{D_0} \left[ \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \lambda_i \delta \sigma_{ij,j} \right] dD - \int_{D_\Delta} \left[ \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \lambda_i \delta \sigma_{ij,j} \right] dD_\Delta - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j U_i dS_u = \\ &= \int_{D_0} \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dD_0 + \int_{S_0} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_0 - \int_{D_0} \lambda_{i,j} \delta \sigma_{ij} dD_0 - \int_{D_\Delta} \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dD_0 - \int_{S_\Delta} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_0 + \\ &\quad + \int_{D_\Delta} \lambda_{i,j} \delta \sigma_{ij} dD_\Delta - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j U_i dS_u. \end{aligned}$$

Вновь разложим компоненты несимметричного тензора второго ранга  $(\lambda_{i,j})$  на симметричную и несимметричную части:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{доп}} = & \int_{D_0} \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dD_0 - \int_{D_0} \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD_0 - \int_{D_0} \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD_0 + \int_{S_u^1} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_u^1 + \\ & + \int_{S_0^1} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_0^1 + \int_{S_\sigma} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_\sigma^1 - \int_{D_\Delta} \frac{\partial A(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} dD_\Delta + \int_{D_\Delta} \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD_\Delta + \\ & + \int_{D_\Delta} \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dD_\Delta - \int_{S_u^2} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_u^2 - \int_{S_0^2} \lambda_i \delta \sigma_{ij} n_j dS_0^2 - \int_{S_u^1} \delta \sigma_{ij} n_j U_i dS_u^1 - \int_{S_u^2} \delta \sigma_{ij} n_j U_i dS_u^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Окончательно из (31) получим:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{доп}} = & \int_{D_0} \left[ \frac{1}{E} (1+\nu) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} dD_0 - \\ & - \int_{D_\Delta} \left[ \frac{1}{E} (1+\nu) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} dD_\Delta + \int_{S_u^1} (\lambda_i - U_i) \delta \sigma_{ij} n_j dS_u^1 - \int_{S_u^2} (\lambda_i + U_i) \delta \sigma_{ij} n_j dS_u^2 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} (1+\nu) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} &= \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}), \quad \mathbf{x} \in D_0; \\ (\lambda_i - U_i) n_j &= 0, \quad \mathbf{x} \in S_u^1; \\ (\lambda_i + U_i) n_j &= 0, \quad \mathbf{x} \in S_u^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор  $\lambda$  по-прежнему отождествляется с вектором перемещений  $\mathbf{u}$  в области  $D$ , а при переходе через границы  $S_u^2$  и  $S_u^1$  наблюдается скачок в значениях его компонент.

Из анализа (32) следует формулировка требования

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D) \quad \mathbf{u}(\hat{\psi}) \cdot \hat{\chi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0^1, \quad (33)$$

которому удовлетворяют все типы однородных краевых условий (20). Используя этот произвол, можно выбрать наиболее приемлемый для решаемой задачи тип краевых условий. Отметим, что принятый для  $\mathbf{x} \in S_0^1$  вариант краевого условия однозначно определит и вид оператора  $F(\hat{\psi})$  в (16).

## 7. Вспомогательное вариационное уравнение

Рассмотрим другое вариационное уравнение

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_0 = (1-\varepsilon) \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_\Delta + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \quad (34)$$

где  $\forall \hat{\xi} \in \Psi_0(D_0)$ , а  $\varepsilon$  — числовой параметр. Условия близости решений вариационных уравнений (25) и (34) определяет следующая теорема:

**Теорема 1.** Если числовой параметр  $\varepsilon$  удовлетворяет условию  $\varepsilon \geq 0$ , то  $\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})$  — разность решений вариационных уравнений (25) и (34), по норме пространства  $\Psi(D)$  удовлетворяет неравенству

$$\|\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})\| \leq C\varepsilon,$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Вычитая почленно из уравнения (25) уравнение (34), получим соотношение:

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \rangle_0 = \langle \hat{\chi}, (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \rangle_\Delta - \varepsilon \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_\Delta,$$

которое преобразуется к виду:

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \rangle_0 = -\varepsilon \langle \hat{\chi}, (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \rangle + \langle \hat{\chi}, \varphi(\hat{\xi}) \rangle_{\Delta}. \quad (35)$$

Используя произвольность элемента  $\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0)$ , примем его равным  $(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})$  и подставим в (35). В результате получим

$$\langle \gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}), \gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \rangle_0^+ = \varepsilon \langle (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}), \varphi(\hat{\psi}) \rangle - \varepsilon \langle (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}), (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \rangle_{\Delta}^+,$$

откуда, с учетом положительной определенности скалярных произведений, отмеченных символом «+», следует неравенство:

$$\|\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})\|^2 \leq \varepsilon \langle (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}), \varphi(\hat{\psi}) \rangle. \quad (36)$$

Преобразуем правую часть неравенства (36) с помощью формулы Остроградского–Гаусса:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}, \varphi(\hat{\psi}) \rangle_{\Delta} &= \int_{D_{\Delta}} \left[ \frac{1}{E}(1+\nu)\varphi(\hat{\psi}) - \frac{\nu}{E}I_1(\varphi(\hat{\psi}))\hat{E} - def(\mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi}))) \right] \cdot (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) dD_{\Delta} + \\ &+ \int_{S_0^1} \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) \cdot (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \cdot \mathbf{n} dS_0^1 + \int_{S_u^2} \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) \cdot (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \cdot \mathbf{n} dS_u^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Первый и второй интегралы в (37) равняются нулю, первый — в силу (18), второй — в силу (19) как частного случая условия (33). К третьему интегралу применим неравенство Коши–Шварца [22]:

$$\int_{S_u^2} \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) \cdot (\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \cdot \mathbf{n} dS_u^2 \leq \left[ \int_{S_u^2} \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) \cdot \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) dS_u^2 \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_{S_u^2} ((\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \cdot \mathbf{n}) \cdot ((\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \cdot \mathbf{n}) dS_u^2 \right]^{1/2}. \quad (38)$$

Согласно этому неравенству имеем:

$$\forall \hat{\psi}, \hat{\chi} \in \Psi(D) \quad \|(\hat{\psi} - \hat{\chi}) \cdot \mathbf{n}\|_{S_u} \leq \alpha \|\hat{\psi} - \hat{\chi}\|, \quad (39)$$

где норма в левой части неравенства определена соотношением (13), и величина  $\alpha$  зависит от  $S_u$ . С учетом того, что  $S_u^2 \subset S$  и  $\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}) \in \Psi(D)$ , соотношение (39) позволяет усилить неравенство (38) и оценить сверху равенство (37):

$$\langle \varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}, \varphi(\hat{\psi}) \rangle_{\Delta} \leq \alpha \|\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})\| \left[ \int_{S_u^2} \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) \cdot \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) dS_u^2 \right]^{1/2}. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (36), будем иметь:  $\|\gamma(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi})\| \leq \varepsilon \alpha \left[ \int_{S_u^2} \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) \cdot \mathbf{u}(\varphi(\hat{\psi})) dS_u^2 \right] = \varepsilon C$ , где величина  $C$

не зависит от  $\varepsilon$ . Теорема доказана. Из теоремы 1 следует, что при достаточно малой величине  $\varepsilon$  решение вариационной задачи (34) в области  $D$  сколь угодно близко к решению исходного вариационного уравнения (25) по норме пространства  $\Psi(D)$  и может быть использовано в качестве приближенного решения.

## 8. Вариационное уравнение метода геометрического погружения

Как показано выше, процедура погружения сводит отыскание обобщенного решения исходной краевой задачи на реальной области сложной конфигурации  $D$  к построению решения вариационного уравнения (34), определенного в области канонической формы  $D_0$ . Особенно просто и эффективно решение уравнения (34) получается итерационным методом. Условие сходимости выбранной схемы последовательных приближений устанавливает следующая теорема:

**Теорема 2.** Если числовой параметр  $\varepsilon$  удовлетворяет условию  $0 < \varepsilon \leq 1$ , то  $\{\xi^k\}$  — последовательность итераций при решении вариационного уравнения

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^k \rangle_0 = (1-\varepsilon) \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^{k-1} \rangle_\Delta + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}) \quad (k=1, 2, \dots); \quad \hat{\xi}^0 = 0 \quad (41)$$

сходится по норме пространства  $\Psi_0(D_0)$ , то есть  $\|\hat{\xi}^m - \hat{\xi}^n\|_{0, m, n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Представим  $m$ -й и  $n$ -й шаги итерационного решения, соответственно, как  $\hat{\xi}^m = \hat{\xi}^0 + \sum_{k=1}^m (\hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1})$  и  $\hat{\xi}^n = \hat{\xi}^0 + \sum_{k=1}^n (\hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1})$ , при этом  $m > n$ . Тогда

$$\hat{\xi}^m - \hat{\xi}^n = \sum_{k=n+1}^m (\hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}). \quad (42)$$

Переходя в (42) к неравенству, установим, что

$$\|\hat{\xi}^m - \hat{\xi}^n\|_0 \leq \sum_{k=n+1}^m \|\hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}\|_0. \quad (43)$$

Путем почленного вычитания равенства  $\langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^{k-1} \rangle_0 = (1-\varepsilon) \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^{k-2} \rangle_\Delta + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U})$  из уравнения (43) получим

$$\langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1} \rangle_0 = (1-\varepsilon) \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^{k-1} - \hat{\xi}^{k-2} \rangle_\Delta. \quad (44)$$

При  $k=1$  уравнение (44) имеет вид  $\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\xi}^1 \rangle_0 = (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U})$ . Из непрерывности линейного функционала  $(\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U})$  на пространстве  $\Psi_0(D_0)$  имеем

$$\|\hat{\xi}^1\|_0 \leq B, \quad (45)$$

где величина  $B$  зависит от известных параметров  $\mathbf{U}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{D}_0$ .

Используя произвольность элемента  $\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0)$  в равенстве (44) и принимая  $\hat{\chi} = \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}$ , приходим к соотношению

$$\langle \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}, \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1} \rangle_0 = (1-\varepsilon) \langle \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}, \hat{\xi}^{k-1} - \hat{\xi}^{k-2} \rangle_\Delta. \quad (46)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к правой части неравенства (46), найдем

$$\langle \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}, \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1} \rangle_0 \leq (1-\varepsilon) \cdot \langle \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}, \hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1} \rangle_\Delta^{1/2} \cdot \langle \hat{\xi}^{k-1} - \hat{\xi}^{k-2}, \hat{\xi}^{k-1} - \hat{\xi}^{k-2} \rangle_\Delta^{1/2}.$$

С учетом неравенств (24) и (45) можно показать справедливость оценки  $\forall k \geq 1 \quad \|\hat{\xi}^k - \hat{\xi}^{k-1}\|_0 \leq B(1-\varepsilon)^{k-1}$ , которая позволяет выявить, что левая часть неравенства (43) удовлетворяет условию  $\|\hat{\xi}^m - \hat{\xi}^n\|_0 \leq B(1-\varepsilon)^n / \varepsilon$ . Отсюда следует, что если  $0 < \varepsilon \leq 1$ , то  $\|\hat{\xi}^m - \hat{\xi}^n\|_{0, m, n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

В дальнейшем уравнение (41) будем называть вариационным уравнением метода геометрического погружения. Из теоремы 2 следует, что итерационный процесс метода геометрического погружения сходится всегда независимо от степени отличия исходной области  $D$  от канонической  $D_0$ .

## 9. Иллюстративный пример

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу теории упругости в декартовой системе координат: сжатие вдоль оси  $Ox$  бесконечной пластины с круглым вырезом под действием равномерно распределенной нагрузки  $P$ . На контуре выреза равны нулю обе компоненты вектора перемещений. Задача деформирования пластины с круглым абсолютно жестким включением путем сжатия является одной из классических в теории упругости [24].

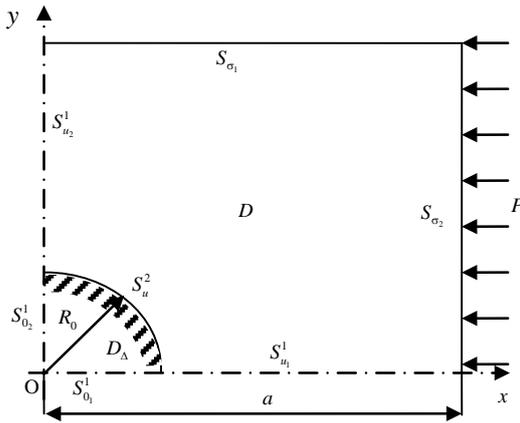


Рис. 2. Исходная область  $D$  и область дополнения  $D_\Delta$

При построении дискретного аналога задачи размеры пластинки составляли  $2a \times 2a$ , радиус выреза —  $R_0 = a/7$ , параметры материала —  $E = 2,3 \cdot 10^{11}$  Па (модуль Юнга),  $\nu = 0,33$  (коэффициент Пуассона). В силу симметрии решения задачи относительно координатных осей в расчет принималась четверть пластины.

Руководствуясь общей схемой МГП, введем в качестве канонической области  $D_0$  прямоугольник ( $0 \leq x \leq 2a$ ,  $0 \leq y \leq 2a$ ), полностью включающий исходную область (Рис. 2). Область  $D_\Delta$  в данном случае будет представлять собой четверть круга радиусом  $R_0$ .

Постановка исходной задачи включает в себя известные уравнения плоской задачи теории упругости [24] и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad y \in S_{u_2}^1; \\ u_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x \in S_{u_1}^1; \\ u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S_u^2; \\ \sigma_{xx}(a, y) = -P(y), \quad \tau_{xy}(a, y) = 0, \quad y \in S_{\sigma_2}^1; \\ \sigma_{yy}(x, a) = \tau_{xy}(x, a) = 0, \quad x \in S_{\sigma_1}^1. \end{aligned}$$

Так как процедура МГП подразумевает решение задачи на канонической области, необходимо сформулировать граничные условия и на  $S_{0_1}^1$ ,  $S_{0_2}^1$ . В разделе 6 статьи показано, что в общем случае граничные условия здесь могут быть: кинематическими, статическими или смешанными. Поскольку в совокупности  $S_{0_1}^1$  и  $S_{u_1}^1$ ,  $S_{0_2}^1$  и  $S_{u_2}^1$  определяют стороны прямоугольника, целесообразно на  $S_{0_1}^1$  и  $S_{0_2}^1$  задать краевые условия такие же, как на  $S_u^1$  и  $S_{u_2}^1$ , а именно равенство нулю нормальных к границам компонент перемещений и касательных напряжений.

Вариационное уравнение МГП (41) предполагает реализацию следующей итерационной процедуры:

$$\begin{aligned} \int_{D_0} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dD - \int_{D_\Delta} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dD_\Delta - \int_{S_u} t_i(\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_i dS_u = \\ = \frac{1}{E} \int_0^a \int_0^a ((1+\nu)\sigma_{ij}^{(k+1)} - \nu\sigma_{kk}^{(k+1)}\delta_{ij}) \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} dx dy - \frac{1}{E} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} ((1+\nu)\sigma_{ij}^{(k)} - \nu\sigma_{kk}^{(k)}\delta_{ij}) \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} dx dy - \\ - \int_{S_u} (t_x(\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_x + t_y(\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_y) dS_u. \end{aligned} \quad (47)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где  $k$  — номер итерации,  $x^2 + y^2 = R_0^2$  — уравнение контура  $S_u$ ;  $U_x = U_y = 0$  — граничные условия на контуре.

Для построения на каждой итерации дискретного аналога вариационного уравнения (47) будем использовать метод конечных элементов в напряжениях. Выберем прямоугольный конечный элемент с узлами, расположенными в углах [21]. С практической точки зрения для построения статически допустимых полей напряжений удобно прибегнуть к функции напряжений Эри  $\phi$ . В качестве неизвестных в узле элемента были взяты значения самой функции Эри, ее первых производных и смешанной производной. Особенности численной реализации при выбранных искомыми величинах выходят за рамки данной статьи.

Для оценки сходимости итерационной процедуры метода геометрического погружения обращались к точному решению задачи [24]. Кроме того, исходная задача была решена в перемещениях методом конечных элементов, имеющимся в программном комплексе ANSYS, на основе конечного элемента PLANE 42. Результаты для сравнения представлены на рисунке 3.

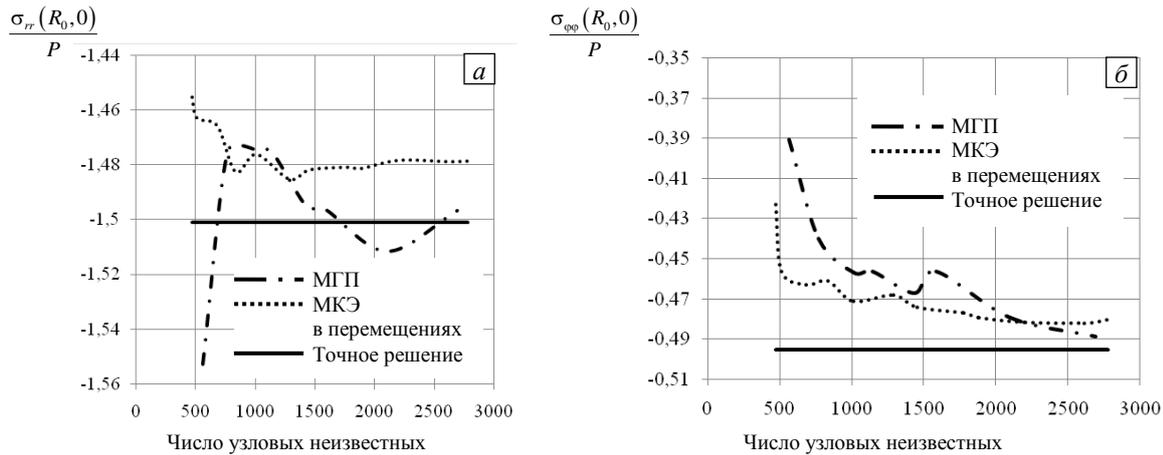


Рис. 3. Напряжения в характерной точке (x = R\_0, y = 0) области в зависимости от числа узловых неизвестных

Влияние степени дискретизации на сходимость проверялось посредством серии расчетов на различных сетках, преимущественно сгущенных вблизи поверхности выреза. При числе степеней свободы около 1300 погрешность решения методом МГП составляет не более 2% относительно точного решения. На рисунке 4 приведены графики распределения напряжений на границе S\_u^2 кругового контура при числе узловых неизвестных, равном 1300.

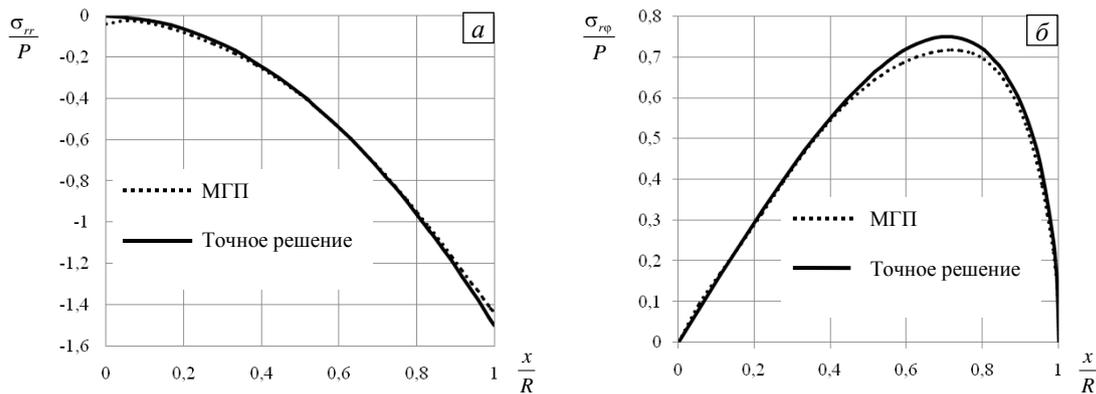


Рис. 4. Распределение напряжений на границе S\_u^2 кругового контура

Особенность метода геометрического погружения состоит также в том, что числом итераций можно контролировать точность получаемого решения при фиксированном числе узловых неизвестных. Условие остановки итерационной процедуры выбиралось в виде:  $\frac{\|\{\varphi^{(k+1)}\} - \{\varphi^{(k)}\}\|}{\|\{\varphi^{(k)}\}\|} \leq \alpha$ , где нормой вектора узловых неизвестных  $\{\varphi\}$  служила норма Чебышева. В таблицах 1 и 2 представлены напряжения, вычисленные в характерных точках на границе кругового контура S\_u^2 в зависимости от значения параметра  $\alpha$ . Результаты свидетельствуют, что с ростом числа итераций значения напряжений приближаются к точным, демонстрируя тем самым сходимость итерационной процедуры метода геометрического погружения.

Таблица 1. Радиальное напряжение в характерных точках на границе кругового контура S\_u^2

x/R_0	Число итераций	$\sigma_{rr}$						
		0	0,277777	0,5	0,590741	0,719125	0,833333	1
Точное решение	-	-0,00282	-0,11841	-0,37735	-0,52562	-0,77756	-1,04317	-1,50094
МГП при $\alpha = 0,001$	5	-0,04462	-0,09931	-0,37528	-0,51832	-0,75454	-1,02458	-1,43414
МГП при $\alpha = 0,0001$	22	-0,03633	-0,11231	-0,38106	-0,52479	-0,77139	-1,0272	-1,44207
МГП при $\alpha = 0,00001$	104	-0,03299	-0,11876	-0,37867	-0,5253	-0,77855	-1,02728	-1,44859

Таблица 2. Касательное напряжение в характерных точках на границе кругового контура  $S_0^2$ 

$x/R_0$	Число итераций	$\sigma_{\tau\theta}$						
		0	0,277777	0,5	0,590741	0,719125	0,83333	1
Точное решение	-	0	7,995354	12,97416	14,28152	14,97247	13,80209	0
МГП при $\alpha = 0,001$	5	$3,0375 \cdot 10^{-5}$	7,476544	11,95058	13,44356	14,22685	12,99375	$1,86836 \cdot 10^{-4}$
МГП при $\alpha = 0,0001$	22	$2,93192 \cdot 10^{-5}$	7,884606	12,64853	13,70151	14,34868	13,40614	$1,87409 \cdot 10^{-4}$
МГП при $\alpha = 0,00001$	104	$2,90526 \cdot 10^{-5}$	7,978602	12,69414	13,73825	14,46545	13,51047	$1,87293 \cdot 10^{-4}$

## 10. Выводы

Предложено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях. Описана процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области. Получен вид дифференциальной формулировки задачи на канонической области, соответствующей вариационному уравнению метода геометрического погружения, построенного на основе принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно). Установлены возможные типы граничных условий на новой части границы канонической области. Приведен процесс построения итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости в терминах элементов введенных пространств тензоров напряжений.

Рассмотрена плоская модельная задача, демонстрирующая эффективное применение МГП с конечно-элементной реализацией, сформулированной с использованием функции напряжений Эри; выполнен сравнительный анализ скорости и качества практической сходимости решения по представленной здесь схеме и решения, полученного с помощью традиционного МКЭ в перемещениях.

Метод геометрического погружения в предложенном виде может быть рекомендован как основа для численного исследования напряженного состояния упругих тел сложной формы, в том числе несжимаемых и слабосжимаемых, а также для получения вариационных оценок точного решения задач теории упругости при совместном с лагранжевой формулировкой использовании [15].

Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (Постановление № 220 от 9 апреля 2010 г.), договор № 14.В25.310006 от 24 июня 2013 года.

## Литература

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 343 с.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Vol. 1: The basis. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 708 p.
5. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1024 с.
6. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. – Ереван: Изд-во АН Армянской ССР, 1979. – 335 с.
7. Шешенин С.В., Кузь И.С. Применение вариационно-разностного метода к осесимметричным задачам теории упругости // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – С. 39-44.
8. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
9. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
10. Girija Vallabhan C.V., Muluneh Azene. A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1982. – Vol. 18, no. 2. – P. 291-309. DOI
11. Sarigul N., Gallagher R.H. Assumed stress function finite element method: Two-dimensional elasticity // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1989. – Vol. 28, no. 7. – P. 1577-1598. DOI
12. Тюкалов Ю.Я. Решение задач строительной механики методом конечных элементов в напряжениях на основе функционала дополнительной энергии и принципа возможных перемещений / Дисс... докт. техн. наук: 05.23.17. – Киров, ВятГУ, 2006. – 314 с.
13. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
14. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – Т. 4, № 2. – Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР. – С. 109-115.
15. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. – Екатеринбург: Уро РАН, 1999. – 298 с.
16. Шардаков И.Н. Теоретические положения метода геометрического погружения для краевых задач упругопластического тела // Общие задачи и методы исследования пластичности и вязкоупругости материалов и конструкций. – Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1986. – С. 123-127.
17. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 44-56. DOI

18. Павлов С.М., Светашков А.А. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // Известия ВУЗов. Физика. – 1993. – Т. 36, № 4. – С. 129-137.
19. Светашков А.А. Прикладные задачи механики вязкоупругих материалов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 205 с.
20. Матвеев В.П., Осипанов А.А. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения применительно к плоской задаче теории упругости в напряжениях // Модели и методы исследования упругого и неупругого поведения материалов и конструкций. – Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1987. – С. 11-16.
21. Труфанов Н.А., Кузнецова Ю.С. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно для плоской задачи теории упругости // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – № 1. – С. 221-234.
22. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
23. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1947. – 440 с.
24. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука 1966. – 708 с.

## References

1. Lurie A.I. *Theory of elasticity*. Berlin: Springer, 2005. 1050 p.
2. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p.
3. Pobedrya B.E. *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1981. 343 p.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Vol. 1: The basis*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 708 p.
5. Bate K.Yu. *Metody konechnykh elementov* [Finite element methods]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 1024 p.
6. Oganessian L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravnenij* [Variational-difference methods of solution of elliptical equations]. Erevan: Izd. Akad. Nauk ArmSSR, 1979. 335 p.
7. Sheshenin S.V., KuzI.S. Primenenie variatsionno-raznostnogo metoda k osesimmetrichnym zadacham teorii uprugosti [Application of the variational-difference method to axisymmetric problems of elasticity]. *Uprugost i neuprugost – Elasticity and inelasticity*, 1987, pp. 39-44.
8. Berdichevskii V.L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoj sredy* [Variational principles of continuum mechanics]. Moscow: Nauka, 1983. 448 p.
9. Gallager R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [Finite element method. Fundamentals]. Moscow: Mir, 1984. 428 p.
10. Girija Vallabhan C.V., Mulneh Azene. A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 291-309. DOI
11. Sarigul N., Gallagher R.H. Assumed stress function finite element method: Two-dimensional elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1989, vol. 28, no. 7, pp. 1577-1598. DOI
12. Tyukalov Yu.Ya. *Reshenie zadach stroitelnoj mekhaniki metodom konechnykh elementov v napryazheniyakh na osnove funktsionala dopolnitelnoj energii i printsipa vozmozhnykh peremeshchenij* [Solution of problems in structural mechanics by finite element method in terms of stresses on the basis of a complementary energy functional and a principle of virtual displacements]. Dissertation, Kirov, Vyatka State University, 2006. 314 p.
13. Marchuk G.I. *Metody vychislitelnoj matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow: Nauka, 1980. 536 p.
14. Konovalov A.N. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoj sredy – Numerical Methods of Continuum Mechanics*, 1973, vol. 4, no. 2. Novosibirsk: Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB AS of the USSR. Pp. 109-115.
15. Shardakov I.N., Trufanov N.A., Matveenko V.P. *Metod geometricheskogo pogruzheniya v teorii uprugosti* [Method of geometrical immersion in the theory of elasticity]. Ekaterinburg: UB RAS, 1999. 298 p.
16. Shardakov I.N. *General problems and methods of investigation of plasticity and viscoelasticity of materials and structures*. Sverdlovsk: Urals Scientific Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1986. Pp. 123-127.
17. Kulikov R.G., Trufanov N.A. Iterative method for solving quasistatic nonlinear viscoelastic problems. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 3, pp. 44-56. DOI
18. Pavlov S.M., Svetashkov A.A. *Iteratsionnyj metod resheniya zadach lineinoj vyzkoupругosti* [Iterative method for solving linear viscoelasticity problems]. *Izvestiya Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*, 1993, vol. 36, no. 4, pp. 129-137.
19. Svetashkov A.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki vyzkoupругikh materialov* [Applied problems of mechanics of viscoelastic materials]. Tomsk Polytechnic University, 2012. 205 p.
20. Matveenko V.P., Osipanov A.A. *Models and methods of investigation of elastic and inelastic behavior of materials and structures*. Sverdlovsk: Urals Scientific Centre of the Academy of Sciences of the USSR, 1987, pp. 11-16.
21. Trufanov N.A., Kuznetsova Yu.S. Finite element realization of geometrical immersion method on the basis of Kastilyano's variation principle for two-dimensional problem theory elasticity. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 1, pp. 221-234.
22. Syarle F. *Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach* [The finite element method for elliptic problems]. Moscow: Mir, 1980. 512 p.
23. Soboлев S.L. *Urvneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Gostekhizdat, 1947. 440 p.
24. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1966. 708 p.

Поступила в редакцию 24.06.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014

### Сведения об авторах:

Деревянкина Полина Олеговна, студ., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский проспект, д. 29; e-mail: Derevyankina@pstu.ru

Кузнецова Юлия Сергеевна, асп., ПНИПУ; e-mail: Suhodolchik@mail.ru

Труфанов Николай Александрович, дтн., проф., зав.каф., ПНИПУ; e-mail: nat@pstu.ru

Шардаков Игорь Николаевич, дфмн., проф., зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: shardakov@icmm.ru