

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.3.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.29)  
УДК 539.3:534.1

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ

Г.В. Филиппенко

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация*

В данной работе предметом обсуждения являются неосесимметричные совместные колебания идеальной акустической жидкости и тонкой поллой бесконечной цилиндрической оболочки типа Кирхгофа, в том числе колебаний оболочки как целого. Этому важному типу колебаний отвечает первая форма. Рассматриваются также и последующие формы, которые сопровождаются деформацией сечения оболочки. Задача решается в строгой математической постановке. Анализируется точное аналитическое решение. Источником вибрационного и акустического полей в системе оболочка–жидкость служит волна, бегущая по оболочке из бесконечности. Анализируются низко- и высокочастотные асимптоты дисперсионных кривых. Находятся распространяющиеся волны и потоки энергии в системе. Разбирается случай отрицательной групповой скорости (при положительной фазовой скорости), а также знак компонент потока энергии. Прослеживается поведение потока энергии и его компонент в окрестности точек квазипересечения дисперсионных кривых, при этом берется несколько типов точек квазипересечения и асимптотически исследуются их координаты. Изучается влияние скоростей в оболочке и в жидкости на поведение системы. Проводится сравнение различных форм колебаний с точки зрения потоков энергии.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка, поверхностная волна, колебания оболочек, локальные и интегральные потоки энергии

## ENERGY ASPECTS OF WAVES PROPAGATION IN THE INFINITE CYLINDRICAL SHELL FULLY SUBMERGED INTO THE LIQUID

G.V. Filippenko

*Institute of Mechanical Engineering RAS, St.-Petersburg, Russian Federation*

The joint non-axisymmetric vibrations of an ideal acoustic liquid and an infinite thin empty cylindrical shell of Kirchhoff type are investigated. The first mode corresponds to this important type of vibrations. Vibrational modes associated with deformation of the cross-section of the shell are also considered. The problem of free vibrations of the shell submerged into the liquid space is studied in the rigorous mathematical statement. The exact analytical solution of this problem is analyzed. The source of vibration and acoustic fields in the system shell-liquid is the wave propagating through the shell from infinity. The high and low frequency asymptotics of the dispersion curves are analyzed. The propagating waves and energy flux in the system shell-liquid are determined. The case of negative group velocity (at positive phase velocity) of the waves and the sign of the energy flux components in the shell are discussed. The energy flux and its component are considered in the vicinity of quasitraverse points of dispersive curves. Different types of these points and their coordinates are asymptotically studied. The influence of relative velocities of the waves in the shell and fluid on the behavior of the entire system is explored. Comparison of various vibration modes is performed from the viewpoint of energy fluxes.

*Key words:* cylindrical shell, surface wave, shell vibrations, local and integral energy fluxes

### 1. Введение

Цилиндрические оболочки, погруженные в жидкость, давно исследуются в связи с богатыми приложениями в технике и строительстве. Они один из важнейших элементов при моделировании акустических волноводов, различных трубопроводов, опор морских буровых установок и других гидротехнических сооружений. Жидкость вносит существенные изменения в поведение оболочки, поэтому большое внимание уделяется анализу взаимодействия элементов в системе оболочка–жидкость [1–13]. В предыдущей статье [1] рассматривались осесимметричные колебания бесконечной цилиндрической оболочки, полностью погруженной в жидкость. В данной работе метод исследования обобщается на случай неосесимметричных колебаний. Описываются волны как распространяющиеся по оболочке, так и волны в жидкости, локализованные вблизи поверхности оболочки (так называемые поверхностные волны). При неосесимметричных колебаниях вращательные движения оболочки связываются с продольными и изгибными колебаниями. Это приводит к значительному усложнению взаимодействия между дисперсионными ветками. Анализ возникающих эффектов ведется как в терминах смещений оболочки, так и в терминах потоков энергии.

### 2. Постановка задачи

Как и в работе [1], процесс совместных свободных колебаний пустой бесконечно протяженной цилиндрической оболочки и окружающей её жидкости будем считать стационарным. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , где ось  $z$  совпадает с осью цилиндра, и локальную систему координат  $(t, \mathbf{n}, \mathbf{k})$ , где  $t, \mathbf{n}$  — единичные векторы, соответственно, касательный и нормальный

к оболочке, а  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . В качестве переменных, описывающих акустическое и вибрационное поля в системе, выберем акустическое давление  $P$  в окружающей оболочку жидкости и вектор смещений оболочки  $\mathbf{u} = (u_r, u_z, u_n)^T$  ( $T$  — знак операции транспонирования). Жидкость предполагается идеальной и сжимаемой, а давление  $P$  в ней подчиняется уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)P(r, \varphi, z) = 0, \quad R < r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $k = \omega/c$  — волновое число ( $c$  — скорость распространения звука в жидкости;  $\omega$  — частота гармонических колебаний);  $R$  — радиус цилиндрической оболочки. Зависимость всех процессов от времени предполагаем гармонической, а временной фактор  $\exp\{-i\omega t\}$  условимся всюду опускать.

На границе оболочка – жидкость имеют место безотрывность движения жидкости и оболочки

$$u_n(\varphi, z) = \frac{1}{\rho_w \omega^2} \frac{\partial P(r, \varphi, z)}{\partial r} \Big|_{r=R+0}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

и баланс сил, действующих на оболочку

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \frac{R^2}{\rho c_s^2} (0, 0, P|_{r=R+0})^T; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (1)$$

где  $\mathbf{L}$  — линейный матричный дифференциальный оператор.

Введем следующие обозначения:  $\rho_w$  — плотность жидкости;  $h$  — толщина оболочки;  $c_s = \sqrt{Eh/((1-\nu^2)\rho)}$  — скорость распространения волн деформации срединной поверхности оболочки;  $E$ ,  $\nu$  и  $\rho_s$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и объемная плотность материала оболочки;  $\rho = \rho_s h$  — поверхностная плотность оболочки. Дополнительно установим безразмерные параметры: толщину цилиндрической оболочки  $h^* = h/R$ ; скорость распространения волн в оболочке  $c^* = c_s/c$ ; частоту  $w = k_c R = \omega R/c_s$ ; параметр, характеризующий относительную толщину оболочки  $\alpha^2 = (1/12)(h/R)^2$ . В этих терминах оператор  $\mathbf{L}$  из [14, 15], фигурирующий в (1), можно записать в виде

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} w^2 + \alpha_1 [v_- \tilde{\partial}_z^2 + \partial_\varphi^2] & v_+ \partial_\varphi \tilde{\partial}_z & \partial_\varphi (1 + 2\alpha^2 [1 - \partial_\varphi^2 - \tilde{\partial}_z^2]) \\ L_{21} & w^2 + \tilde{\partial}_z^2 + v_- \partial_\varphi^2 & v \tilde{\partial}_z \\ L_{31} & L_{32} & w^2 + \alpha^2 (2\partial_\varphi^2 - 1 + 2v \tilde{\partial}_z^2 - [\partial_\varphi^2 + \tilde{\partial}_z^2]^2) - 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\alpha_1 = 1 + 4\alpha^2$ ,  $\tilde{\partial}_z = R\partial_z$ ,  $L_{21} = L_{12}$ ,  $L_{31} = -L_{13}$ ,  $L_{32} = -L_{23}$ ,  $v_+ = (1+\nu)/2$ ,  $v_- = (1-\nu)/2$ .

### 3. Получение представления для акустического и вибрационного полей

Вибрационные и акустические поля в системе полностью описываются парой  $\{\mathbf{u}, P\}$ , при этом точное выражение для смещений оболочки можно получить только при точном же определении и акустического поля в окружающей его среде. Таким образом, приходим к граничной задаче для уравнения Гельмгольца относительно акустического давления в жидкости [16].

Учтем, что в соответствии с уравнением неразрывности нормальные смещения оболочки  $u_n$  выражаются через давление  $P$ . Поэтому независимыми являются только переменные  $u_r$ ,  $u_z$  и  $P$ . Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{0}, \quad \text{где } \mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{M} - \mathbf{N}; \quad \mathbf{N} = \frac{w^2}{\rho \omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_w \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R+0} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_z \\ P \end{pmatrix} = A e^{i\lambda z} \begin{pmatrix} \zeta \sin m\varphi \\ \xi \cos m\varphi \\ \gamma H_m^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \cos m\varphi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

полагая  $|\zeta|^2 + |\xi|^2 + |\gamma|^2 = 1$ , а  $m = 1, 2, 3, \dots$  (заметим, что случаю  $m = 1$  отвечают колебания оболочки как целого). Здесь:  $H_m^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода с индексом  $m$ ;  $A$ ,  $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $\gamma$  — произвольные константы;  $\lambda$  — искомое волновое число. Подставляя (4) в (3), получаем однородную алгебраическую систему вида

$$\hat{\mathbf{S}}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

где вектор  $\mathbf{x} \equiv (\zeta, \xi, \gamma)^T$ , а матрица  $\hat{\mathbf{S}}$  есть образ Фурье оператора  $\mathbf{S}$ . Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к дисперсионному уравнению  $\det \hat{\mathbf{S}} = 0$ . Поскольку в статье рассматривается свободный стационарный режим распространения волн в жидкости и оболочке, то далее для заданной частоты  $\omega$  находятся только вещественные положительные корни  $\lambda$  этого уравнения. Они удовлетворяют неравенству  $\lambda > k$ . После подстановки такого корня в систему (5) получаем собственный вектор  $\mathbf{x}$  и, следовательно, вид акустического и вибрационного полей в системе. Далее можно определить потоки энергии в системе оболочка – жидкость.

Воспользуемся выражением для вектора интегрального потока энергии в жидкости. При вещественном  $\lambda$  этот вектор имеет единственную ненулевую компоненту, направленную вдоль оси  $z$  и вычисляемую по формуле

$$Y_{liq} = \frac{\omega}{2} \frac{1}{\rho_w \omega^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{+\infty} \text{Im} \left( \overline{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) r dr.$$

В оболочке локальный вектор потока энергии представим выражением из [12]. Рассмотрим также интегральный поток — поток через сечение цилиндрической оболочки плоскостью, перпендикулярной образующей [15]. Его единственная ненулевая компонента (именно ее для краткости изложения будем называть далее потоком энергии в оболочке) имеет вид

$$Y_{cyl} = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \text{Im} (\mathbf{F} \mathbf{u}^4, \mathbf{u}^4)_{\mathbb{C}^4} R d\varphi, \quad (6)$$

где  $\mathbf{u}^4 = (u_t, u_z, u_n, -\tilde{\partial}_z u_n)^T$ ,  $\mathbf{F} = \frac{\rho c^2}{R} \begin{pmatrix} -v \alpha_1 \tilde{\partial}_z & -v \partial_\varphi & 0 & -2\alpha^2 (1-v) \partial_\varphi \\ -v \partial_\varphi & -\tilde{\partial}_z & -v & 0 \\ -2\alpha^2 \partial_\varphi \tilde{\partial}_z & 0 & 0 & -\alpha^2 [(2-v) \partial_\varphi^2 - v + \tilde{\partial}_z^2] \\ -2\alpha^2 v \partial_\varphi & 0 & \alpha^2 v (\partial_\varphi^2 - 1) & -\alpha^2 \tilde{\partial}_z \end{pmatrix}$ .

Эту компоненту удобно записать в виде суммы, слагаемым которой соответствуют вклады составляющих потока энергии. Слагаемым с индексами  $j = 1, 2, 3, 4$  отвечают составляющие, порождаемые обобщенными силами [15]: тангенциальной (индекс  $t$ ), продольной (индекс  $z$ ), нормальной (индекс  $n$ ) и связанной с обобщенным моментом (индекс  $p$ ). Преобразуем формулу (6) с учетом сказанного:

$$Y_{cyl} = \Pi_t + \Pi_z + \Pi_n + \Pi_p;$$

$$\begin{cases} \Pi_t \\ \Pi_z \\ \Pi_n \\ \Pi_p \end{cases} = -\pi R \omega \text{Im} \left\{ \begin{array}{l} (-\alpha_1 v \tilde{\partial}_z u_t - v \partial_\varphi u_z + 2\alpha^2 (1-v) \partial_\varphi \tilde{\partial}_z u_n) \overline{u_t} \\ (-v \partial_\varphi u_t - \tilde{\partial}_z u_z - v u_n) \overline{u_z} \\ \overline{u_n} (-2\alpha^2 \partial_\varphi \tilde{\partial}_z u_t + \alpha^2 [(2-v) \partial_\varphi^2 - v + \tilde{\partial}_z^2] \tilde{\partial}_z u_n) \\ (-2\alpha^2 v \partial_\varphi u_t + \alpha^2 v (\partial_\varphi^2 - 1) u_z + \alpha^2 \tilde{\partial}_z^2 u_n) (-\tilde{\partial}_z \overline{u_n}) \end{array} \right\}. \quad (7)$$

При расчете представленных далее графических зависимостей были взяты следующие значения характеристик элементов системы оболочка – жидкость:  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $\nu = 0,28$ ;  $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $h^* = 0,05$  (если это специально не оговаривается). На всех графиках по оси абсцисс отложена безразмерная частота  $w = \omega R/c_s$ . Будут анализироваться зависимости от  $w$  двух типов: 1) для безразмерных волновых чисел  $\tilde{\lambda} = \lambda R$  (в дальнейшем символ « $\sim$ » над  $\lambda$  опускается, то есть  $\lambda := \tilde{\lambda}$ ), при этом дисперсионные кривые, отвечающие веткам  $w_1(\lambda)$ ,  $w_2(\lambda)$ ,  $w_3(\lambda)$  маркируются цифрами 1, 2, 3; 2) для безразмерных потоков энергии  $\Pi$  в оболочке и их компонент (кривые, отвечающие  $t$ ,  $z$ ,  $n$  и  $p$ -компонентам потоков энергии маркируются цифрами 1, 2, 3, 4). В случае, когда в системе присутствует жидкость, то (если не оговаривается другое) обезразмеривание потока энергии (6) будет производиться на суммарный поток в оболочке и жидкости, что даст относительный поток по оболочке  $S = \Upsilon_{cyl} / (\Upsilon_{liq} + \Upsilon_{cyl})$  (соответствующая кривая маркируется буквой  $S$ ). При отсутствии жидкости в системе компоненты потока нормируются на суммарный поток в оболочке.

#### 4. Анализ результатов

Сначала рассмотрим «сухую» оболочку [17]. Тогда давление  $P = 0$ , и уравнение (5) после подстановки в него решения в виде

$$\mathbf{u} = (u_t, u_z, u_n)^T = A e^{i\lambda z} (\zeta \sin m\varphi, \xi \cos m\varphi, \gamma \cos m\varphi)^T \quad (8)$$

становится следующим

$$\hat{\mathbf{L}}(\zeta, \xi, \gamma)^T = \mathbf{0}, \quad (9)$$

где  $\hat{\mathbf{L}}$  — образ оператора  $\mathbf{L}$ . Условие разрешимости этой системы представляет собой полином третьего порядка относительно  $w^2$  с коэффициентами, зависящими от  $\lambda^2$ :  $F(\lambda^2, w^2) \equiv \det \hat{\mathbf{L}} = w^6 + \beta_1 w^4 + \beta_2 w^2 + \beta_3 = 0$ . Фиксируя  $\lambda$ , находим корни полинома и, соответственно, пары чисел  $(w, \lambda)$  [17] (ограничимся рассмотрением вещественных неотрицательных значений  $w$  и  $\lambda$ , что отвечает распространяющимся в положительном направлении оси  $z$  волнам). Коэффициенты этого полинома можно представить в виде:  $\beta_i = \beta_i^0 + O(\lambda^{-2})$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где в коэффициенты  $\beta_i^0$  объединены все слагаемые из  $\beta_i$ , не содержащие  $m$ . Все остальные члены содержат степени  $m$  в качестве множителя и имеют порядок малости  $O(\lambda^{-2})$ . Вследствие этого коэффициенты  $\beta_i^0$  отвечают осесимметричному случаю ( $m = 0$ ). Используя для корней кубического уравнения выражения, записанные через его коэффициенты, найдем  $w(\lambda) = w_0(\lambda) + O(\lambda^{-2})$ , то есть дисперсионные кривые для неосесимметричного случая должны стремиться к дисперсионным кривым для осесимметричного случая при больших  $\lambda$ . Действительно, при фиксированном  $m > 0$  и растущем  $\lambda$  волновое число волны в оболочке ( $\sqrt{\lambda^2 + m^2} = \lambda + O(\lambda^{-1})$ ) в основном обуславливается компонентой  $\lambda$  и приближается к волновому числу в случае  $m = 0$ . Это и наблюдается на рисунке 1а, где к дисперсионным кривым 1а, 2а, 3а, соответствующим  $m = 0$ , стремятся дисперсионные кривые 1b, 2b, 3b, отвечающие  $m = 1$  (кривые 4 и 5 будут рассмотрены позже). Таким образом, задача сводится к нахождению асимптотики для осесимметричного случая, для которого она имеет более простой вид [1], и в итоге получаем для каждой дисперсионной ветки коротковолновую асимптотику, справедливую для всех  $m$ :

$$w_1(\lambda) = \alpha \lambda^2 (1 + O(\lambda^{-2})); \quad w_2(\lambda) = \lambda \sqrt{(1 + 4\alpha^2)(1 - \nu)} / 2; \quad w_3(\lambda) = \lambda (1 + O(\lambda^{-4})). \quad (10a)$$

Обозначим координаты точки пересечения асимптотик  $w_i(\lambda)$  и  $w_j(\lambda)$  как  $(\lambda_{i,j}, w_{i,j})$ , их будет не более двух:  $(\lambda_{1,2}, w_{1,2}) = (\sqrt{v_-}/\alpha, v_- \sqrt{4 + \alpha^{-2}})$  и  $(\lambda_{1,3}, w_{1,3}) = (1/\alpha, 1/\alpha)$ . Заметим, что грубая оценка границы применимости оболочки типа Кирхгофа определяется неравенствами  $m, \lambda < 2\pi R/h = 2\pi / (\alpha \sqrt{12}) \approx 125$  (длина волны больше толщины оболочки). Рассматриваемый в статье диапазон волновых чисел и номеров мод не нарушает эти условия. Например, отношение длины волны (которой соответствует безразмерное волновое число  $1/\alpha$ ) к толщине оболочки  $h$  равно  $\pi/\sqrt{3}$ .

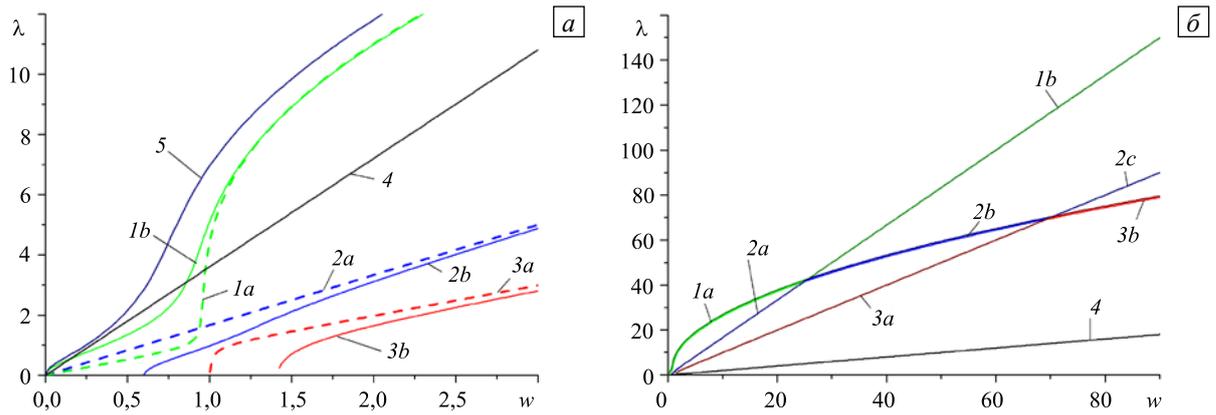


Рис. 1. Дисперсионные кривые для случая осесимметричных ( $m = 0$ , помечены литерой «а») и неосесимметричных ( $m = 1$ , помечены литерой «б») колебаний: начальные участки в увеличенном масштабе (а); общий вид (б)

Теперь исследуем длинноволновые асимптотики, то есть поведение корней дисперсионного уравнения при малых  $\lambda$ . Для этого функцию  $w(\lambda)$  в окрестности точек зарождения  $\lambda = 0$ ,  $w = w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) разложим в ряд Тейлора по малому параметру  $\lambda$ . Следует подчеркнуть, что случай  $m = 0$  отличается от всех других тем, что в первом приближении зависимость линейна, и если пренебречь членами порядка  $\alpha^2$  по сравнению с единицей, получится приближенная формула:  $w_1(\lambda) = \sqrt{1 - v^2} \lambda (1 + O(\lambda^2))$ . Отсюда видно, что фазовая скорость  $w/\lambda = \sqrt{1 - v^2}$  зародившейся волны асимптотически равняется ее групповой скорости  $dw/d\lambda$ , дисперсия отсутствует. При  $m = 1$  аналогичные выкладки приводят к выражению  $w_1(\lambda) = \sqrt{(1 - v^2)/2} \lambda^2 + o(\lambda^2)$ , во всех остальных случаях  $w_i(\lambda) = w_i \left( 1 + \frac{B_i}{2w_i^2} \lambda^2 + O(\lambda^4) \right)$ , где  $B_1 = \alpha^2 \frac{2m^6 - m^4(3 + 4v) + 4m^2v + 1}{(1 + m^2)^2}$ ,  $B_2 = \frac{(1 - v)(m^2(1 + v) + 4v + 6)}{2(m^2(1 + v) + 2)}$ ,  $B_3 = \frac{m^2(1 + v) + 2v^2}{m^2(1 + v) + 2}$ . Здесь константы  $B_i$  выведены при условии пренебрежения членами порядка  $\alpha^2$  по сравнению с единицей. Отметим, что только при  $m = 0$  и  $m = 1$  частота зарождения первой ветки  $w_1$  равна нулю, а во всех остальных случаях

$$w_1 = \frac{m(m^2 - 1)}{\sqrt{m^2 + 1}} (\alpha + O(\alpha^3)), \quad w_2 = m\sqrt{v_-}, \quad w_3 = \sqrt{1 + m^2} \left( 1 + \frac{(1 + 3m^2)^2}{(1 + m^2)^2} \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \right). \quad (106)$$

Для частот  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), отвечающих частотам зарождения соответствующих дисперсионных кривых, будем также употреблять термин: «частота отсечки» такой-то дисперсионной кривой. Из вида асимптотик в окрестности точек  $(w, \lambda) = (w_i, 0)$  следует, что  $w'(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$  (если  $m > 0$ ), то есть групповая скорость и поток энергии равняются нулю, в то время как значение фазовой скорости равно бесконечности. Исходя из выражения для асимптотик волновых чисел можно получить и асимптотику потока энергии (6), например, для второй дисперсионной кривой  $\Pi(w) = O(\sqrt{w - w_2})$ .

Заметим, что при  $\lambda = 0$  система (9) распадается на две независимых подсистемы. Первая из них состоит фактически из одного уравнения:  $(w^2 - v_- m^2)u_z = 0$ , и ее единственное решение, отвечающее  $w_2 = m\sqrt{v_-}$ , имеет вид чисто продольных колебаний  $(u_r, u_z, u_n)^T = A e^{ikz}|_{\lambda=0} (0, \xi \cos m\varphi, 0)^T$ . Во второй подсистеме компоненты вектора смещений  $u_r$  и  $u_n$  уже являются «перевязанными», и из анализа только вектора смещения не удастся определить тип колебаний в окрестности точек зарождения  $w_1$  и  $w_3$ . В дальнейшем будет показано, что анализ компонент потока энергии позволяет дать ответ на этот вопрос не только в малой окрестности  $\lambda = 0$ , но и на всем протяжении дисперсионной кривой.

Дисперсионное уравнение, отвечающее системе (9), исследовалось в [18] при других значениях параметров. Здесь проводится более подробный его анализ с целью сравнения со случаем, когда присутствуют и оболочка, и жидкость.

При учете влияния жидкости определяющую роль играет величина параметра  $c^* = c_s/c$ . В случае  $c^* \leq c_1 = 1$  («медленная» оболочка) практически вся волновая энергия передается не по воде, а по оболочке, и влияние жидкости можно рассматривать как слабое возмущение исходной «сухой» оболочки. Реализуются, с небольшими искажениями, все три дисперсионные кривые «сухой» оболочки. Характер перестройки дисперсионных веток и компонент потоков энергии остается таким же, поэтому для иллюстрации отдельных эффектов в «сухой» оболочке и в оболочке, помещенной в жидкость, при  $c^* < c_1$  ограничимся, ради компактности изложения, приведением графиков только для системы «оболочка – жидкость» при  $c^* = 0,2$ . Соответствующая этому параметру зависимость  $\lambda = wc^*$  (прямая 4 на рисунках 1 и 3б) устанавливает связь волнового числа и частоты акустических волн в безграничной жидкости, распространяющихся без дисперсии.

Как уже было отмечено, все дисперсионные ветки отвечают колебаниям, «перевязанным» между собой. Поэтому вместо видимого (в масштабе рисунка 1б) пересечения дисперсионных кривых (начинающихся как 1а, 2а и 3а и которые в дальнейшем будем называть квазидисперсионными кривыми) наблюдается так называемое квазипересечение этих кривых (дисперсионные кривые резко меняют направление в малой окрестности этой точки, что изображено на рисунке 2а в увеличенном по сравнению с рисунком 1б масштабе на примере первой и второй дисперсионных кривых). В силу этого первая дисперсионная кривая на самом деле состоит из участков 1а, 1б, вторая — из участков 2а, 2б, 2с, третья — из участков 3а, 3б. Этот эффект — результат интенсивного обмена энергией между компонентами вектора смещения оболочки, который приводит к тому, что сблизившиеся дисперсионные ветки «меняются ролями». Аналогичное явление возникает, например, и в пластинах [19]. Также подчеркнем два обстоятельства: во-первых, коротковолновые асимптотики (10) описывают именно квазидисперсионные кривые, а не дисперсионные кривые, и во-вторых, в масштабе рисунка 1б, дисперсионные кривые для различных значений  $m$ , в отличие от рисунка 1а, практически сливаются.

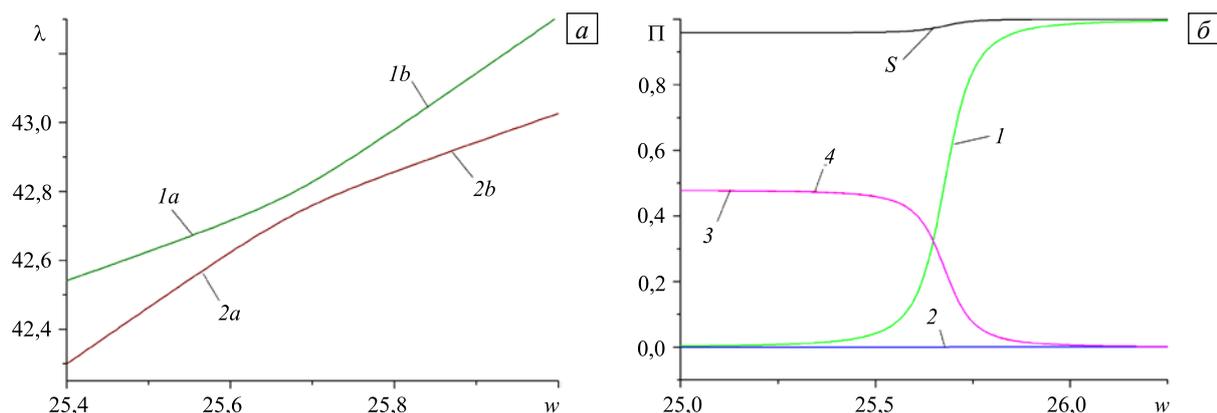


Рис. 2. Точка квазипересечения дисперсионных кривых (а) и компоненты потока энергии волны из первой ветки (б) первой моды колебаний оболочки, помещенной в жидкость, при  $c^* = 0,2$

Обмен энергией между компонентами вектора смещения оболочки и энергетические взаимодействия в системе оболочка – жидкость, удобно описывать в терминах компонент потока энергии. Далее на рисунках 2–6 показаны различные аспекты этого взаимодействия. Рисунок 2б иллюстрирует перестройку компонент потока энергии вблизи точки квазипересечения первой и второй дисперсионных кривых. Первоначальный изгибный характер колебаний первой дисперсионной кривой меняется на крутильный. В системе «оболочка – жидкость» этому эффекту сопутствует уменьшение энергии, излучаемой оболочкой («уступ» на кривой  $S$ ), так как взаимодействие оболочки с жидкостью осуществляется благодаря только нормальным колебаниям оболочки. Соответственно для второй дисперсионной кривой подобная смена происходит в обратном порядке (см. Рис. 4г). Вычисления показывают, что при малых  $m$  компоненты потока энергии  $\Pi_n$  и  $\Pi_p$  практически неразличимы, поэтому на рисунке 4г, для удобства восприятия, кривая 3 отображает их сумму (чтобы не перегружать этот рисунок, кривая  $S$  также не изображена, поскольку в указанном масштабе она практически не отличается от прямой, тождественно равной единице). На этом же рисунке видно, что аналогичные перестройки имеют место и в окрестности других точек квазипересечения.

Взаимодействие дисперсионных кривых при низких частотах вблизи зарождения второй (частота  $w_2$ ) и третьей (частота  $w_3$ ) мод хотя и не сопровождается столь резкой сменой характера самих кривых (нет явно выраженного квазипересечения), но проявляется в резком изменении структуры потока энергии, причем так, как будто это квазипересечение имело место. Так, рисунки 4а, 4б иллюстрируют взаимодействие

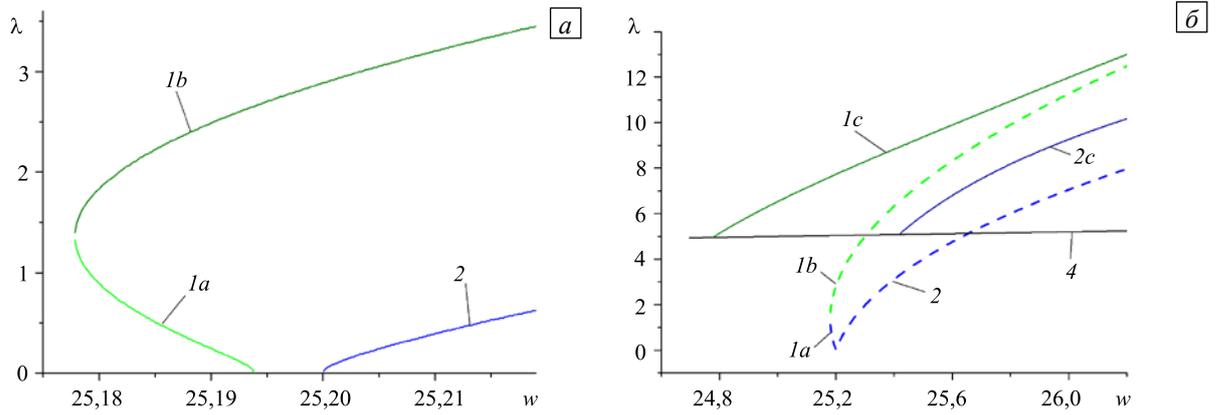


Рис. 3. Дисперсионные кривые: «сухая» оболочка (участку 1а отвечает отрицательная групповая скорость) (а); «сухая» оболочка (кривые 1а, 1б, 2) и оболочка в жидкости,  $w_1 = w_2$ ,  $c^* = 0,2$  (кривые 1с, 2с, 4) (б)

первой и второй дисперсионных кривых в окрестности точки  $w_2$ , а 4б, 4в показывают взаимодействие второй и третьей дисперсионных кривых в окрестности точки  $w_3$  в терминах перестройки соответствующих компонент потоков энергии.

Заметим, что приведенные формулы длинноволновой асимптотики «сухой» оболочки хорошо работают, когда  $m$  невелико. В противном случае последующие члены (неучтенные члены асимптотического разложения) могут стать сопоставимыми с оставленными и приведенные асимптотики уже не будут корректными, а сам вид дисперсионных кривых может существенно измениться. Остановимся на этом эффекте подробнее.

Сначала рассмотрим «сухую» оболочку и будем увеличивать номер моды  $m$ . По мере роста  $m$  частота отсечки  $w_1$  первой дисперсионной кривой достигает частоты отсечки  $w_2$  второй дисперсионной кривой, когда  $m = (\sqrt{v_-}/\alpha)(1 + O(\alpha^2))$  (10б), при этом  $w \equiv w_1 = w_2 = v_-/\alpha$  (например, если  $h/R = 4,9600 \cdot 10^{-2}$ , то частоты становятся равными при  $m = 42$ ,  $w \approx 25,20$ ).

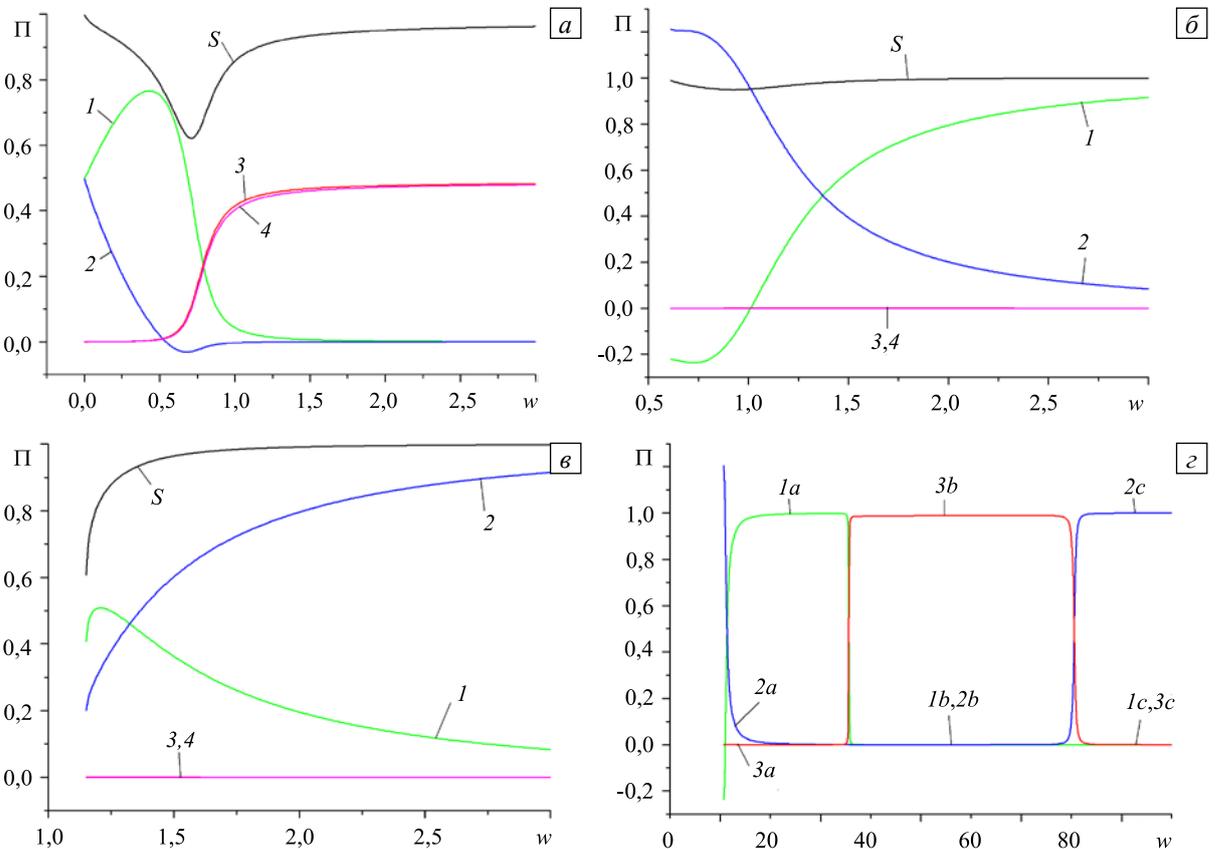
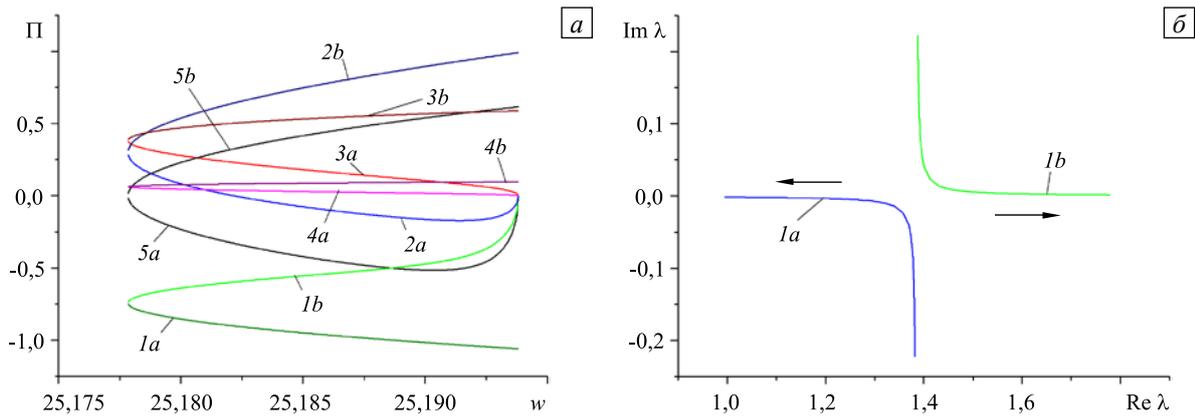


Рис. 4. Начальные участки кривых компонент относительных потоков энергии для волн из различных веток в оболочке, помещенной в жидкость, при  $c^* = 0,2$ : первая (а), вторая (б), третья (в) ветки; общий вид кривых для второй ветки (г)

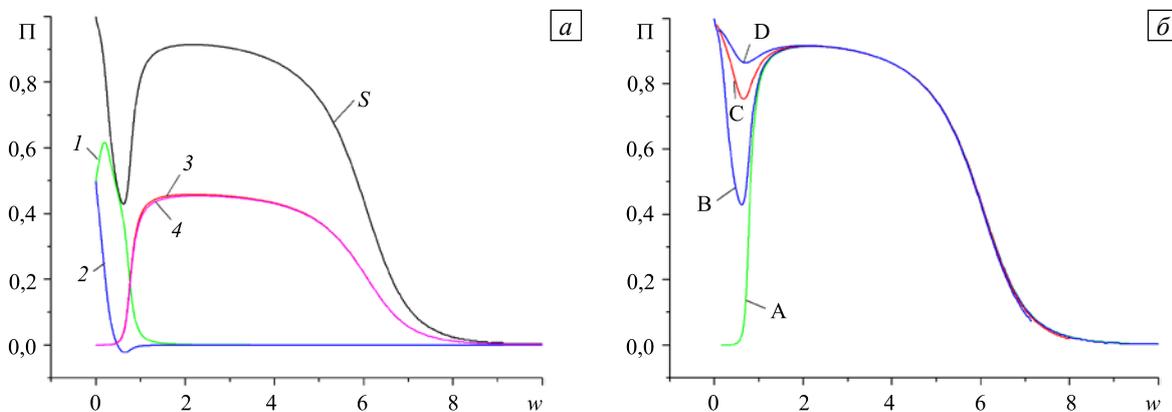


**Рис. 5.** Исследование окрестности точки дисперсионной кривой с отрицательной групповой скоростью ( $w_1 \approx w_2$ ): компоненты потока энергии (а), динамика корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости с ростом частоты колебаний оболочки (б)

Обратимся к случаю достаточно близких  $w_1$  и  $w_2$ . Теперь дисперсионная кривая  $w_1(\lambda)$  приобретает начальный участок с отрицательной групповой скоростью [20–23] (как кривая  $1a$  на рисунке 3а при  $m = 42$ ,  $h/R = 4,9588 \cdot 10^{-2}$ , фазовая скорость при этом положительна). На этом участке частот интегральный поток энергии по «сухой» оболочке также становится отрицательным (кривая  $5a$ , Рис. 4а). На рисунке 5а, в отличие от всех остальных, проведено обезразмеривание потока энергии (б) на величину  $\omega r^2 R^2 / 2$  той же размерности, что и у потока энергии (номера участков кривых, согласующихся с компонентами потока энергии, маркируются индексами «а», если они относятся к участку дисперсионной кривой с отрицательной групповой скоростью).

Заметим, что дисперсионная кривая  $1$  (Рис. 3а) состоит из участков  $1a$  и  $1b$ , относящихся к различным дисперсионным кривым. Это станет видно, если в модуль упругости внести мнимую добавку  $E := E(1 - i \cdot 10^{-6})$ , что обычно используется для моделирования потерь энергии в материале. В этом случае на комплексной плоскости  $\lambda$  траектории соответствующих корней дисперсионного уравнения формируются двумя различными кривыми при изменении  $w$  (см. кривые  $1a, 1b$ , Рис. 5б; стрелками обозначено направление изменения корней с ростом  $w$ ), что отвечает двум различным дисперсионным кривым, если это понятие обобщить и на комплексные волновые числа, понимаемые как функции частоты. Подчеркнем, что при  $\text{Im } E = 0$  (отсутствуют потери в материале) траектории корней на комплексной плоскости образуют уже крестообразное пересечение, при этом кривым  $1a, 1b$  на рисунке 3а отвечают горизонтальные участки кривых  $1a, 1b$  на рисунке 5б (так как корни дисперсионного уравнения чисто вещественны для диапазона частот, связанного с этими горизонтальными участками).

Однако при наличии жидкости в системе эффект отрицательной групповой скорости пропадает, интегральный поток становится положительным (см. кривые  $1c, 2c$  на рисунке 3б). Отметим, что отрицательные значения отдельных компонент потока энергии (при положительном интегральном потоке) наблюдаются у всех рассмотренных мод (включая  $m = 0$  [1]) и присутствуют как в случае «сухой» оболочки, так и в случае оболочки в жидкости (на рисунках 4а, 4б, 6а, соответственно, кривые 2, 1, 2



**Рис. 6.** Моды колебаний стальной оболочки в воде ( $c^* = 3,6$ ): первая (а);  $m = 0, 1, 2, 3$  (соответственно кривые А, В, С, D)

имеют участки с отрицательными ординатами). Для оболочки в жидкости, в отличие от «сухой» оболочки, вычисления показывают, что групповые скорости и потоки энергии в точках зарождения дисперсионных кривых уже ненулевые (как и на рисунке 3б). Сами дисперсионные кривые при этом лежат выше прямой  $\lambda = wc^*$ .

Рассмотрим другие диапазоны скоростей. Если  $1 < c^* \leq c_2 \equiv \sqrt{(1+4\alpha^2)(1-\nu)}/2$ , то реализуются две дисперсионные кривые, а при условии  $c^* > c_2$  (например, когда систему образуют стальная оболочка и вода,  $c^* = 3,6$ ) имеет место только одна дисперсионная кривая (кривая 5 на рисунке 1а). При этом относительный поток энергии в оболочке резко убывает с ростом частоты (Рис. 6а). Более подробно остановимся на этом последнем, важном для приложений случае.

На низких частотах для  $m=1$  поток энергии по оболочке уменьшается (характерный «провал» на кривой  $S$ , Рис. 4а). Это связано с относительно небольшой фазовой скоростью волн из первой дисперсионной кривой в оболочке на этих частотах (кривая  $1b$  на рисунке 1), оболочка относительно «мягкая». Аналогичный эффект наблюдается и для  $m=0$  [1]. Однако с ростом номера моды  $m=0,1,2,3$  (соответственно кривые А, В, С, D на рисунке 6б) относительный поток энергии по оболочке в диапазоне нижних частот растет, что объясняется уменьшением фазовой скорости волн тех колебаний оболочки, которым отвечает первая дисперсионная кривая (при увеличении  $m$  в этом диапазоне частот).

## 5. Заключение

Анализ приведенных графиков показывает, что:

1) По поведению кривых компонент потока энергии вполне можно судить о характере колебаний как при зарождении дисперсионных кривых, так и на всем их протяжении, поскольку потоки энергии учитывают не только амплитуды смещений и сил, но и сдвиг фазы между ними.

2) Возможно сравнение долей потока энергии, переносимых различными ее компонентами по оболочке, а также определение величин потоков энергии, распределяющихся между оболочкой и жидкостью.

3) Для системы сталь – вода поток энергии по оболочке существует лишь в ограниченном диапазоне частот (Рис. 6а).

4) В окрестности точек квазипересечения дисперсионных кривых перестройка структуры потока энергии происходит достаточно быстро. Фактически всю квазидисперсионную кривую (за исключением начального участка, где перестройка носит более сложный характер) можно считать сохраняющей характер колебаний.

5) Помимо ранее обнаруженных эффектов для осесимметричных колебаний (перестройка компонент потока энергии в окрестности точек квазипересечения дисперсионных кривых и возможность появления отрицательных значений компонент потоков энергии) [1], случай неосесимметричных колебаний добавил новые — возможность появления отрицательного потока энергии и отрицательной групповой скорости волн (при положительной фазовой), а также новые типы точек квазипересечения.

6) Отрицательные выбросы интегрального потока энергии (как на рисунке 5а), а также его компонент (как на рисунках 4а, 4б, 5а, 6а) могут существенно проявиться в неоднородных задачах.

Автор выражает искреннюю признательность профессорам Д.П. Коузову, С.В. Сорокину и П.Е. Товстику за полезное обсуждение и конструктивные замечания.

## Литература

1. Филиппенко Г.В. Энергетические аспекты осесимметричного распространения волн в бесконечной цилиндрической оболочке, полностью погруженной в жидкость // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 187-197. DOI
2. Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N. Green's matrix and the boundary integral equation method for analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading // J. Sound Vib. – 2004. – Vol. 271, no. 3-5. – P. 815-847. DOI
3. Sorokin S.V., Ershova O.A. Plane wave propagation and frequency band gaps in periodic plates and cylindrical shells with and without heavy fluid loading // J. Sound Vib. – 2004. – Vol. 278, no. 3. – P. 501-526. DOI
4. Sorokin S.V. Analysis of vibrations and energy flows in sandwich plates bearing concentrated masses and spring-like inclusions in heavy fluid loading conditions // J. Sound Vib. – 2002. – Vol. 253, no. 2. – P. 485-505. DOI
5. Fuller C.R., Fahy F.J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid // J. Sound Vib. – 1982. – Vol. 81, no. 4. – P. 501-518. DOI
6. Pavić G. Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells // J. Sound Vib. – 1990. – Vol. 142, no. 2. – P. 293-310. DOI
7. Pavić G. Vibroacoustical energy flow through straight pipes // J. Sound Vib. – 1992. – Vol. 154, no. 3. – P. 411-429. DOI
8. Feng L. Acoustic properties of fluid-filled elastic pipes // J. Sound Vib. – 1994. – Vol. 176, no. 3. – P. 399-413. DOI
9. Xu M.B., Zhang W.H. Vibrational power flow input and transmission in a circular cylindrical shell filled with fluid // J. Sound Vib. – 2000. – Vol. 234, no. 3. – P. 387-403. DOI

10. Филиппенко Г.В. Колебания трубопроводов и тонкостенных опор гидротехнических сооружений, погруженных в жидкость // Современное машиностроение. Наука и образование: Материалы 2-й Междунар. науч.-практ. конференции. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 769-778.
11. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 70-78. DOI
12. Filippenko G.V. The forced oscillations of the cylindrical shell partially submerged into a layer of liquid // Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2012", St.-Petersburg, Russia, May 28-June 1, 2012. – P. 70-75. DOI
13. Filippenko G.V. Statement of the boundary-contact problems for the shells in acoustics // Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2010", St.-Petersburg, Russia, June 8-10, 2010. – P. 57-62.
14. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
15. Filippenko G.V. The energy analysis of shell-fluid interaction // Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2011", St.-Petersburg, Russia, May 30-June 3, 2011. – P. 63-66.
16. Filippenko G.V., Kouzov D.P. Boundary-contact problems of acoustics. The review of last results // 7th Int. Symp. "Transport Noise and Vibration", St.-Petersburg, Russia, June 8-10, 2004, CD format, Article no. pl08, 13 p.
17. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
18. Зиновьева Т.В. Дисперсия волн в цилиндрической оболочке // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2007. – № 52-1. – С. 53-58.
19. Manconi E., Sorokin S. On the effect of damping on dispersion curves in plates // Int. J. Solids Struct. – 2013. – Vol. 50, no. 11-12. – P. 1966-1973. DOI
20. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. О противонаправленных потоках энергии нормальных волн, распространяющихся в тонкостенных волноводах // Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем: Тр. XXIV летней школы-семинара. – СПб: Изд-во ИПМаш РАН, 1997. – С. 71-78.
21. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Потоки энергии и дисперсия нормальных волн изгибного типа в балке крестообразного профиля // Акустический журнал. – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 331-337.
22. Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 397-404. DOI
23. Sorokin S.V. The Green's matrix and the boundary integral equations for analysis of time-harmonic dynamics of elastic helical springs // J. Acoust. Soc. Am. – 2011. – Vol. 129, no. 3. – P. 1315-1323. DOI

## References

1. Filippenko G.V. Energy aspects of axisymmetric wave propagation in an infinite cylindrical shell fully submerged in liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 187-197. DOI
2. Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N. Green's matrix and the boundary integral equation method for analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 271, no. 3-5, pp. 815-847. DOI
3. Sorokin S.V., Ershova O.A. Plane wave propagation and frequency band gaps in periodic plates and cylindrical shells with and without heavy fluid loading. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 278, no. 3, pp. 501-526. DOI
4. Sorokin S.V. Analysis of vibrations and energy flows in sandwich plates bearing concentrated masses and spring-like inclusions in heavy fluid loading conditions. *J. Sound Vib.*, 2002, vol. 253, no. 2, pp. 485-505. DOI
5. Fuller C.R., Fahy F.J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid. *J. Sound Vib.*, 1982, vol. 81, no. 4, pp. 501-518. DOI
6. Pavić G. Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1990, vol. 142, no. 2, pp. 293-310. DOI
7. Pavić G. Vibroacoustical energy flow through straight pipes. *J. Sound Vib.*, 1992, vol. 154, no. 3, pp. 411-429. DOI
8. Feng L. Acoustic properties of fluid-filled elastic pipes. *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 176, no. 3, pp. 399-413. DOI
9. Xu M.B., Zhang W.H. Vibrational power flow input and transmission in a circular cylindrical shell filled with fluid. *J. Sound Vib.*, 2000, vol. 234, no. 3, pp. 387-403. DOI
10. Filippenko G.V. Kolebaniya truboprovodov i tonkostennykh opor gidrotehnicheskikh sooruzhenij, pogruzhennykh v zhidkost' [Vibrations of pipelines and thin-walled supports of hydraulic structures submerged in a fluid]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie* [Modern engineering. Science and education]. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Polytechnical University, 2012. Pp. 769-778.
11. Yeliseev V.V., Zinovieva T.V. Nonlinear-elastic strain of underwater pipeline in laying process *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 70-78. DOI
12. Filippenko G.V. The forced oscillations of the cylindrical shell partially submerged into a layer of liquid. *Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2012"*, St.-Petersburg, Russia, May 28-June 1, 2012. – P. 70-75. DOI
13. Filippenko G.V. Statement of the boundary-contact problems for the shells in acoustics. *Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2010"*, St.-Petersburg, Russia, June 8-10, 2010. – P. 57-62.
14. Eliseev V.V. *Mehanika uprugih tel* [Mechanics of elastic bodies]. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Polytechnical University, 2003. 336 p.
15. Filippenko G.V. The energy analysis of shell-fluid interaction. *Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2011"*, St.-Petersburg, Russia, May 30-June 3, 2011, pp. 63-66.
16. Filippenko G.V., Kouzov D.P. Boundary-contact problems of acoustics. The review of last results. *7th Int. Symp. "Transport Noise and Vibration"*, St.-Petersburg, Russia, June 8-10, 2004, CD format, Article no. pl08, 13 p.
17. Goldenveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E. *Svobodnye kolebaniya tonkih uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells]. Moscow: Nauka, 1979. 384 p.

18. Zinovieva T.V. Dispersiya voln v tsilindricheskoj obolochke [Dispersion of waves in a cylindrical shell]. *St.-Petersburg State Politechnical University Journal*, 2007, no. 52-1, pp. 53-58.
19. Manconi E., Sorokin S. On the effect of damping on dispersion curves in plates. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 11-12, pp. 1966-1973. DOI
20. Veshev V.A., Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. O protivonapravlennykh potokakh energii normal'nykh voln, rasprostranyayushhihsya v tonkostennykh volnovodakh. [On oppositely directed energy flows of normal waves propagating in thin waveguides]. *Analiz i sintez nelinejnykh mehanicheskikh kolebatel'nykh sistem* [Analysis and synthesis of nonlinear mechanical vibrational systems], Proceedings of the XXIV Summer School. St. Petersburg: IPME RAS, 1997. Pp. 71-78.
21. Veshev V.A., Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Potoki energii i dispersiya normal'nykh voln izgibnogo tipa v balke krestoobraznogo profilya [Energy flows and dispersion of the normal bending waves in the X-shaped beam]. *Acoustical Physics*, 1999, vol. 45, no. 3, pp. 331-337.
22. Kouzov D.P., Mirolyubova N.A. Local energy fluxes of forced vibrations of a thin elastic band. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 397-404. DOI
23. Sorokin S.V. The Green's matrix and the boundary integral equations for analysis of time-harmonic dynamics of elastic helical springs. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 129, no. 3, pp. 1315-1323. DOI

Поступила в редакцию 09.05.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014