

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.28

УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ–КУТТЫ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЧИСЛЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

На основе метода гармоник аналитически исследована спектральная устойчивость обобщенных методов Рунге–Кутты первого и второго порядков точности по временному шагу применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса. Показано, что некоторые классические явные и неявные конечно-разностные схемы интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса являются следствием последовательного использования обобщенных и обычных методов Рунге–Кутты по всем независимым переменным. Разработан общий алгоритм изучения спектральной устойчивости обобщенных многостадийных методов Рунге–Кутты разных порядков точности при интегрировании уравнения переноса. Рассмотрена спектральная устойчивость различных явных и неявных обобщенных методов Рунге–Кутты. Выявлено, что все явные методы спектрально неустойчивы, а все неявные методы спектрально устойчивы, причем неявные методы, основанные на формулах Радо, Лобатто IIIС, Нёрсетта и Барриджа, обладают асимптотической устойчивостью, а методы Гаусса–Лежандра, Лобатто IIIА, Лобатто IIIВ всех порядков точности, хотя и спектрально устойчивы, не обладают свойством асимптотической устойчивости. Проведено сравнение приближенных решений, полученных на базе разных обобщенных методов Рунге–Кутты, с точным решением при сложно осциллирующих начальных условиях с большими по модулю производными, условно моделирующих ударное воздействие. Показано, что лучшими при этом являются численные результаты, найденные по формулам Радо высоких порядков точности. Намечены пути применения предложенного подхода к исследованию спектральной устойчивости обобщенных методов Рунге–Кутты при их использовании для численного интегрирования систем уравнений первого порядка гиперболического типа как в одномерном, так и в многомерном случаях.

Ключевые слова: обобщенные методы Рунге–Кутты, уравнение переноса, спектральная устойчивость, начальная задача, функция устойчивости, конечно-разностные схемы

STUDY OF THE SPECTRAL STABILITY OF GENERALIZED RUNGE–KUTTA METHODS APPLIED TO NUMERICAL INTEGRATION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE TRANSPORT EQUATION

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

Based on the harmonics method, the spectral stability of the generalized Runge–Kutta methods of the first and second order of accuracy in time step is investigated analytically for numerical integration of the initial-boundary value problem for the transport equation. It is shown that some classical explicit and implicit finite-difference schemes of integration of the initial-boundary value problem for the transport equation is a consequence of the consistent application of the generalized and ordinary Runge–Kutta methods to all independent variables. A general algorithm for the analysis is developed to study the spectral stability of the generalized multi-stage Runge–Kutta methods of different orders of accuracy for transport equation integration. The spectral stability of various explicit and implicit generalized Runge–Kutta methods is explored. It has been found that all the explicit methods are spectral unstable, and all the implicit methods are spectral stable, and the implicit methods based on the formulas of Rado, Lobatto IIIС, Nereta and Burrige are asymptotically stable, whereas the methods of Gauss–Legendre, Lobatto IIIА, Lobatto IIIВ of all orders of accuracy (although they are spectral stable) are not asymptotically stable. Comparison of the approximate solutions obtained by different generalized Runge–Kutta methods with the exact solution is carried out under complex-fluctuating initial conditions involving large modulo derivatives conditionally modeling the impact of shocks. It turns out that the numerical results obtained by the Rado formulas of high order of accuracy are the best. The possibilities of using the proposed approach for studying the spectral stability of the generalized Runge–Kutta methods applied to numerical integration of systems of first-order equations of hyperbolic type in one- and multi-dimensional cases are outlined.

Key words: generalized Runge–Kutta methods, transport equation, spectral stability, initial problem, stability function, finite-difference schemes

1. Введение

Многие задачи механики сплошной среды имеют решения с большими градиентами, например в случае ударного нагружения [1, 2 и другие], что обуславливает актуальность проблемы разработки надежных, устойчивых методов численного интегрирования начально-краевых задач с ярко выраженными локальными эффектами решения [см. 1, 3, 4 и другие]. Большую достоверность определения поведения неизвестных функций в подобластях с большими и быстроосциллирующими градиентами обеспечивают методы, обладающие высокими порядками точности, приводящие к приемлемым результатам даже на «грубых» сетках [1].

В одномерных случаях хорошо зарекомендовали себя неклассические методы Рунге–Кутты (МРК) [5] для эффективного численного интегрирования начальных и краевых задач с жесткими дифференциальными

уравнениями, решения которых обладают указанными выше особенностями, Поэтому вопрос о целесообразности обобщения этих методов на многомерные случаи был вполне естественным, что и было проделано автором в [6, 7 и других].

Эффективность такого обобщения, в частности, заключается в том, что в начально-краевых задачах математической физики и механики дискретизация области интегрирования осуществляется в нетрадиционной последовательности. Так как область определения в нестационарных (динамических) задачах, кроме пространства, включает время, то методы численного решения предполагают дискретизацию разрешающей системы уравнений и по этой переменной. Возможны два способа дискретизации: одновременное [8] и последовательное пространственно-временное деление области интегрирования [9–12 и другие]. Используемые к настоящему моменту времени методы последовательной дискретизации базируются на разбиении области определения, в первую очередь, по пространственным переменным, сводя исходную начально-краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени (метод прямых), для интегрирования которой употребляются как явные [9–11], так и неявные разностные схемы [5, 12–16 и другие], в том числе основанные и на методах Рунге–Кутты [5, 11, 12, 15, 16 и другие].

Особенность применения обобщенных МРК заключается в том, что при последовательной дискретизации область определения решения динамической задачи сначала разбивается по времени, а уж затем (если потребуется) — по пространственным переменным. В ряде случаев такой подход более целесообразен, так как уравнения движения, как правило, содержат дифференциальные операторы по пространственным переменным сложной (часто нелинейной) структуры и достаточно простые дифференциальные операторы по времени [9, 14 и другие]. Указанная последовательность дискретизации начально-краевых задач динамики позволяет в каждый дискретный момент времени поступать более гибко, а именно прибегать к разнообразным методам интегрирования по пространственным переменным, разработанным для решения задач статики [6, 7, 17 и другие].

Известно, что уравнения газовой динамики вытекают из законов сохранения, поэтому, будучи записанными в дифференциальном виде, они имеют дивергентную форму [1, 18 и другие]. Простейшим же уравнением с частными производными, имеющим дивергентную форму, является уравнение переноса [1, 19]. Кроме того, приложение метода Даламбера (метода бегущих волн) к интегрированию одномерного волнового уравнения в акустическом приближении приводит к представлению решения в виде суммы двух функций, описывающих прямую и обратную бегущую волны [2 и другие]. Каждая из этих функций удовлетворяет соответствующему уравнению переноса. В силу этого уравнение переноса является модельным и делает возможной «отработку» схемы для более сложных уравнений акустики, нелинейных уравнений газовой динамики и других [1, 19]. А значит, исследование численных схем интегрирования этого уравнения обобщенными МРК представляет методологический интерес.

В работах [6, 7] показано, что некоторые классические конечно-разностные схемы интегрирования уравнения переноса могут быть получены как следствие применения обобщенных МРК. Изучению спектральной устойчивости этих неклассических методов при численном интегрировании начальной задачи для уравнения переноса и посвящена настоящая статья.

2. Некоторые предварительные замечания

Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial y}{\partial x}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0, \quad \alpha = \pm 1, \quad (1)$$

где $y_0(x)$ — дифференцируемая функция. Решением задачи (1) является «бегущая волна» [1, 19]:

$$y(t, x) = y_0(x + \alpha t). \quad (2)$$

Дискретизируем начальную задачу (1) по времени, то есть будем рассматривать ее решение в моменты времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad t_0 = 0, \quad (3)$$

где τ — шаг по времени (возможно, переменный: $\tau = \tau_{n+1}$).

Далее исследуем спектральную устойчивость приближенных решений начальной задачи (1), полученных разными обобщенными МРК в дискретные моменты времени (3). Для этого по аналогии с [1, 19] представим решение при $t = t_n$ в виде гармоники

$$y^n(x) \equiv y(t_n, x) = q_n \sin(kx + \varphi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{4}$$

Тогда в следующий момент времени решение, в силу свойства «бегущей волны» (2), должно иметь вид

$$y^{n+1}(x) = q_{n+1} \sin(kx + \varphi_{n+1}), \quad |x| < \infty, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n, \tag{5}$$

где $k, q_n, q_{n+1}, \varphi_n, \theta_n$ — некоторые постоянные, причем q_{n+1}, θ_n зависят от $\alpha, k, q_n, \varphi_n, \tau$. Здесь θ_n — сдвиг фазы гармоники, характеризующий свойство переноса («бегущую волну»).

Введем норму решения в пространстве \mathbb{C} :

$$\|y^n\|_{\mathbb{C}} = \max_x |y^n(x)| \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{6}$$

откуда и из (4), (5) имеем

$$\|y^n\|_{\mathbb{C}} = |q_n|, \quad \|y^{n+1}\|_{\mathbb{C}} = |q_{n+1}|. \tag{7}$$

Отношение

$$R = R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}|/|q_n| > 0, \tag{8}$$

по аналогии с терминологией, принятой в [5], целесообразно назвать функцией спектральной устойчивости соответствующего обобщенного МРК при его приложении к начальной задаче для уравнения переноса (1). Согласно (6)–(8) при $R > 1$ обобщенный МРК спектрально неустойчив; если же $R \leq 1$, то метод спектрально устойчив, причем при

$$R \equiv 1 \tag{9}$$

он не обладает свойством асимптотической устойчивости, а при

$$0 < R < 1 \tag{10}$$

обобщенный МРК асимптотически устойчив (то есть любые возмущения начального коэффициента q_0 с увеличением номера момента времени n затухают).

В силу равенств (4), (5), (8) для определения функции устойчивости достаточно в (4) принять

$$q_n = 1, \tag{11}$$

тогда из (8) следует

$$R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}(\alpha, \tau, k)| > 0. \tag{12}$$

Таким образом, чтобы установить функцию устойчивости R какого-либо обобщенного МРК, необходимо знать коэффициент q_{n+1} в (5) при выполнении равенств (4), (11). Продемонстрируем это на примере некоторых конкретных обобщенных МРК.

Для решения задачи Коши (1) наиболее естественным является использование явных схем [1, 19]. Поэтому сначала для численного интегрирования начальной задачи (1) обобщенными МРК, как и в [6, 7],

прибегнем к явному методу Эйлера и найдем выражение $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=t_n}$, откуда с учетом (1) следует

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \alpha \tau (y^n(x))', \tag{13}$$

где штрих означает производную по x .

Подставим в (13) выражение (4) с учетом (11), тогда после элементарных тригонометрических преобразований, согласно (5), получим

$$y^{n+1}(x) = \sin(kx + \varphi_n) + \alpha\tau k \cos(kx + \varphi_n) = q_{n+1} \sin(kx + \varphi_{n+1}), \quad (14)$$

где

$$q_{n+1} = \sqrt{1 + (\tau k)^2}, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n, \quad \cos \theta_n = 1/q_{n+1}, \quad \sin \theta_n = \alpha\tau k/q_{n+1}. \quad (15)$$

Из (14), (15), (8) следует, что при $\alpha = \pm 1$, $\tau > 0$ и $k > 0$ (то есть при $\tau k > 0$) имеет место неравенство $R(\tau k) > 1$, а значит обобщенный явный метод Эйлера применительно к (1) не обладает спектральной устойчивостью.

Если аппроксимировать производную в (13) конечными разностями на разных шаблонах, то придем к некоторым общеизвестным явным конечно-разностным схемам. Так, используя правые и левые разности, будем иметь

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\alpha\tau}{\Delta} (y_{i+1}^n - y_i^n); \quad (16)$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\alpha\tau}{\Delta} (y_i^n - y_{i-1}^n), \quad (17)$$

где

$$y_i^n = y(t_n, x_i), \quad x_{i+1} = x_i + \Delta \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x_0 = 0); \quad (18)$$

Δ — шаг по пространственной переменной x (возможно, переменный: $\Delta = \Delta_i$).

Схема (16) условно устойчива в пространстве \mathbb{C} сеточных функций y_i^n при $\alpha = 1$, $\tau/\Delta \leq 1$, а схема (17) условно устойчива при $\alpha = -1$, $\tau/\Delta \leq 1$; в остальных случаях эти схемы неустойчивы [1, 19]. Отметим, что явный метод Эйлера для интегрирования начально-краевой задачи по времени нашел применение, например, в работе [11].

Аппроксимируя производную в (13) с помощью центральной разности, получим явную схему

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\alpha\tau}{2\Delta} (y_{i+1}^n - y_{i-1}^n). \quad (19)$$

Известно, что схема (19) неустойчива при $\alpha = \pm 1$ и любых τ/Δ [1, 19].

Исследуем спектральную устойчивость некоторых неявных обобщенных МРК применительно к численному интегрированию начальной задачи (1). Сначала возьмем коэффициенты одностадийного метода Радо ПА (далее, как и в [6, 7], для краткости будем говорить: «воспользуемся таким-то методом» по аналогии с терминологией, принятой в [5], и использовать коэффициенты соответствующей этому методу матрицы Бутчера) — неявного метода Эйлера, тогда получим $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau\alpha Y_1'(x)$, $Y_1(x) = y^n(x) + \tau\alpha Y_1'(x)$ (здесь и далее $Y_m(x)$ — некоторые вспомогательные функции [6, 7]), откуда

$$\alpha\tau (y^{n+1}(x))' - y^{n+1}(x) = -y^n(x). \quad (20)$$

Подставляя в правую часть (20) выражение (4), учитывая (11) и разыскивая решение в виде (5), на основании (12) найдем

$$R(\tau k) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau k)^2}}, \quad \cos \theta_n = \frac{1}{R} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + k^2}, \quad \sin \theta_n = \frac{1}{R} \frac{\lambda k}{\lambda^2 + k^2}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\tau}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что при $\alpha = \pm 1$, $\tau k > 0$ выполняются неравенства (10), то есть одностадийный метод Радо ПА применительно к (1), в отличие от (13), обладает асимптотической спектральной устойчивостью. Отметим, что к соотношениям (21) приводит и одностадийный метод Радо IA.

Аппроксимируя производную в (20) правыми или левыми конечными разностями, получим общеизвестные неявные конечно-разностные схемы на трехточечных шаблонах (см. (18))

$$\frac{\alpha\tau}{\Delta} (y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}) - y_i^{n+1} = -y_i^n; \quad (22)$$

$$\frac{\alpha\tau}{\Delta}(y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) - y_i^{n+1} = -y_i^n. \tag{23}$$

Известно, что схема (22) безусловно устойчива в пространстве \mathbb{C} сеточных функций y_i^n при $\alpha = -1$, а схема (23) — при $\alpha = 1$ [1, 7, 19].

Рассмотренные выше одностадийные обобщенные МРК имеют первый порядок точности по τ . Далее исследуем спектральную устойчивость обобщенных МРК более высоких порядков точности по τ .

Проинтегрируем задачу (1) с помощью одностадийного метода Гаусса–Лежандра (метода средней точки, имеющего второй порядок точности по τ): $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau\alpha Y_1'(x)$, $Y_1(x) = y^n(x) + 0,5\tau\alpha Y_1'(x)$. В результате найдем

$$y^{n+1}(x) = 2Y_1(x) - y^n(x), \quad Y_1'(x) = \frac{2\alpha}{\tau}(Y_1(x) - y^n(x)) \tag{24}$$

или

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} \left[(y^{n+1}(x))' + (y^n(x))' \right]. \tag{25}$$

К уравнениям (24) приводит и использование двухстадийного метода Лобатто ШВ, а соотношение (25) является известной формулой трапеций, соответствующей двухстадийному методу Лобатто ША [5], поэтому дальнейшие рассуждения справедливы и для этих методов.

Подставим в (25) выражения (4), (5) с учетом (11), тогда на основании (12) после элементарных тригонометрических преобразований получим

$$R \equiv 1, \quad \cos \theta_n = \frac{\lambda^2 - k^2}{\lambda^2 + k^2}, \quad \sin \theta_n = \frac{2\lambda k}{\lambda^2 + k^2}, \quad \lambda = \frac{2\alpha}{\tau}. \tag{26}$$

Так как для функции устойчивости R выполняется тождество (9), то одностадийный метод Гаусса–Лежандра и двухстадийные методы Лобатто ША и ШВ применительно к начальной задаче (1) спектрально устойчивы, но не обладают свойством асимптотической устойчивости.

З а м е ч а н и е 1. Формулы (15), (21), (26) показывают, что всем рассмотренным выше обобщенным МРК при фиксированных α и τ присуще свойство зависимости сдвига фазы гармоника θ_n от ее частоты k . Согласно точному решению (2), этого не должно быть. Зависимость θ_n от k становится исчезающе малой при $\tau \rightarrow 0$.

Если для интегрирования второго уравнения (24) (или, что то же самое, для уравнения (25)) прибегнуть к двухстадийному методу Лобатто ША (методу трапеций [5]), то из (24) следует

$$Y_1^{i+1} = \frac{1}{1 - \alpha H} \left[(1 + \alpha H) Y_1^i - \alpha H (y_i^n + y_{i+1}^n) \right], \quad y_{i+1}^{n+1} = 2Y_1^{i+1} - y_{i+1}^n; \tag{27}$$

$$Y_1^i = \frac{1}{1 + \alpha H} \left[(1 - \alpha H) Y_1^{i+1} + \alpha H (y_i^n + y_{i+1}^n) \right], \quad y_i^{n+1} = 2Y_1^i - y_i^n, \tag{28}$$

где $Y_1^i \equiv Y_1(x_i)$, $H = \Delta/\tau$. За счет первых соотношений исключим из вторых равенств (27), (28) величины Y_1^{i+1} , Y_1^i и в образовавшихся уравнениях заменим Y_1^i , Y_1^{i+1} выражениями $Y_1^i = \frac{1}{2}(y_i^{n+1} + y_i^n)$, $Y_1^{i+1} = \frac{1}{2}(y_{i+1}^{n+1} + y_{i+1}^n)$, которые следуют из первого равенства (24). В итоге придем к классическим конечно-разностным схемам второго порядка по обеим переменным, построенным на четырехточечном шаблоне [1, 19]:

$$y_{i+1}^{n+1} = ay_i^{n+1} + y_i^n - ay_{i+1}^n, \quad a = (1 + \alpha H)/(1 - \alpha H), \quad \alpha = -1; \tag{29}$$

$$y_i^{n+1} = by_{i+1}^{n+1} + y_{i+1}^n - by_i^n, \quad b = (1 - \alpha H)/(1 + \alpha H), \quad \alpha = 1. \tag{30}$$

Известно, что схемы (29), (30) абсолютно устойчивы в энергетической норме [1, 19] (то есть в некотором интегральном смысле). Однако, как показано в [7], эти схемы неустойчивы в норме пространства \mathbb{C}

сеточных функций y_i^n . Единственным исключением является случай $H=1$, когда $\tau = \Delta$, $a = b = 0$. При этом из (29), (30) следует равенство переноса $y_{i+1}^{n+1} = y_i^n$ при $\alpha = -1$ и $y_i^{n+1} = y_{i+1}^n$ при $\alpha = 1$.

Таким образом, проведенные предварительные исследования показывают, что явные обобщенные МРК, будучи примененными к интегрированию начальной задачи (1), обладают, по-видимому, спектральной неустойчивостью, и следствием этого является неустойчивость или условная устойчивость конечно-разностных схем, построенных на их основе после дискретизации задачи по пространственной переменной x (см. (18)). Неявные же обобщенные МРК можно разделить на две группы. К первой группе относятся спектрально устойчивые методы (функция устойчивости имеет вид (9)), но не обладающие свойством асимптотической устойчивости. Конечно-разностные схемы, построенные на базе таких методов, могут оказаться неустойчивыми в пространстве \mathbb{C} сеточных функций y_i^n , хотя при этом могут быть и устойчивыми в некоторой энергетической норме (см. (29), (30)). Ко второй группе относятся методы, спектрально и асимптотически устойчивые, для которых функция устойчивости обладает свойством (10). Есть основания предполагать, что конечно-разностные схемы, построенные на базе последних методов, будут обладать безусловной устойчивостью (см. (22), (23)), хотя окончательно этот вопрос для всех таких методов пока еще не решен.

3. Общий алгоритм исследования спектральной устойчивости обобщенных МРК при применении их к начальной задаче для уравнения переноса

Согласно [6, 7] использование s -стадийного обобщенного МРК для интегрирования начальной задачи (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной переменной x следующего вида:

$$\mathbf{y}(x) = y^n(x) \mathbf{e} + \alpha \tau \mathbf{A} \mathbf{y}'(x); \quad (31)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \alpha \tau \mathbf{b}^* \mathbf{y}'(x), \quad (32)$$

где

$$\mathbf{y}(x) = \{Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_s(x)\}^*, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}^*, \quad \mathbf{e} = \{1, 1, \dots, 1\}^*; \quad (33)$$

$\mathbf{y}(x)$ — s -компонентная вспомогательная вектор-функция; $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — $s \times s$ -матрица Бутчера соответствующего МРК; \mathbf{b} — s -компонентный вектор-столбец, составленный из элементов последней строки матрицы Бутчера (см. соотношение (3.1.6) в [5]); \mathbf{e} — s -компонентный вектор-столбец, все элементы которого равны единице; звездочка означает операцию транспонирования.

З а м е ч а н и е 2. Без потери общности рассуждений для упрощения выкладок в (4) можно принять $\varphi_n = 0$ и учесть (11), тогда из (5), (12) получим функцию устойчивости и $\varphi_{n+1} = \theta_n$.

Подставим (4) в (31), что позволит разыскивать периодическое по x решение системы (31)

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{u} \sin kx + \mathbf{v} \cos kx, \quad |x| < \infty, \quad (34)$$

где \mathbf{u} , \mathbf{v} — s -компонентные векторы-столбцы, подлежащие определению. Из системы (31) с учетом (4), (34) и Замечания 2 следует матричное равенство

$$\mathbf{u} \sin kx + \mathbf{v} \cos kx = \mathbf{e} \sin kx + \alpha \tau \mathbf{A} (\mathbf{u} k \cos kx - \mathbf{v} k \sin kx). \quad (35)$$

Так как функции $\sin kx$, $\cos kx$ являются линейно независимыми, то из (35) вытекают матричные соотношения

$$\mathbf{u} = \mathbf{e} - \alpha \tau k \mathbf{A} \mathbf{v}; \quad (36)$$

$$\mathbf{v} = \alpha \tau k \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (37)$$

Подставив (37) в (36), найдем матричное уравнение $\mathbf{u} = \mathbf{e} - (\alpha \tau k)^2 \mathbf{A}^2 \mathbf{u}$, откуда

$$\left[\mathbf{I} + (\alpha \tau k)^2 \mathbf{A}^2 \right] \mathbf{u} = \mathbf{e}, \quad (38)$$

где \mathbf{I} — единичная $s \times s$ -матрица. Матричное уравнение (38) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора-столбца \mathbf{u} . Решив это уравнение, определим вектор-столбец \mathbf{u} , после подстановки которого в (37) получим и вектор-столбец \mathbf{v} .

Согласно (5) имеет место разложение $y^{n+1}(x) = y_s^{n+1} \sin kx + y_c^{n+1} \cos kx$, где y_s^{n+1} , y_c^{n+1} — разыскиваемые коэффициенты. Учет этого выражения в (32), а также (4), (34) и Замечания 2 дает выражение:

$$y_s^{n+1} \sin kx + y_c^{n+1} \cos kx = \sin kx + \alpha \tau \mathbf{b}^* (\mathbf{u} \cos kx - \mathbf{v} \sin kx),$$

из которого следует

$$y_s^{n+1} = 1 - \alpha \tau k \mathbf{b}^* \mathbf{v}, \quad y_c^{n+1} = \alpha \tau k \mathbf{b}^* \mathbf{u}. \tag{39}$$

В соответствии с (5), (11), (12) и Замечанием 2, из (39) окончательно найдем

$$R(\alpha, \tau k) = \sqrt{(y_s^{n+1})^2 + (y_c^{n+1})^2}, \quad \cos \theta_n = y_s^{n+1} / R, \quad \sin \theta_n = y_c^{n+1} / R. \tag{40}$$

На основании соотношений (37)–(40) можно исследовать спектральную устойчивость обобщенных МРК разных порядков точности. Для этого необходимо использовать лишь компоненты матрицы Бутчера должного МРК [5]. В случаях малостадийных МРК (низких порядков точности) функцию устойчивости R можно получить в явном виде (что и было проделано в разделе 2). В случаях же многостадийных МРК (высоких порядков точности по τ) целесообразно изучать функцию устойчивости по схеме (37)–(40) численно, варьируя произведение τk от нуля до бесконечности (машинной бесконечности). Далее рассмотрим спектральную устойчивость конкретных обобщенных МРК разных порядков точности.

Ненулевые компоненты матрицы Бутчера явных МРК расположены под главной диагональю [7, 20], поэтому компоненты $Y_m(x)$ ($1 \leq m \leq s$) вектора $\mathbf{y}(x)$ (см. (33)) вычисляются последовательно из уравнений системы (31) без интегрирования ее по переменной x (что и характеризует подобные методы как явные). При этом структура решения системы (31) с учетом (4) имеет вид (34), и поэтому рассуждения (35)–(40) остаются в силе. Исследование явных обобщенных МРК, компоненты матриц Бутчера которых приведены в [20], показало, что все они, как и (13), спектрально неустойчивы.

В случае применения неявных обобщенных МРК требуется интегрирование по переменной x системы (31) относительно вектор-функции $\mathbf{y}(x)$. Прямые вычисления, проведенные для всех обсуждаемых ниже неявных обобщенных МРК, показали, что собственные числа системы (31) не являются чисто мнимыми, то есть общие решения однородной системы (31) (при $y^n(x) \equiv 0$) не обладают свойством периодичности. Поэтому при задании $y^n(x)$ в виде (4) и требовании периодичности решения по x для функции $y^{n+1}(x)$ (в силу свойства «бегущей волны») получается, что произвольные постоянные, возникающие при интегрировании системы (31), необходимо принять равными нулю, и вследствие этого равенства (5), (34) и весь алгоритм изучения спектральной устойчивости соответствующего обобщенного МРК (см. (35)–(40)) остаются справедливыми.

3.1. Неявные обобщенные МРК, не обладающие свойством асимптотической спектральной устойчивости

Как уже отмечалось, для этих методов справедливо тождество (9). Проведенные исследования показали, что все обобщенные методы Гаусса–Лежандра, Лобатто IIIA и IIIB удовлетворяют равенству (9). В случае применения этих методов второго порядка точности по τ , как продемонстрировано выше, выполняются соотношения (26). Для двухстадийного метода Гаусса–Лежандра и трехстадийных методов Лобатто IIIA и IIIB (с четвертым порядком точности по τ) по схеме (31)–(40) справедливы следующие равенства:

$$R \equiv 1, \quad \sin \theta_n = \frac{12\alpha\tau\lambda(12 - \lambda^2)}{144 + 12\lambda^2 + \lambda^4}, \quad \cos \theta_n = 1 - \frac{72\lambda^2}{144 + 12\lambda^2 + \lambda^4}, \quad \lambda = \tau k. \tag{41}$$

Для трехстадийного метода Гаусса–Лежандра и четырехстадийных методов Лобатто IIIA и IIIB (с шестым порядком точности по τ) выражения для R , θ_n не были построены аналитически в силу громоздкости выражений компонент их матриц Бутчера через иррациональные дроби [5]. Непосредственные вычисления по формулам (31)–(40) показали, что для этих методов также имеет место тождество (9).

3.2. Неявные обобщенные МРК, обладающие свойством асимптотической спектральной устойчивости

В настоящем разделе рассматриваются обобщенные МРК, для которых выполняются условия (10) при $\tau k > 0$. Проведенные исследования продемонстрировали, что этим свойством обладают все методы Радо IA и ПА, а также методы Лобатто ПС. Для одностадийных методов Радо (первый порядок точности по τ) выше были получены равенства (21).

Применение обобщенных МРК приводит к следующим соотношениям:
– двухстадийный метод Радо IA (третий порядок точности по τ)

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sqrt{\frac{36+4\lambda^2}{36+4\lambda^2+\lambda^4}}, \quad \theta_n = \Theta_n + \psi_n, \quad \sin \psi_n = \frac{24\alpha\lambda}{\Delta(\lambda)(36+4\lambda^2+\lambda^4)}, \\ \sin \psi_n &= \frac{36-6\lambda^2}{\Delta(\lambda)(36+4\lambda^2+\lambda^4)}, \quad \Delta(\lambda) = \sqrt{\frac{36}{36+4\lambda^2+\lambda^4}}, \quad \sin \Theta_n = \frac{\alpha\lambda}{3\delta(\lambda)}, \\ \cos \Theta_n &= \frac{1}{\delta(\lambda)}, \quad \delta(\lambda) = \sqrt{\frac{9+\lambda^2}{9}}, \quad \lambda = \tau k; \end{aligned} \quad (42)$$

– двухстадийный метод Радо ПА (третий порядок точности по τ)

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sqrt{\frac{1296+288\lambda^2+52\lambda^4+4\lambda^6}{1296+288\lambda^2+88\lambda^4+8\lambda^6+\lambda^8}}, \\ \sin \theta_n &= \frac{2\alpha\lambda(18-\lambda^2)}{R(\lambda)(36+4\lambda^2+\lambda^4)}, \quad \cos \theta_n = \frac{36-14\lambda^2}{R(\lambda)(36+4\lambda^2+\lambda^4)}, \quad \lambda = \tau k; \end{aligned} \quad (43)$$

– двухстадийный метод Лобатто ПС (второй порядок точности по τ)

$$R(\lambda) = \sqrt{\frac{4}{4+\lambda^4}}, \quad \sin \theta_n = \frac{4\alpha\lambda}{R(\lambda)(4+\lambda^4)}, \quad \cos \theta_n = \frac{4-2\lambda^2}{R(\lambda)(4+\lambda^4)}, \quad \lambda = \tau k; \quad (44)$$

– трехстадийный метод Лобатто ПС (четвертый порядок точности по τ)

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sqrt{\frac{331776+41472\lambda^2+1296\lambda^4+576\lambda^6+36\lambda^8}{331776+41472\lambda^2+1296\lambda^4+1152\lambda^6+72\lambda^8+\lambda^{12}}}, \\ \sin \theta_n &= \frac{12\alpha\lambda(48-5\lambda^2)}{R(\lambda)(576+36\lambda^2+\lambda^6)}, \quad \cos \theta_n = \frac{576-252\lambda^2+6\lambda^4}{R(\lambda)(576+36\lambda^2+\lambda^6)}, \quad \lambda = \tau k. \end{aligned} \quad (45)$$

Функции устойчивости, вычисленные по формулам (21), (42)–(45) при $\tau k \in (0, \infty)$, монотонно убывают от 1 (при $\tau k \rightarrow +0$) до 0 при $\tau k \rightarrow \infty$.

Для трехстадийных методов Радо IA и ПА (пятый порядок точности по τ), а также для четырехстадийного метода Лобатто ПС (шестой порядок точности по τ) аналитические выражения для R , θ_n не были получены в силу громоздкости выражений компонент их матриц Бутчера через иррациональные дроби [5]. Непосредственные вычисления по формулам (31)–(40) показали, что функция устойчивости R этих методов также монотонно убывает от 1 до 0 при $\tau k \in (0, \infty)$.

3.3. Диагонально неявные обобщенные МРК

Среди неявных обобщенных МРК особое место занимают диагональные методы, так как для них ненулевые компоненты матрицы \mathbf{A} (см. (31)) расположены на главной диагонали и под ней, что позволяет интегрировать уравнения системы (31) последовательно на каждой стадии используемого многостадийного метода. Так, например, двухстадийный диагонально неявный метод (метод Нёрсетта) характеризуется следующими ненулевыми компонентами матрицы \mathbf{A} и вектора-столбца \mathbf{b} :

$$a_{11} = a_{22} = \gamma, \quad a_{21} = 1 - 2\gamma, \quad b_1 = b_2 = 1/2, \tag{46}$$

где γ — некоторая постоянная. При $\gamma = 0,5 + \sqrt{3}/6$ достигаем при определении величин y^{n+1} точности третьего порядка по τ , при остальных значениях γ — второго [5]. На основании соотношений (31)–(40), с учетом (46), имеют место равенства

$$R(\lambda) = \frac{\sqrt{\left[\psi(1+\lambda^2)^2 + \beta(1-\lambda^2) - 2\chi(1+\lambda^2)\right]^2 + 4\lambda^2\left[\beta - \chi(1+\lambda^2)\right]^2}}{2\gamma^2(1+\lambda^2)^2}; \tag{47}$$

$$\sin \theta_n = \frac{\lambda\left[\beta - \chi(1+\lambda^2)\right]}{\gamma^2 R(\lambda)(1+\lambda^2)^2}, \quad \cos \theta_n = \frac{\psi(1+\lambda^2)^2 + \beta(1-\lambda^2) - 2\chi(1+\lambda^2)}{2\gamma^2 R(\lambda)(1+\lambda^2)^2}, \tag{48}$$

$$\psi = 1 - 4\gamma + 2\gamma^2, \quad \beta = 1 - 2\gamma, \quad \chi = 1 - 3\gamma, \quad \lambda = \alpha\gamma\tau k.$$

Расчеты показали, что согласно (47) функция устойчивости $R(\lambda)$ при $0 < |\lambda| < \infty$ (или, что то же самое, при $0 < \tau k < \infty$) монотонно изменяется от 1 до значения

$$R_\infty = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda) = \left| 1 + \frac{1 - 4\gamma}{2\gamma^2} \right|, \tag{49}$$

откуда следует, что при $\gamma > 0,5$ выполняются неравенства $R_\infty < 1$, $R_\infty < R(\lambda) < 1$ (то есть справедливы неравенства (10)). В частности, при $\gamma = 0,5 + \sqrt{3}/6 > 0,5$ получаем $R_\infty = 0,7321$ и третий порядок точности по τ , а при $\gamma < 0,5$ из (49) имеем $R_\infty > 1$, то есть в последнем случае метод Нёрсетта спектрально неустойчив.

Трехстадийный диагонально неявный метод (метод Барриджа) характеризуется следующими ненулевыми компонентами матрицы **A** и вектора-столбца **b**:

$$a_{ii} = \gamma \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_{21} = 0,5 - \gamma, \quad a_{31} = 2\gamma, \quad a_{32} = 1 - 4\gamma, \tag{50}$$

$$b_1 = b_3 = \left[24(0,5 - \gamma)^2 \right]^{-1}, \quad b_2 = 1 - \left[12(0,5 - \gamma)^2 \right]^{-1},$$

где γ — по-прежнему некоторая постоянная. При

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{18} \tag{51}$$

метод имеет четвертый порядок точности, а при других γ — третий [5]. Численный анализ, проведенный по формулам (31)–(40) с учетом (50), (51), показал, что для метода Барриджа функция устойчивости монотонно убывает от 1 до 0,6304 при $\tau k \in (0, \infty)$. Следовательно, оба диагональных обобщенных МРК (метод Нёрсетта при $\gamma = 0,5 + \sqrt{3}/6$ и метод Барриджа при выполнении равенства (51)) обладают свойством асимптотической спектральной устойчивости.

Для всех неявных обобщенных МРК после дискретизации задачи (1) по времени t получается система обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной переменной x (см. (31)). В случае решения начально-краевой задачи для уравнения переноса (когда на полуоси $t = 0$, $x \in [0, \infty)$ или $t = 0$, $x \in (-\infty, 0]$ задано начальное условие, как в (1), а на полуоси $x = 0$, $t \in [0, \infty)$ — некоторое краевое условие для функции $y(t, x)$ [1, 19]) проинтегрировать эту систему уравнений численно можно с применением обычных МРК [5]. При этом краевое условие при $x = 0$, $t \in [0, \infty)$ выступает в качестве «начального» условия по переменной x . Если же рассматривается начальная задача (1) с периодической функцией $y_0(x)$, то согласно (2) в каждый дискретный момент времени t_n решение будет периодическим по x . В этом случае система (31) может быть также проинтегрирована обычными МРК, для чего в некоторой точке x (например $x = 0$) «начальные параметры» для однозначного интегрирования

возникающей при такой постановке задачи Коши должны быть определены из условия периодичности решения по x . С этой целью можно использовать, например, метод пристрелки (как это сделано в [7]). После такой последовательной дискретизации начальной или начально-краевой задачи для уравнения переноса по обеим переменным t и x будем иметь нужные конечно-разностные схемы численного интегрирования (именно таким путем классические схемы (22), (23) и (29), (30) найдены из дифференциальных уравнений (20) и (25) соответственно, причем эти схемы рекомендованы для численного интегрирования именно начально-краевых задач для уравнения переноса [1, 19]). При этом совершенно не обязательно для дискретизации системы (31) по переменной x использовать те же МРК, что и употребленные для дискретизации задачи (1) по времени t . Эта возможность существенно расширяет семейство конечно-разностных схем, которые можно построить на базе МРК для численного интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса. Изучение устойчивости таких схем является самостоятельной проблемой вычислительной математики, которая выходит за рамки настоящей работы.

Проведенное выше исследование относится к одному одномерному по пространственной переменной уравнению с частными производными первого порядка [1, 19]. Однако результаты могут быть обобщены и на многомерный пространственный случай. При этом под x и k нужно понимать векторы-столбцы соответствующих евклидовых пространств размерности r ($r = 1, 2, 3$), а под произведением kx (см. (4) и далее) — скалярное произведение этих векторов. Кроме того, известно, что все схемы методов Рунге–Кутты, полученные для одного уравнения, полностью переносятся и на системы уравнений [5–7, 20], то есть на случай, когда в (1) под y , y_0 понимаются вектор-функции, а под α — квадратная матрица той же размерности, что и y , y_0 (предполагается, что жорданова форма матрицы α является диагональной, поскольку это обеспечивает гиперболичность системы (1) [18]). Однако, несмотря на элементарность такого переноса схем Рунге–Кутты на системы уравнений, открытым пока остается вопрос об адекватном выборе требуемой функции устойчивости R , которая в случае одного уравнения определяется достаточно просто (см. (8)).

4. Обсуждение результатов расчетов для уравнения переноса

Для апробации полученных выше схем интегрирования начальной задачи (1) рассмотрим случай $\alpha = -1$ при начальном условии

$$y_0(x) = \sum_{m=1}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m x), \quad k_m = 2\pi(2m-1) \quad (M = 1, 2, 3, \dots), \quad (52)$$

которое представляет собой конечную сумму гармоник. Сравнивая (52) и (4) при $n = 0$, находим

$$q_0^{(m)} = 8/k_m, \quad \varphi_0^{(m)} = 0, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (53)$$

Согласно (52) функция $y_0(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для периодической ступенчатой функции

$$z(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 + l \leq x < l; \\ +1, & l \leq x < 1/2 + l \end{cases} \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (54)$$

с периодом $X = 1$. Точное решение начальной задачи Коши (1), (52) в силу (2) имеет вид

$$y(t, x) = \sum_{m=1}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m(x-t)). \quad (55)$$

Из равенства (55) следует, что на прямых $x - t = l/2$ частные производные по модулю составляют

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 8 \left| \sum_{m=1}^M \cos(\pi(2m-1)l) \right| = 8M, \quad (56)$$

а модуль градиента решения в этих точках равен $8\sqrt{2}M$. Стало быть, с увеличением числа гармоник модуль градиента возрастает, и уже при $M = 5$ его можно считать большим по сравнению со значениями

модуля функции (55). Кроме того, из теории рядов Фурье известно, что в окрестности точки разрыва функции (54) ее разложение (52) имеет неустранимые «пики» (проявляется эффект Гиббса), и чем больше значение M , тем больше вторые производные от $y_0(x)$ в точках, соответствующих этим пикам. А значит, решение рассматриваемой начальной задачи (1), (52) при больших M обладает не только большими по модулю производными первого порядка (56), но и большими по модулю производными высших порядков (вследствие локальных эффектов).

В качестве конкретного примера рассмотрим случай $M = 30$. При этом максимальные значения модуля градиента решения превышают 330, а модуль функции (55) с учетом эффекта Гиббса не превосходит значения 1,18, то есть градиенты решения являются большими и периодически повторяющимися. Именно на задачах с такими особенностями решения целесообразно апробировать обобщенные МРК (особенно высоких порядком точности). С наибольшей полнотой удастся выяснить достоинства и недостатки этих методов, трудно оцениваемых на весьма гладких (типа одной гармонике) решениях начальной задачи (1). Отметим, что качественно подобные ситуации (по крайней мере для скоростей точек среды) при отыскании решения в виде бегущей волны ступенчатой формы (или близкой к ней) возникают при исследовании механического поведения сплошных сред, подвергнутых ударному воздействию [1, 2, 16].

Согласно (4), (5), (52), (53) в момент времени t_n все анализированные выше обобщенные МРК дают решение рассматриваемой начальной задачи в виде

$$y^n(x) = \sum_{m=1}^M q_n^{(m)} \sin(k_m x + \varphi_n^{(m)}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{57}$$

Учитывая (6), (7), оценим норму решения (57) в пространстве C :

$$\|y^n\|_C = \max_x |y^n| \leq \sum_{m=1}^M |q_n^{(m)}| \cdot |\sin(k_m x + \varphi_n^{(m)})| \leq \sum_{m=1}^M |q_n^{(m)}|. \tag{58}$$

На основании (8), (58) при постоянном по времени шаге τ получаем

$$\|y^n\|_C \leq \sum_{m=1}^M |q_n^{(m)}| = \sum_{m=1}^M [R(\tau k_m)]^n |q_0^{(m)}| \equiv S_M^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{59}$$

где $q_0^{(m)}$ имеют значения (53). Заметим, что в расчетах шаг τ выбирался так, чтобы 10 шагов по времени были равны периоду колебаний высшей гармоники в решении (55), то есть при $m = M$.

Если обобщенный МРК не обладает асимптотической спектральной устойчивостью, то из (59) с учетом (9) следует

$$\|y^n\|_C \leq S_M^0 \equiv \sum_{m=1}^M q_0^{(m)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{60}$$

Из (60) видно, что норма решения при $n \rightarrow \infty$ остается ограниченной сверху числом S_M^0 , то есть метод является устойчивым, но в силу Замечания 1 приближенное решение (57) при этом может существенно отличаться от точного решения (55). Так, при $M = 30$ из (60) найдем $\|y^n\|_C \leq 3,415$, а норма точного решения составляет $\|y\|_C \approx 1,179$ (этот факт продемонстрирован ниже на конкретном примере). Вследствие (52), (53), (60) при $M \rightarrow \infty$ имеем $\lim S_M^0 \rightarrow \infty$, то есть с увеличением числа слагаемых в разложении (52) (с увеличением градиентов решения (56)) возрастает вероятность все более существенного расхождения точного и численного решений (вплоть до полной потери точности).

Если же обобщенный МРК обладает свойством асимптотической спектральной устойчивости, то из (59) с учетом (10), (60) вытекает неравенство

$$\|y^n\|_C \leq S_M^n < S_M^0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{61}$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_M^n \rightarrow 0$ (наблюдается асимптотическая устойчивость). Значит, подобные МРК дают разность точного и приближенного решений при достаточно больших n в худшем случае того же порядка, что и норма точного решения. По-видимому, именно таким обобщенным МРК стоит отдавать предпочтение. Продемонстрируем это на примере конкретных расчетов.

Так как точное решение (55) является периодическим с периодом $T = X = 1$ (равным периоду колебаний низшей гармоники при $m=1$, см. (52)), то внутри каждого периода колебаний целесообразно ввести локальное время t_* ($0 \leq t_* < T = 1$). Тогда глобальное t и локальное t_* времена будут связаны между собой соотношением

$$t = t_* + TN = t_* + N, \quad 0 \leq t_* < 1 \quad (N = 0, 1, 2, \dots), \quad (62)$$

где N — количество периодов колебаний низшей гармоники, предшествующих рассматриваемому периоду.

На рисунках 1–4 приведены точные (кривые 1) и приближенные (остальные кривые) решения начальной задачи (1), (52) в точке $x=0$ при малых, средних и больших значениях времени t . Согласно (62) на рисунках по оси абсцисс отложено локальное время t_* и для каждого из рисунков указано свое значение N : $N=0$ для рисунка 1а (окрестность начального момента времени $t=0$); $N=50$ для рисунков 2а–4а (средние значения времени t); $N=5 \cdot 10^4$ для рисунка 1б, рисунков 2б–г, рисунка 3б и рисунка 4б (большие значения времени t).

На рисунке 1 изображены приближенные решения начальной задачи (1), (52), полученные на базе обобщенных МРК низких порядков точности: кривые 2 рассчитаны одностадийным методом Гаусса–Лежандра (методом средней точки, имеющим второй порядок точности по τ), а также двухстадийными методами Лобатто ША и ШВ по формулам (24)–(26), кривые 3 определены на основе двухстадийного метода Лобатто ШС (второй порядок точности по τ ; см. (44)), а кривые 4 — на основе одностадийных методов Радо IА и IА (неявного метода Эйлера, имеющего первый порядок точности по τ ; см. (20), (21)).

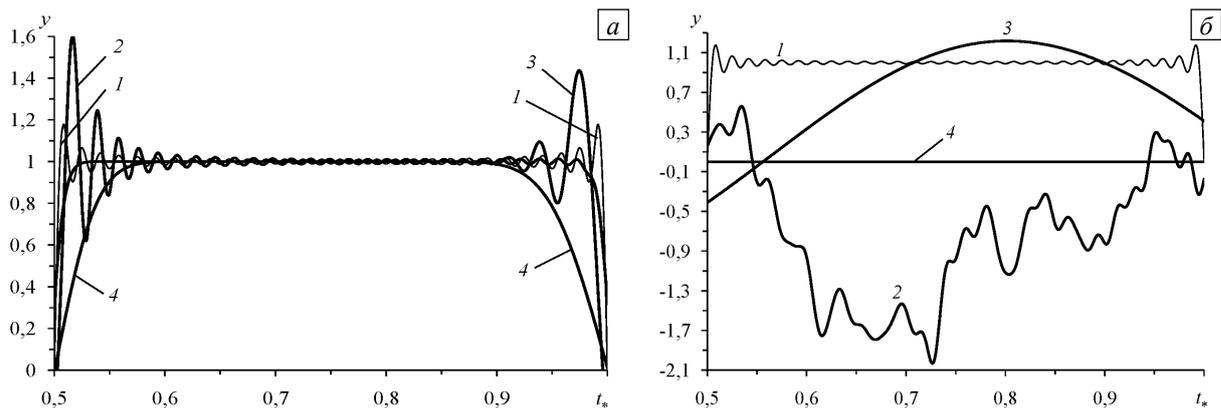


Рис. 1. Характер решений (кривые 2–4) на основе обобщенных МРК низких порядков точности при различных значениях времени: при малых ($N=0$, см. (62)) временах (а), при больших ($N=5 \cdot 10^4$) временах (б); 1 – точные решения; 2 – одностадийный метод Гаусса–Лежандра и двухстадийные методы Лобатто ША и ШВ (второй порядок); 3 – двухстадийный метод Лобатто ШС (второй порядок); 4 – одностадийные методы Радо (первый порядок)

Судя по характеру кривых 2, 3 на рисунке 1а, уже на начальном участке времени ($N=0$, см. (62)) метод средней точки и двухстадийные методы Лобатто дают решения с резким увеличением «пиковых» значений (экстремумов) в окрестности точек $t_* \approx 0,5$ и $t_* \approx 1$ соответственно (то есть в окрестности точек, в которых точное решение (55) имеет большие по модулю градиенты (56)). Поведение же кривых 2, 3 на рисунке 1б показывает, что согласно проведенному выше анализу (см. (58)–(60)) при больших значениях времени t метод средней точки и методы Лобатто ША и ШВ приводят к полной потере точности (см. кривые 1 и 2 на рисунке 1б), а метод Лобатто ШС отслеживает решение лишь в некотором «общем смысле». Последнее объясняется тем, что в силу (44), (57), (59) все высшие гармоники при таких больших значениях t практически уже затухают, и приближенное решение, по сути, определяется лишь низшей гармоникой ($m=0$), амплитуда которой также со временем уменьшается, поэтому кривая 3 на рисунке 1б уже не несет локальных эффектов, присущих точному решению (см. кривую 1).

Отметим, что аналогично кривой 2 на рисунке 1а ведет себя и численное решение (см. кривую 4 на рисунке 2 в [7]), полученное при $H \neq 1$ по схеме (29), которая, как показано в [7], неустойчива в норме пространства \mathbb{C} сеточных функций y_i^n .

Кривая 4 на рисунке 1а показывает, что решение неявным методом Эйлера (см. (20)) уже на начальном этапе отражает только общую (в некотором осредненном смысле) тенденцию поведения решения задачи

(1), (52), но не передает локальных особенностей точного решения (55), в частности, не выделяет локальных экстремумов. Это вызвано быстрым затуханием высших гармоник в разложении (57) при выбранном шаге по времени τ . С увеличением времени t , согласно (21), (57), (61), приближенное решение достаточно быстро затухает, поэтому на рисунке 1б линия 4 визуально не отличается от горизонтальной прямой $y = 0$ (значения y'' имеют порядок 10^{-8}). Отметим, что с кривой 4 на рисунке 1 схож вид кривой численного решения, полученного по схеме (22) при $\tau/\Delta \neq 1$ (см. кривые 2, 3 на рисунке 2 в [7]), которая безусловно устойчива в норме пространства \mathbb{C} сеточных функций y_i^n [1, 7, 19].

На рисунке 2 изображены приближенные решения начальной задачи (1), (52), полученные обобщенными МРК четвертого и шестого порядка точности по τ . Кривые 2 на рисунках 2а и 2б определены двухстадийным методом Гаусса–Лежандра и трехстадийными методами Лобатто ША и ШВ (согласно (41), все три метода приводят к одному и тому же результату и имеют четвертый порядок точности по τ); линии 3 рассчитаны трехстадийным методом Лобатто ШС (в соответствии с (45), этот метод обладает асимптотической спектральной устойчивостью и имеет четвертый порядок по τ).

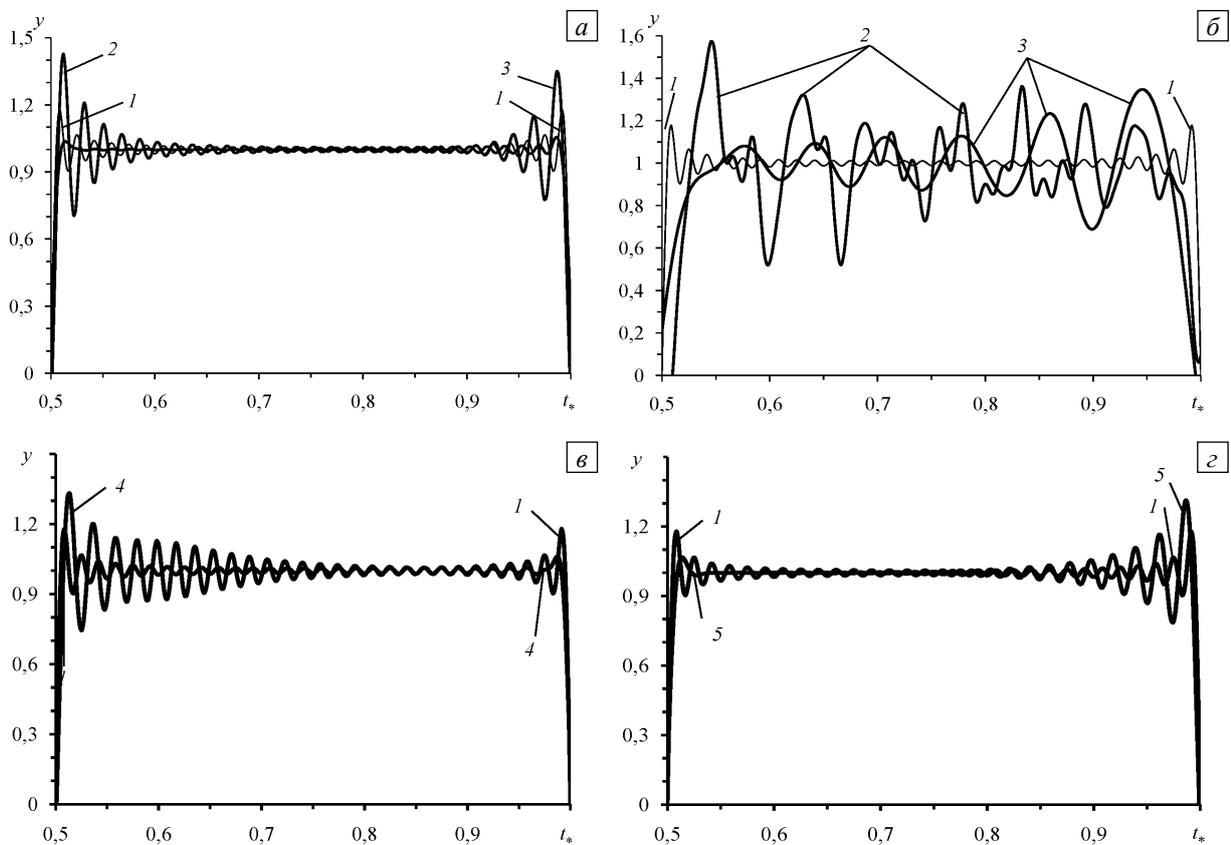


Рис. 2. Характер решений (кривые 2–5) на основе обобщенных МРК четвертого (а, б) и шестого (в, г) порядков точности при средних ($N = 50$, см. (62)) (а) и больших ($N = 5 \cdot 10^4$) (б) временах; 1 – точные решения; 2 – двухстадийный метод Гаусса–Лежандра, трехстадийные методы Лобатто ША и ШВ; 3 – трехстадийный метод Лобатто ШС; 4 – трехстадийный метод Гаусса–Лежандра, четырехстадийные методы Лобатто ША и ШВ; 5 – четырехстадийные метод Лобатто ШС

Вследствие высокого порядка точности указанных методов в окрестности начального момента времени (при малых значениях N в (62)) приближенные решения визуально практически не отличаются от точного решения (от кривой 1 на рисунке 1а). С увеличением N в окрестности точек с большими градиентами решения (56) разница между приближенными и точными решениями возрастает и после нескольких десятков колебаний низшей гармоники в решении (55) становится весьма заметной. Это отчетливо наблюдается на рисунке 2а (при $N = 50$).

Так как кривые 2 на рисунках 2а и 2б отвечают обобщенным МРК, для которых выполняется тождество (9), то согласно оценке (60) при больших значениях времени t приближенное решение может существенно отличаться от точного. Последнее нашло свое отражение на рисунке 2б (при $N = 5 \cdot 10^4$), где кривая 2 далека от точного решения (от кривой 1) и имеет тенденцию к образованию «биений» в приближенном решении. В итоге может сложиться ситуация, аналогичная той, что характеризуется кривой 2 на рисунке 1б.

Амплитуды гармоник решения (57) (кривые 3 на рисунках 2а и 2б) со временем затухают (так как для метода Лобатто ПС справедливы неравенства (10)), поэтому аналогичных резких «биений» на кривой 3 рисунка 2б не наблюдается. Не затухшие к этому времени низшие гармоники обуславливают приближенное решение, которое колеблется в некоторой малой окрестности точного решения.

На рисунке 2в кривая 4 соответствует приближенному решению задачи (1), (52), полученному при $N = 5 \cdot 10^4$ (то есть при больших значениях времени t) на основе трехстадийного метода Гаусса–Лежандра (шестой порядок точности по τ). Дополнительные расчеты по схеме (31)–(40) показали, что приближенные решения на базе четырехстадийных методов Лобатто ПА и ПБ визуально не отличаются от этой кривой (функции устойчивости для всех названных методов удовлетворяют тождеству (9)). На рисунке 2г кривая 5 характеризует приближенное решение при $N = 5 \cdot 10^4$, определенное четырехстадийным методом Лобатто ПС, имеющим шестой порядок точности по τ и функцию устойчивости, удовлетворяющую неравенствам (10).

Поведение кривых 4, 5 на рисунках 2в и 2г качественно подобно поведению кривых 2 и 3 на рисунке 2а, поэтому более подробно их обсуждать не будем. Отметим лишь, что при малых и средних значениях времени t решения на основе обобщенных МРК шестого порядка точности визуально не отличаются от точного решения (от кривых 1 на рисунках 1а и 2а).

На рисунке 3 изображены приближенные решения начальной задачи (1), (52), полученные обобщенными МРК третьего порядка точности по τ : кривые 2 найдены двухстадийными методами Радо IA и ПА (несмотря на различие формул (42), (43) рассчитанные по ним кривые визуально неразличимы); линии 3 вычислены при помощи двухстадийного диагонального метода (метода Нёрсетта, см. (46)–(48)). В силу достаточно высокого порядка точности указанных методов в окрестности начального момента времени (при малых значениях N в (62)) приближенные решения визуально практически не отличаются от точного решения (от кривой 1 на рисунке 1а). Так как эти методы удовлетворяют неравенствам (10), то с увеличением времени t высшие гармоники в разложении (57) затухают, и приближенные решения описывают точное лишь в некотором осредненном смысле, как например на рисунке 3а (при $N = 50$). Причем «биения», характерные для приближенных решений, изображенных на рисунке 2а (хотя порядок точности последних решений выше) не возникают. Согласно (42), (43), (47) с течением времени все гармоники в решении (57) затухают, и при весьма больших значениях t приближенные решения, определенные двухстадийными методами Радо IA, Радо ПА и Нёрсетта, существенно отличаются от точного (см. Рис. 3б, получено при $N = 5 \cdot 10^4$).

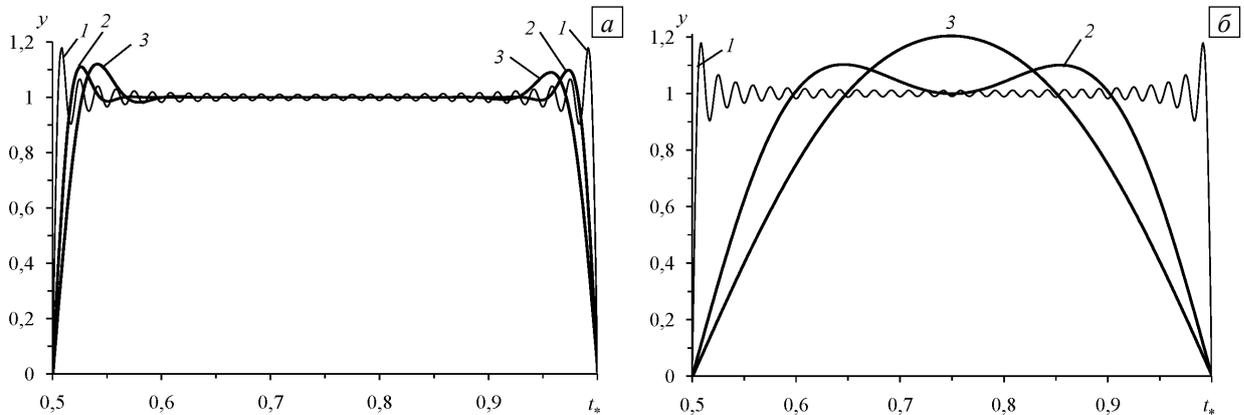


Рис. 3. Характер решений (кривые 2, 3) на основе обобщенных МРК третьего порядка точности при средних ($N = 50$, см. (62)) (а) и больших ($N = 5 \cdot 10^4$) (б) значениях времени; 1 – точные решения; 2 – двухстадийные методы Радо; 3 – метод Нёрсетта

Кривые 2 на рисунке 4 рассчитаны по схеме (31)–(40) трехстадийным методом Радо IA (с пятым порядком точности по τ). Расчет трехстадийным методом Радо ПА приводит к результату, который визуально не отличается от линий 2. Кривые 3 на рисунке 4 определены методом Барриджа (имеет четвертый порядок точности; см. (50), (51)). Как видно из рисунка 4а, методы Радо IA и ПА при средних значениях времени t (при $N = 50$) приводят к приближенным результатам, которые визуально не отличаются от точного решения (кривая 1).

Сравнение кривых 3 на рисунках 3 и 4 показывает: из двух рассмотренных выше диагонально неявных обобщенных МРК, по-видимому, с точным решением начальной задачи (1), (52) лучше согласуется метод Нёрсетта (см. кривые 3 на рисунке 3), даже несмотря на то, что его точность на порядок ниже, чем у метода Барриджа (см. кривые 3 на рисунке 4).

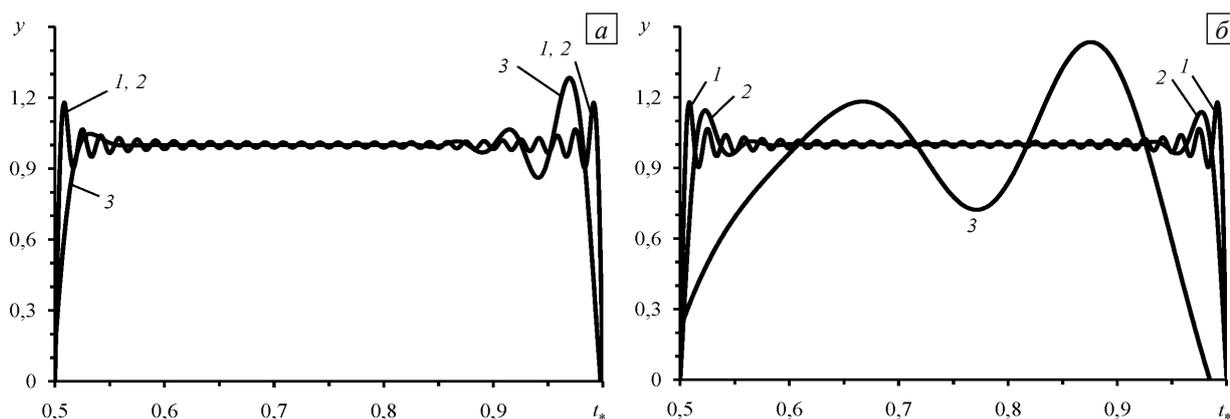


Рис. 4. Характер решений (кривые 2, 3), найденных обобщенными трехстадийными методами Радо и методом Барриджа при средних ($N = 50$, см. (62)) (а) и больших ($N = 5 \cdot 10^4$) (б) значениях времени; 1 – точные решения; 2 – методы Радо (пятый порядок точности); 3 – метод Барриджа (четвертый порядок точности)

5. Заключение

Проведенные исследования показывают, что все явные обобщенные МРК спектрально неустойчивы применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса. Неявные же обобщенные МРК спектрально устойчивы, причем методы, основанные на формулах Радо, Лобатто ПС, Нёрсетта и Барриджа, обладают, кроме того, свойством асимптотической устойчивости, которое не присуще обобщенным методам Гаусса–Лежандра, Лобатто ША и ШВ. Выполненный сравнительный анализ приближенных численных решений разных порядков точности и аналитического решения начальной задачи для уравнения переноса показывает, что при задании начальных условий с большими по модулю производными первого и высших порядков (качественно подобные условия возникают, например, при рассмотрении волновых процессов в стержневых системах в случаях их продольного ударного нагружения [2, 16]) при средних и больших значениях времени целесообразно использовать двух- и трехстадийные методы Радо IA или Радо ПА, имеющие третий и пятый порядок точности соответственно, или двухстадийный диагонально неявный метод Нёрсетта, обеспечивающий третий порядок точности (следует отметить, что в [16] независимо и на основе совершенно других рассуждений получены аналогичные результаты: при численном решении динамических задач об ударном продольном нагружении стержня целесообразно отдавать предпочтение формулам Радо, а не формулам Лобатто). Преимущество метода Нёрсетта заключается в том, что он является диагональным, а значит, система уравнений (31) с учетом (46) на каждой стадии может быть проинтегрирована последовательно по пространственной переменной x . Использование же методов Радо требует интегрирования систем двух или трех уравнений (31) (в зависимости от числа стадий), которые не распадаются на отдельные уравнения, но зато эти методы обеспечивают наилучшую точность приближенного решения для уравнения переноса при наличии больших градиентов и производных высших порядков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102-а).

Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 424 с.
2. Манжосов В.К., Слепухин В.В. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.
3. Huang W. Variational mesh adaptation: isotropy and equidistribution // J. Comput. Phys. – 2001. – Vol. 174, no. 2. – P. 903-924. DOI
4. Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В. Технология построения разностных сеток. – Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с.
5. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
6. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Численное интегрирование двумерных краевых задач с большими градиентами решения // ЖВТ. – 2000. – Т. 5, № 4. – С. 82-96.
7. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Обобщение методов Рунге–Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики // СибЖВМ. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 57-76.
8. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
9. Баженов В.Г., Павлёнкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427-434. DOI
10. Ткаченко О.П. Численный анализ динамики криволинейного трубопровода // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 345-353. DOI

11. Левин В.А., Надкриничный Л.В. Численное исследование генерации волн на поверхности при погружении твердого тела в жидкость // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 65-73. DOI
12. Липанов А.М., Карсканов С.А. Применение схем высокого порядка аппроксимации при моделировании процессов торможения сверхзвуковых течений в прямоугольных каналах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 292-299. DOI
13. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
14. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 344 с.
15. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method // *Comput. Method. Appl. M.* – 2012. – Vol. 245-246. – P. 90-101. DOI
16. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Шаговый метод обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге–Кутты // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – № 75-3. – С. 178-184.
17. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге–Кутты // ЖВТ. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77-95.
18. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 592 с.
19. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
20. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 2. – 620 с.

References

1. Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye skhemy gazovoi dinamiki* [Difference schemes of gas dynamics]. Moscow: URSS, 2009. 424 p.
2. Manzhosov V.K., Slepukhin V.V. *Modelirovanie prodol'nogo udara v sterzhnevyykh sistemakh neodnorodnoi struktury* [Longitudinal impact in bar systems of heterogeneous structure]. Ulyanovsk: Ulyanovsk State Technical University, 2011. 208 p.
3. Huang W. Variational mesh adaptation: isotropy and equidistribution. *J. Comput. Phys.*, 2001, vol. 174, no. 2, pp. 903-924. DOI
4. Liseikin V.D., Shokin Yu.I., Vaseva I.A., Likhanova Yu. *Tekhnologiya postroeniya raznostnykh setok* [Grid generation technology]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 414 p.
5. Decker K., Verwer J.G. *Ustoichivost' metodov Runge–Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravnenij* [Stability of Runge–Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988. 334 p.
6. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Numerical integration of two-dimensional boundary problems with large solution gradients. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 82-96.
7. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Generalization of the Runge–Kutta methods and their application to integration of initial-boundary value problems of mathematical physics. *Numerical Analysis and Applications*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 57-76.
8. Erkhov M.I. *Theory of ideally plastic bodies and structures*. Moscow: Nauka, 1978. 352 p.
9. Bazhenov V.G., Pavlyonkova E.V., Artemyeva A.A. Numerical solution of generalized dynamic axisymmetric problems for elastoplastic shells of revolution under large deformations. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 427-434. DOI
10. Tkachenko O.P. Numerical analysis of the dynamics of a curvilinear pipeline. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 345-353. DOI
11. Levin V.A., Nadkrinichny L.V. Numerical investigation of surface wave generation during immersion of a rigid body into a liquid. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 65-73. DOI
12. Lipanov A.M., Karskanov S.A. Application of high-order schemes for modeling the process of braking of supersonic flows in rectangular channels. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 292-299. DOI
13. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
14. Kuzmin M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. *Strength, toughness, resistance of structural elements. Theory and practical work. Strength calculations for multilayer composite structural elements*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2012. 344 p.
15. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method. *Comput. Method. Appl. M.*, 2012, vol. 245-246, pp. 90-101. DOI
16. Igumnov L.A., Rataushko Ya.Yu. Time-step method of Laplace transformation inversion based on the Runge–Kutta scheme nodes. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, no. 75-3, pp. 178-184.
17. Nemirovsky J.V., Yankovsky A.P. Integration of problem on elasto-plastic dynamic bending of reinforced cores of sections with a variable cross-section using generalized Runge–Kutta methods *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2004, vol. 9, no. 4, pp. 77-95.
18. Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravnenij* [System of quasilinear equations]. Moscow: Nauka, 1969. 592 p.
19. Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
20. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenij* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz, 1959, vol. 2. 620 p.

Поступила в редакцию 21.03.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014

Сведения об авторе

Янковский Андрей Петрович, дфмн, внс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; e-mail: lab4nemir@rambler.ru