

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.27

УДК: 532.5.013.4

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

А.В. Перминов<sup>1</sup>, Т.П. Любимова<sup>2</sup><sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация<sup>2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Работа посвящена исследованию конвективного течения псевдопластической жидкости между двумя параллельными вертикальными плоскостями, на которых поддерживаются постоянные разные температуры. Для описания реологического поведения жидкости использовалась модель Уильямсона. Стационарное решение задачи, соответствующее плоскопараллельному течению, получалось численно, методом конечных разностей. Расчеты показали, что псевдопластические свойства жидкости, по сравнению с ньютоновской жидкостью, приводят к уплощению профиля скорости стационарного течения вблизи экстремумов, при этом сами экстремумы сдвигаются в направлении твердых границ слоя. Исследование устойчивости стационарного течения относительно малых двумерных возмущений осуществлялось численно, с использованием пакета программ для исследования устойчивости неоднородных течений. Найдено, что, как и в случае ньютоновской жидкости, имеются две моды неустойчивости: монотонная гидродинамическая и колебательная тепловая. При малых значениях числа Прандтля за неустойчивость ответственны монотонные гидродинамические возмущения, при числах Прандтля, превышающих некоторое значение, – тепловые волны. Минимальное критическое число Грасгофа для обеих мод неустойчивости монотонно растет с увеличением вязкости при малых скоростях деформаций. Усиление псевдопластических свойств жидкости приводит к существенному понижению устойчивости стационарного течения относительно обоих типов возмущений. Пороговое значение числа Прандтля, определяющее смену типа неустойчивости, понижается с увеличением вязкости при малых скоростях деформаций.

*Ключевые слова:* псевдопластичная жидкость, свободная конвекция, устойчивость, вертикальный слой

## STABILITY OF THE STATIONARY PLANE-PARALLEL FLOW OF PSEUDOPLASTIC FLUIDS IN A PLANE VERTICAL LAYER

A.V. Perminov<sup>1</sup> and T.P. Lyubimova<sup>2</sup><sup>1</sup>Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation<sup>2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper deals with the investigation of a convective flow of pseudoplastic fluid between two parallel vertical plates kept at different uniform temperatures. Williamson's model is used to describe the rheological behaviour of the fluid. The stationary solution of the problem which corresponds to the plane-parallel flow is studied numerically by the finite difference method. Calculations show that the pseudoplastic properties of fluid result in the flattening of the velocity profile near extrema in comparison with the Newtonian fluid and, moreover, the extrema are shifted to the layer boundaries. The stability of the stationary flow with respect to small two-dimensional perturbations is investigated using the software package for studying the stability of non-dimensional flows. It has been found that, similar to the case of Newtonian fluids, there are two instability modes: a monotonous hydrodynamic mode and an oscillatory thermal mode. At low Prandtl numbers the monotonous hydrodynamical perturbations are responsible for the stability loss, and at Prandtl numbers larger than a certain value the perturbations in the form of thermal waves are most dangerous. The minimal critical Grashof number for both instability modes grows monotonically with the increase of viscosity at small strain rates. The growth of the pseudoplastic properties of fluids leads to a substantial reduction in the stationary flow stability for both types of perturbations. The threshold value of the Prandtl number defining the instability type change decreases with increasing viscosity at small strain rates.

*Key words:* pseudoplastic fluid, thermal buoyancy convection, stability, vertical layer

### 1. Введение

Сложные реологические свойства неньютоновских жидкостей приводят к качественному отличию свойств устойчивости равновесия и течений этих жидкостей от ньютоновских. Так, в [1] показано, что при подогреве снизу равновесие псевдопластической жидкости, физические свойства которой описываются степенным законом, абсолютно устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям и конвекция возбуждается жестко. В случае дилатантной степенной жидкости равновесие при подогреве снизу абсолютно неустойчиво [1].

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости стационарного конвективного течения псевдопластической жидкости между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур, поддерживаемых в дальнейшем постоянными. Для ньютоновской жидкости эта задача рассматривалась в [2–5], где показано, что характер неустойчивости зависит от числа Прандтля. При числах Прандтля, меньших 12,45, и некотором критическом значении числа Грасгофа стационарное плоскопараллельное течение становится неустойчивым по отношению к возмущениям гидродинамической природы, имеющим вид вихрей на границе встречных потоков. При числах Прандтля, больших 12,45, неустойчивость возникает в результате развития тепловых волн.

Исходя из технологических приложений, актуальной задачей является исследование устойчивости конвективных течений жидкостей, вязкость которых не является постоянной величиной. Она может, например, зависеть от температуры или скорости деформаций. В работах [6–8] теоретически и экспериментально исследовано влияние на устойчивость стационарного конвективного течения в плоском наклонном слое ньютоновской жидкости зависимости вязкости от температуры. Найдено, что уменьшение вязкости с ростом температуры оказывает дестабилизирующее действие.

При описании течений неньютоновских жидкостей, вязкость которых является функцией скорости деформаций, часто используют степенную реологическую модель [1, 9–11]. Устойчивость стационарных конвективных течений степенных жидкостей с ненулевыми начальными значениями вязкости (в случае дилатантной жидкости) и текучести (в случае псевдопластической жидкости) между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур, исследовалась в работах [9, 10]. Показано, что псевдопластические свойства жидкостей оказывают дестабилизирующее действие, а дилатантные стабилизируют течение.

В настоящей работе линейная устойчивость стационарного конвективного течения псевдопластической жидкости между двумя твердыми вертикальными параллельными плоскостями, имеющими постоянные разные температуры, исследуется в рамках модели Уильямсона. Выбор модели обусловлен тем, что, будучи предложенной для описания псевдопластического поведения, она, как впервые показано в [12], может эффективно использоваться для исследования неоднородных течений вязкопластичных сред. В частности, модель Уильямсона успешно применялась для изучения стационарной конвекции вязкопластичных жидкостей [12–15].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим вертикальный слой нелинейно-вязкой жидкости шириной  $2h$ , ограниченный твердыми идеально-теплопроводными границами. Температуры границ слоя:  $-\theta$  (слева) и  $+\theta$  (справа), то есть равновесный градиент температуры горизонтален. Координатную ось  $z$  направим вдоль слоя, ось  $x$  — поперек слоя, ось  $y$  — нормально к плоскости  $xz$ ; вдоль осей  $y$  и  $z$  слой бесконечен.

Выберем для описания реологического поведения жидкости модель Уильямсона:

$$\tau_{ij} = \left( \mu_{\infty} + \frac{A}{B + \sqrt{I}} \right) e_{ij}, \quad I = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}, \quad e_{ij} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь:  $\tau_{ik}$  — компоненты тензора вязких напряжений  $\tau$ ;  $e_{ik}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $I$  — второй инвариант тензора скоростей деформации;  $\mu_{\infty}, A, B$  — реологические параметры;  $U_i$  — компоненты вектора скорости течения жидкости  $U$ .

Модель Уильямсона описывает псевдопластическое поведение. Роль эффективной вязкости играет выражение  $\left( \mu_{\infty} + A / (B + \sqrt{I}) \right)$ , которое при малых скоростях деформации стремится к  $(\mu_{\infty} + A/B)$  и уменьшается с ростом скорости деформации, принимая при ее бесконечно большой величине значение  $\mu_{\infty}$  (параметр  $\mu_{\infty}$  обычно называют вязкостью при больших скоростях сдвига). При  $A = 0$  модель Уильямсона переходит в ньютоновскую модель, при этом эффективная вязкость становится постоянной и равняется  $\mu_{\infty}$ .

Уравнения свободной тепловой конвекции в приближении Буссинеска имеют вид [5]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{Gr}(U \nabla)U = -\nabla p + \text{div} \tau + T \gamma, \quad \text{div} U = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Gr}(U \nabla)T = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \quad (1)$$

где  $\nabla$  и  $\Delta$  — операторы градиента и Лапласа, а скобки обозначают скалярное произведение. Границы слоя — твердые, идеально теплопроводные, на них поддерживаются постоянные разные температуры:

$$x = \pm 1: \quad U = 0, \quad T = \pm 1. \quad (2)$$

Здесь:  $p$  и  $T$  — давление и температура в жидкости;  $\gamma$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Уравнения (1) и граничные условия (2) записаны в безразмерной форме. В качестве единиц измерения выбраны: для длины — полутолщина слоя  $h$ ; для времени —  $h^2 \rho / \mu_{\infty}$  ( $\rho$  — плотность жидкости); для скорости —  $g \beta \theta h^2 \rho / \mu_{\infty}$  ( $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — объемный коэффициент теплового расширения); для температуры —  $\theta$ ; для давления —  $g \beta \theta h \rho$ . Реологическое уравнение жидкости Уильямсона в безразмерной форме при принятом выборе единиц измерения принимает вид:

$$\tau_{ij} = \left( \frac{D}{b + \sqrt{I}} + 1 \right) e_{ij}. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) содержит четыре безразмерных параметра: число Грасхофа —  $Gr = g\beta\theta\rho^2 h^3 / \mu_\infty^2$ , число Прандтля —  $Pr = \mu_\infty / (\chi\rho)$  (где  $\chi$  — коэффициент теплопроводности) и два безразмерных реологических параметра  $D = A/g\beta\theta\rho h$  и  $b = B\mu_\infty/g\beta\theta\rho h$ . Безразмерная эффективная вязкость определяется выражением  $(1 + D/(b + \sqrt{I}))$ , при скорости деформации, стремящейся к нулю, она составляет  $(1 + D/b)$ . Безразмерная вязкость ньютоновской жидкости равняется единице. В дальнейшем, при анализе результатов, будут обсуждаться зависимости гидродинамических характеристик от параметра  $v = D/b$ , показывающего отклонение эффективной вязкости при нулевой скорости деформаций от соответствующего значения для ньютоновской жидкости (единицы), и от  $D$ . С помощью  $v$  удобно характеризовать нелинейно-вязкие свойства жидкости Уильямсона: так, при  $v \rightarrow 0$  ( $D \rightarrow 0$ ,  $b$  конечно или  $D$  конечно,  $b \rightarrow \infty$ ) модель (3) переходит в ньютоновскую; при больших  $v$  ( $D$  конечно,  $b \rightarrow 0$ ) модель (3) описывает вязкопластичную жидкость, где параметр  $D$  играет роль предельного напряжения сдвига, а  $b$  выступает в качестве регуляризационного параметра [12].

В рассматриваемой задаче (1)–(3) градиент температуры горизонтален, поэтому механическое равновесие не возможно, при любой разности температур возникает конвективное течение. Задача допускает стационарное решение  $\mathbf{U} = \{0, 0, u_0(x)\}$ ,  $p = p_0(x, z)$ ,  $T = T_0(x, z)$ , которое соответствует плоскопараллельному течению со скоростью  $u_0(x)$ . Подставляя решение в таком виде в уравнения, после некоторых преобразований получим соотношения для нахождения основного состояния жидкости:

$$-\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{D e_0}{b + |e_0|} \right) + \frac{\partial e_0}{\partial x} + T_0 = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad T_0 = x, \quad e_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \int_{-1}^1 u_0 dx = 0. \quad (4)$$

В основном состоянии температура имеет линейный профиль. Последнее уравнение в (4) определяет замкнутость конвективного потока.

Исключим давление и введем завихренность течения и функцию тока  $\Omega_0 = e_0 = \partial u_0 / \partial x$ ,  $u_0 = \partial \varphi_0 / \partial x$ . В терминах завихренности и функции тока задача (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{D \Omega_0}{b + |\Omega_0|} \right) + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2} + 1 = 0, \quad \Omega_0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, \quad x = \pm 1: \varphi_0 = 0. \quad (5)$$

В рассматриваемом случае одномерного течения завихренность имеет смысл скорости деформаций.

Задача (5) решалась численно, методом конечных разностей. Для реализации уравнения завихренности использовался метод последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на границах слоя вычислялись по формуле Тома  $\Omega_0|_\Gamma = 2(\varphi_0|_\Gamma - \varphi_0|_{\Gamma-1})/h_x^2$ , где  $h_x$  — шаг пространственной сетки. Проводились тестовые расчеты для четырех шагов пространственной сетки  $h_x$ : 1/50, 1/100, 1/150 и 1/200, которые показали сходимость решения с уменьшением шага сетки. Относительная разница между результатами, полученными для различных значений  $v$  и  $D$  при  $h_x = 1/150, 1/200$ , не превышает 5%. Все основные расчеты осуществлялись на пространственной сетке с шагом  $h_x = 1/150$ .

Перейдем к анализу устойчивости основного состояния. Запишем все поля в виде сумм основного состояния и малых возмущений (помечены индексом 1):  $\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1$ ,  $T_0 + T_1$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1$ ,  $p_0 + p_1$ . Линеаризованная задача для возмущений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + Gr(\mathbf{U}_0 \nabla) \mathbf{U}_1 + Gr(\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{U}_0 = -\nabla p_1 + \left( \frac{Db}{(b + |e_0|)^2} + 1 \right) \Delta \mathbf{U}_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Db}{(b + |e_0|)^2} \right) \left( \nabla u_{1x} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} \right) + T_1 \boldsymbol{\gamma}, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + Gr(\mathbf{U}_0 \nabla) T_1 + Gr(\mathbf{U}_1 \nabla) T_0 = \frac{1}{Pr} \Delta T_1, \quad \text{div} \mathbf{U}_1 = 0, \\ x = \pm 1: \mathbf{U}_1 = 0, \quad T_1 = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

здесь и далее индексы  $x$ ,  $y$  и  $z$  означают проекции векторных величин на оси координат.

Ограничимся обсуждением плоских возмущений, то есть предполагаем, что  $u_{1y} = 0$ , а  $u_{1x}$ ,  $u_{1z}$ ,  $T_1$ ,  $p_1$  не зависят от координаты  $y$ . Как показано в [5], в задаче исследования устойчивости течения в вертикальном слое ньютоновской жидкости такие возмущения наиболее опасны. Введем функцию тока возмущений и будем рассматривать нормальные возмущения, экспоненциально зависящие от времени и периодически изменяющиеся по вертикальной координате:

$$u_{1z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad u_{1x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \Psi = \varphi(x) \exp(ikz - \lambda t), \quad T_1 = \vartheta(x) \exp(ikz - \lambda t). \quad (7)$$

Здесь:  $\varphi(x)$ ,  $\vartheta(x)$  — амплитуды возмущений функции тока и температуры;  $\lambda$  — декремент возмущений;  $k$  — волновое число. Подставляя возмущения вида (7) в уравнения (6) и исключая давление, после преобразований получим систему уравнений и граничных условий для амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned} -\lambda \Omega &= (B_0 + 1)\Omega'' + 2B_0' \Omega' + (B_0'' - k^2(B_0 + 1))\Omega - ikGr u_0 \varphi'' + (ik^3 Gr u_0 + 2k^2 B_0'' + ikGr u_0'')\varphi - \vartheta', \\ -\lambda \vartheta &= \frac{1}{Pr} \vartheta'' - \left( \frac{k^2}{Pr} + ikGr u_0 \right) \vartheta - ikGr \varphi, \quad \Omega = \varphi'' - k^2 \varphi, \quad B_0 = \frac{Db}{(b + |e_0|)^2}, \\ x = \pm 1: \quad \varphi &= \varphi' = \vartheta = 0, \quad \Omega|_{\Gamma} = 2(\varphi|_{\Gamma} - \varphi|_{\Gamma-1})/h_x^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Задача устойчивости решалась численно. Уравнения и граничные условия (8) записывались в конечно-разностной форме, при этом все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, имеющими второй порядок точности. Для вычисления возмущений завихренности скорости  $\Omega$  на границе использовалась формула Тома.

Дискретизация (8) приводит к алгебраической задаче на собственные значения  $\lambda Cx = Ax$ , где  $A$  — комплексная матрица,  $C$  — единичная матрица,  $x$  — вектор-столбец неизвестных переменных:  $x = (\Omega, \varphi, \vartheta)$ . Решение алгебраической задачи на собственные значения дает выражение и для декремента полей возмущений:  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ . Нейтральные возмущения находятся из условия  $Re(\lambda) = 0$ . Для решения алгебраической задачи на собственные значения применялся пакет программ, разработанный Д.В. Любимовым, Т.П. Любимовой и В.А. Морозовым [16].

### 3. Основное течение

Основное плоскопараллельное течение описывается уравнениями (5) и при выбранном способе обезразмеривания не зависит от чисел Прандтля и Грасгофа. На рисунке 1 представлены профили скорости (Рис. 1а) и скорости деформации (завихренности) (Рис. 1б) для ньютоновской (кривая 1,  $\nu = 0$ ) и псевдопластической (кривая 2,  $\nu = 100$ ,  $D = 0,35$ ) жидкостей. При построении графиков значения скорости и завихренности нормировались на максимальные значения, приведенные в таблице 1.

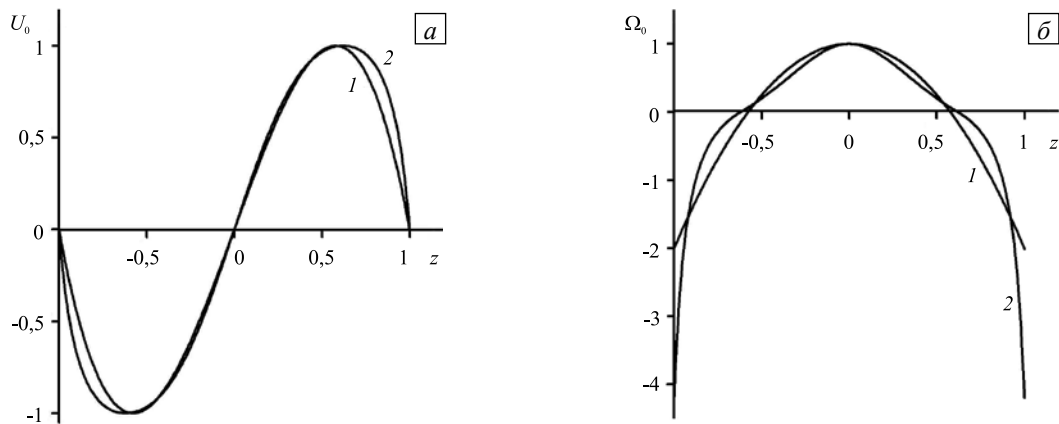


Рис. 1. Профили скорости (а) и скорости деформаций (завихренности) (б) стационарного течения для ньютоновской жидкости с  $\nu = 0$  (кривая 1) и псевдопластической жидкости с  $\nu = 100$ ,  $D = 0,35$  (2)

Таблица 1 Максимальные значения скорости  $U_{0\max}$  и значения завихренности  $\Omega_0$  при  $z=0$  для основного течения ньютоновской и псевдопластической ( $\nu=100$ ,  $D=0,35$ ) жидкостей

$\nu$	0	100
$U_{0\max}$	0,064143	0,001422
$\Omega_{0\max}$	0,166656	0,004078

Течение в слое имеет вид двух встречных потоков. При увеличении параметра  $\nu$  сдвиговое течение ньютоновской жидкости (см. Рис. 1, кривые 1), существенно замедляется и трансформируется в течение псевдопластической жидкости (кривые 2). Максимумы скорости смещаются к твердым стенкам, около которых возрастает скорость сдвига. Можно утверждать, что течение псевдопластической жидкости приобретает погранслоный характер. Далее будет исследована устойчивость плоскопараллельного стационарного течения, показанного на рисунке 1.

#### 4. Устойчивость течения

Обсудим результаты исследования устойчивости стационарного плоскопараллельно течения. Расчеты показали, что тип возмущений в случае псевдопластической жидкости, как и в случае ньютоновской жидкости, определяется числом Прандтля  $Pr$  (напомним, что будем рассматривать, согласно принятому ограничению, только плоские возмущения). При малых числах Прандтля, как и в случае ньютоновской жидкости, наиболее опасными являются гидродинамические монотонные возмущения, которые представляют собой вихри на границе двух встречных потоков жидкости. С повышением значения  $Pr$  наиболее опасными становятся колебательные возмущения, представляющие собой тепловые волны, распространяющиеся в потоке жидкости.

Число Грасгофа, введенное выше, установлено по вязкости при бесконечно большой скорости деформаций  $\mu_\infty$ . Для обсуждения влияния псевдопластических свойств жидкости на устойчивость основного течения по отношению к малым возмущениям удобно ввести модифицированное число Грасгофа  $G = g\beta\theta\rho^2h^3/(\mu_\infty + A/B)^2 = Gr/(1+\nu)^2$ , определяемое по вязкости при нулевой скорости деформаций.

На рисунке 2 показаны зависимости минимального критического значения модифицированного числа Грасгофа  $G_m$  от параметра  $\nu$  при различных значениях параметра  $D$  для монотонных и колебательных возмущений. Области параметров под кривыми соответствуют устойчивому течению жидкости. Монотонным модам отвечает  $Pr=1$ , а колебательным —  $Pr=100$ .

Из рисунка 2 видно, что с увеличением  $\nu$  при фиксированном  $D$  во всем исследованном диапазоне значений реологических параметров наблюдается монотонное уменьшение  $G_m$ , то есть имеет место снижение порога устойчивости основного течения. Это связано с тем, что возрастание  $\nu$  при постоянном значении  $D$  приводит к более интенсивному уменьшению эффективной вязкости с ростом скорости деформации. Этот результат качественно согласуется с данными, полученными в [9, 10] при рассмотрении аналогичной задачи для регуляризованной модели степенной псевдопластической жидкости. Рост параметра  $D$  при фиксированном  $\nu$ , как видно, приводит к повышению порога устойчивости стационарного течения, что объясняется увеличением эффективной вязкости жидкости при скорости сдвига, стремящейся к нулю. При  $\nu \rightarrow 0$ , когда жидкость Уильямсона близка к ньютоновской жидкости,

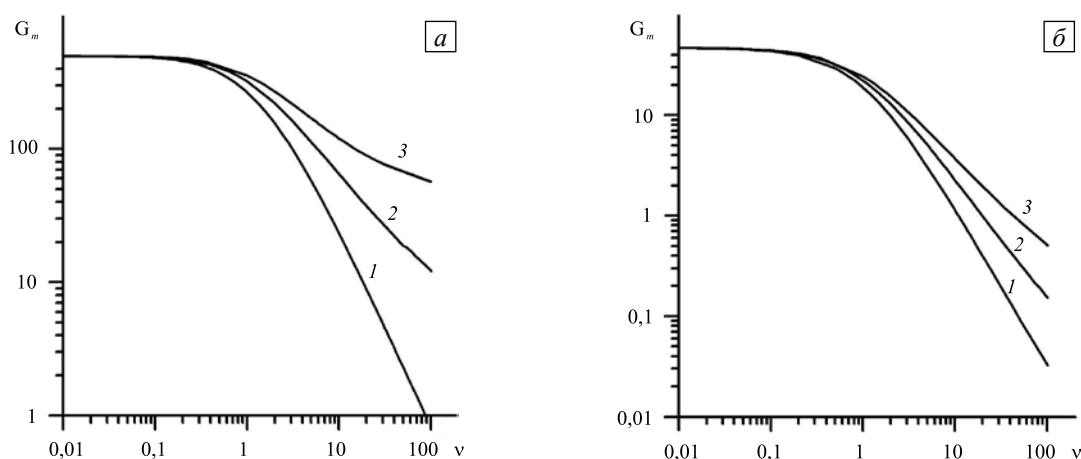
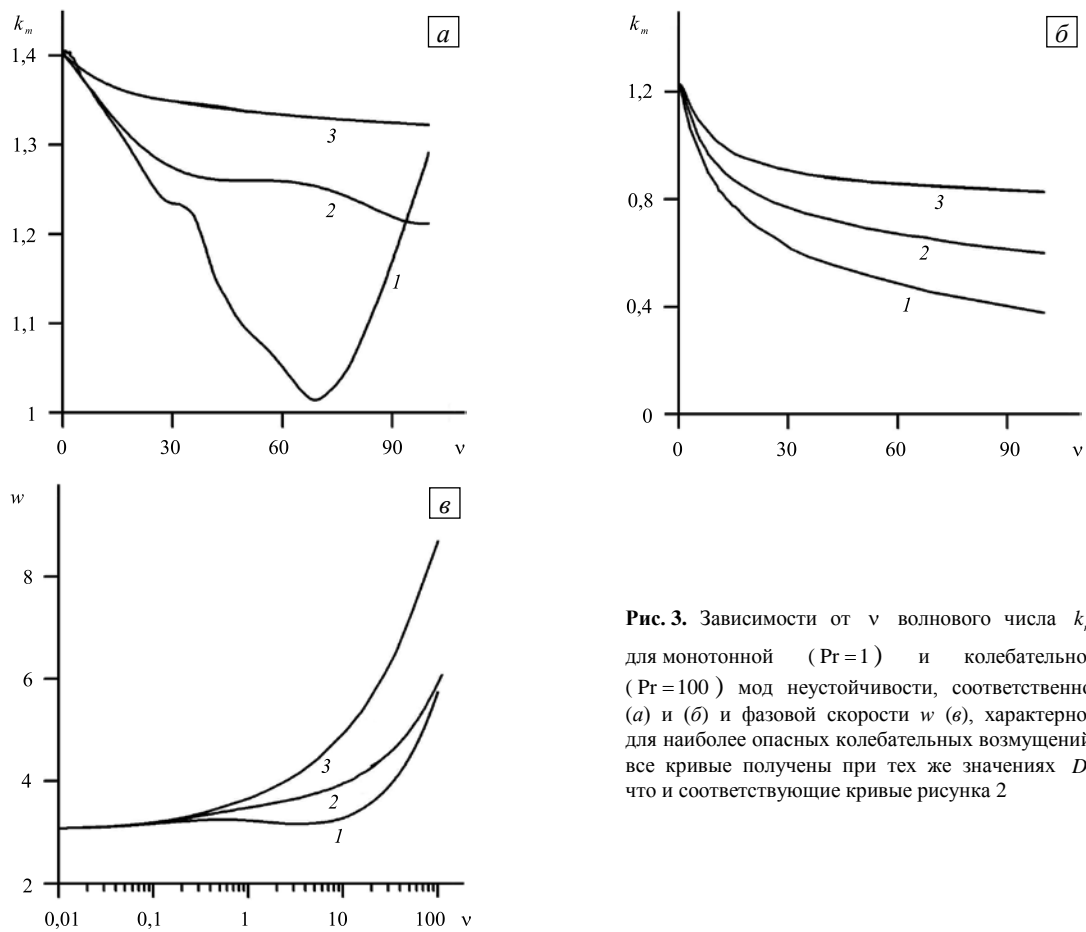


Рис. 2. Зависимость минимального критического значения модифицированного числа Грасгофа от параметра  $\nu$  для монотонной (а) и колебательной (б) мод неустойчивости при различных значениях  $D$ : 0,15 (кривая 1), 0,25 (2), 0,35 (3)

минимальное критическое значение модифицированного числа Грасгофа  $G_m$  и волновое число наиболее опасных возмущений  $k_m$  для монотонных и колебательных возмущений стремятся, соответственно, к 496,300, 1,404 и 46,85, 1,21, что согласуется с данными работы [5].

Для тепловых колебательных мод (Рис. 3б) при всех рассмотренных значениях  $D$  величина  $k_m$  монотонно уменьшается с ростом  $\nu$ . Зависимость фазовой скорости от  $\nu$  при  $D < 0,25$  (см. кривую 1, Рис. 3в) является немонотонной; при увеличении  $D$  немонотонность сглаживается (кривые 2 и 3 на Рис. 3в), и при  $D \geq 0,25$  зависимость фазовой скорости от параметра  $\nu$  становится монотонной. Немонотонность кривой 1 на рисунке 3а связана с изменением свойств жидкости. Как уже отмечалось выше, при увеличении параметра  $\nu$  в жидкости Уильямсона проявляются вязкопластичные свойства. Расчеты показали, что для обеих мод возмущений при  $D < 0,25$  существует диапазон значений  $\nu$ , в пределах которого происходит фазовый переход от псевдопластического к вязкопластичному состоянию. Ширина и границы этого диапазона определяются параметром  $D$ . В указанном диапазоне зависимости  $k_m$

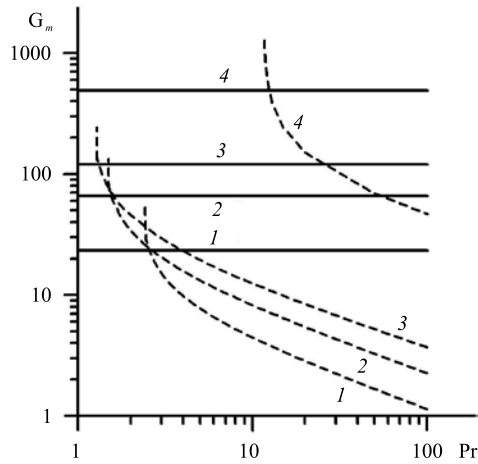


**Рис. 3.** Зависимости от  $\nu$  волнового числа  $k_m$  для монотонной ( $Pr = 1$ ) и колебательной ( $Pr = 100$ ) мод неустойчивости, соответственно, (а) и (б) и фазовой скорости  $w$  (в), характерной для наиболее опасных колебательных возмущений; все кривые получены при тех же значениях  $D$ , что и соответствующие кривые рисунка 2

от  $\nu$  носят немонотонный характер. В работе [17] показано, что в вертикальном слое при  $D \geq 0,25$  переход жидкости Уильямсона в вязкопластическое состояние сопровождается потерей текучести, и это состояние становится абсолютно устойчивым. Изучение течения в слое вязкопластичной жидкости и анализ устойчивости такого течения, характеризуемого большими  $\nu$ , на основании модели Уильямсона является предметом отдельного исследования и выходит за рамки данной работы. Причина немонотонности кривой 1 на рисунке 3в специально не изучалась.

На рисунке 4 представлены карты устойчивости основного течения на плоскости параметров  $G_m - Pr$  для  $\nu = 10$ . Сплошные линии соответствуют монотонным модам, штриховые линии — колебательным. Для сравнения на рисунке 4 приведены кривые 4, соответствующие ньютоновской жидкости  $D = 0$  [5].

Видно, что при малых значениях числа Прандтля неустойчивость определяется монотонными гидродинамическими возмущениями. При увеличении числа Прандтля наиболее опасными становятся тепловые колебательные моды. Значения модифицированного числа Грасгофа и числа Прандтля, соответствующие смене характера неустойчивости для рассмотренных значений параметра  $D$ , указаны в таблице 2. С увеличением  $D$  пороговое значение числа Прандтля  $Pr^*$ , соответствующего смене режима неустойчивости, уменьшается. Устойчивость течения с ростом  $D$ , как отмечалось выше, повышается.



**Рис. 4.** Карты устойчивости течения жидкости Уильямсона для монотонной (сплошные линии) и колебательной (штриховые линии) мод неустойчивости при  $\nu=10$  и различных значениях  $D$ : 0,15 (кривая 1), 0,25 (2), 0,35 (3); кривые 4 соответствуют ньютоновской жидкости

Для монотонной моды неустойчивости значения минимального критического модифицированного числа Грасгофа и волнового числа наиболее опасных возмущений слабо зависят от числа  $Pr$ . Значение  $k_m$  монотонных возмущений для всех рассмотренных значений  $D$  и  $\nu=10$  при  $Pr < 1$  сначала растет, достигая максимума, а затем начинает монотонно убывать, приближаясь к некоторому постоянному значению при  $Pr > 10$ . С ростом  $D$  значение  $k_m$  для монотонных возмущений увеличивается, а положение максимума смещается в область меньших  $Pr$ . Характерные значения  $G_m$  и  $k_m$  для различных  $Pr$  и  $D$  приведены в таблице 3.

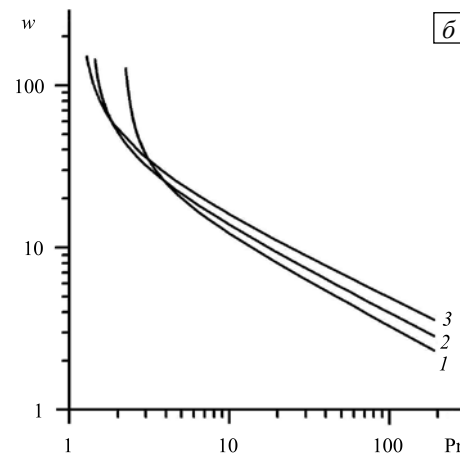
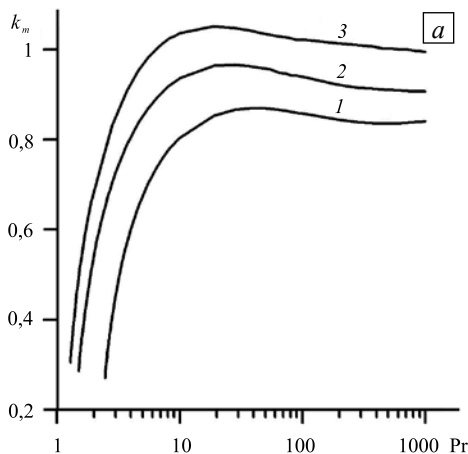
Расчеты показали, что при значениях числа Прандтля, близких к  $Pr^*$ , имеет место резкий рост числа  $G_m$  колебательных возмущений, сопровождающийся уменьшением  $Pr$ , и при достижении определенных малых значений числа Прандтля колебательные моды исчезают. С ростом  $Pr$  наблюдается монотонное уменьшение минимального критического модифицированного числа Грасгофа колебательных возмущений. Обработка результатов, полученных для разных значений параметра  $D$  (кривые 1–3 на рисунке 4), позволила заключить, что при  $Pr > 10$  минимальное критическое значение модифицированного числа Грасгофа убывает с ростом  $Pr$  по следующим законам:  $G_m = 16,69 \cdot Pr^{-0,585}$  (кривая 1),  $G_m = 28,98 \cdot Pr^{-0,555}$  (2),  $G_m = 40,66 \cdot Pr^{-0,522}$  (3).

Таблица 2. Значения чисел  $G_m^*$  и  $Pr^*$ , соответствующие смене типа неустойчивости течения

№	$D$	$G_m^*$	$Pr^*$
1	0,15	23,4	2,56
2	0,25	66,1	1,55
3	0,35	120,0	1,31
4	0	470,0	12,45

Таблица 3. Характерные значения минимального критического модифицированного числа Грасгофа и волнового числа наиболее опасных возмущений для монотонной моды неустойчивости

$D$	$Pr$	$G_m$	$k_m$
0,15	0,37	23,7	1,37
	1	23,4	1,34
	11	23,4	1,33
0,25	0,28	66,8	1,38
	1	66,1	1,36
	21	66,2	1,35
0,35	0,19	122	1,40
	1	120	1,37
	31	120	1,37



**Рис. 5.** Зависимость от числа Прандтля волнового числа (а) и фазовой скорости (б) наиболее опасных колебательных возмущений; обозначения кривых соответствуют рисунку 4

Зависимости от числа  $Pr$  волнового числа и фазовой скорости наиболее опасных возмущений для колебательных возмущений приведены на рисунке 5. Видно, что увеличение  $D$  приводит к росту  $k_m$ . В области малых значений  $Pr$  наблюдаются длинноволновые возмущения с большой фазовой скоростью. С увеличением числа Прандтля значение  $k_m$  растет, достигая максимума, а в области больших  $Pr$  волновое число выходит на постоянный уровень (см. Рис. 5а). Из рисунка 5б видно, что фазовая скорость наиболее опасных колебательных возмущений для всех рассмотренных  $D$  монотонно уменьшается с ростом числа  $Pr$ .

## 5. Заключение

Рассмотрено плоскопараллельное конвективное течение псевдопластической жидкости в бесконечном вертикальном слое, ограниченном твердыми, идеально теплопроводными границами. На границах слоя поддерживаются постоянные разные температуры. Реологическое поведение жидкости описывается моделью Уильямсона. Решение задачи исследования стационарного плоскопараллельного течения показало, что интенсивность и характер течения (форма профилей скорости и завихренности) существенно зависят от значений реологических параметров жидкости.

Исследована устойчивость стационарного плоскопараллельного течения жидкости относительно плоских малых нормальных возмущений (в случае ньютоновской жидкости именно такие возмущения являются наиболее опасными). Найдено, что как и в случае ньютоновской жидкости, имеются две моды неустойчивости: гидродинамическая монотонная и тепловая колебательная. Монотонная мода существует при всех значениях числа Прандтля. Колебательная мода при малых значениях числа Прандтля исчезает.

Получены зависимости от реологических параметров жидкости минимального критического значения числа Грасгофа, обуславливающего порог устойчивости течения. Найдено, что с усилением псевдопластических свойств жидкости минимальное критическое число Грасгофа для обеих мод возмущений монотонно уменьшается. Построены карты устойчивости течения на плоскости параметров  $G_m - Pr$  для четырех значений реологического параметра  $D$ . Показано, что в широком диапазоне чисел Прандтля наиболее опасными являются колебательные тепловые возмущения. При малых значениях числа Прандтля за неустойчивость ответственны монотонные гидродинамические возмущения. Пороговое значение числа Прандтля, определяющее смену режима неустойчивости, уменьшается с ростом параметра  $D$ . Увеличение  $D$  приводит к существенному повышению устойчивости течения относительно обоих типов возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-21-00090).

## Литература

1. Любимова Т.П. О конвективных движениях неньютоновской жидкости в замкнутой полости, подогреваемой снизу // МЖГ. – 1974. – № 2. – С. 181-184. DOI
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями // Известия ВУЗов. Физика. – 1958. – № 4. – С. 43-47.
3. Рудаков Р.Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными плоскостями. // ПММ. – 1966. – Т. 30, № 2. – С. 362-368. DOI
4. Бирих Р.В., Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Рудаков Р.Н. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале // ПММ. – 1972. – Т. 36, № 4. – С. 745-748. DOI
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 318 с.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Шихов В.М. Об устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры // ТВТ. – 1975. – Т. 13, № 4. – С. 771-778.
7. Stengel K.C., Oliver D.S., Booker J.R. Onset of convection in a variable-viscosity fluid // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 120. – P. 411-431. DOI
8. Chen Y.-M., Pearlstein A.J. Stability of free-convection flows of variable-viscosity fluids in vertical and inclined slots // J. Fluid Mech. – 1989. – Vol. 198. – P. 513-541. DOI
9. Семакин И.Г. Гидродинамическая устойчивость конвективного течения неньютоновской жидкости в вертикальном слое // Инженерно-физический журнал. – 1977. – Т. 32, № 6. – С. 1065-1070. DOI
10. Семакин И.Г. Колебательная неустойчивость стационарной конвекции неньютоновской жидкости // Инженерно-физический журнал. – 1978. – Т. 35, № 2. – С. 320-325. DOI
11. Субботин Е.В., Труфанова Н.М., Щербинин А.Г. Численное исследование течений полимерных жидкостей в канале шнекового экструдера на основе одно- и двухмерных моделей // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 452-460. DOI
12. Любимова Т.П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области // МЖГ. – 1977. – № 1. – С. 3-8. DOI
13. Любимова Т.П. О конвективных движениях вязкопластичной жидкости в прямоугольной области // МЖГ. – 1979. – № 5. – С. 141-144. DOI
14. Любимова Т.П. О стационарных решениях уравнений конвекции вязкопластичной жидкости, подогреваемой снизу, при учете температурной зависимости реологических параметров // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1986. – № 1. – С. 91-96.



15. Перминов А.В., Шулепова Е.В. Воздействие высокочастотных вибраций на конвективное движение неньютоновской жидкости // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – Т. 3, № 129. – С. 169-175.
16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Morozov V.A. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows // Вестник ПГУ. Информационные системы и технологии. – 2001. – № 5. – С. 74-81.
17. Перминов А.В. Устойчивость жесткого состояния обобщенной ньютоновской жидкости // МЖГ. – 2014. – Т. 49, № 2. – С. 6-15. DOI

## References

1. Lyubimova T.P. Convection of non-Newtonian liquids in closed cavities heated from below. *Fluid Dyn.*, 1974, vol. 9, no. 2, pp. 319-322. DOI
2. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. O dvukh tipakh neustoichivosti konvektivnogo dviganiya meghdu parallel'nymi vertikal'nymi ploskostyami [On two types of instability of convective motion between parallel vertical planes]. *Izvestiya VUZov. Fizika – Russian Physics Journal*, 1958, no. 4, pp. 43-47.
3. Rudakov R.N. On small perturbations of convective motion between vertical parallel planes. *J. Appl. Math. Mech.–USS.*, 1967, vol. 30, no. 2, pp. 439-445. DOI
4. Birikh R.V., Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Rudakov R.N. On oscillatory instability of plane-parallel convective motion in a vertical channel. *J. Appl. Math. Mech.–USS.*, 1972, vol. 36, no. 4, pp. 707-710. DOI
5. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Nepomnyaschy A.A. *Ustoichivost konvektivnykh techenij* [Stability of convective flows]. Moscow: Nauka, 1989. 318 p.
6. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. Shihov V.M. Ob ustoichivosti konvektivnogo techeniya zhidkosti s вязкостью, zavisyashei ot temperatury [On the stability of convective flow of fluid with a viscosity depending on the temperature]. *Teplotfizika vysokih temperatur – High Temperature*, 1975, vol. 13, no. 4, pp. 771-778.
7. Stengel K.C., Oliver D.S., Booker J.R. Onset of convection in a variable-viscosity fluid. *J. Fluid Mech.*, 1982, vol. 120, pp. 411-431. DOI
8. Chen Y.-M., Pearlstein A.J. Stability of free-convection flows of variable-viscosity fluids in vertical and inclined slots. *J. Fluid Mech.*, 1989, vol. 198, pp. 513-541. DOI
9. Semakin I.G. Hydrodynamic stability of convective flow of a non-Newtonian fluid in a vertical layer. *Journal of Engineering Physics*, 1977, vol. 32, no. 6, pp. 690-693. DOI
10. Semakin I.G. Vibrational instability of stationary convection of a non-Newtonian fluid. *Journal of Engineering Physics*, 1978, vol. 35, no. 2, pp. 969-972. DOI
11. Subbotin E.V., Trufanova N.M., Shcherbinin A.G. Numerical study of polymer fluid flows in the channel of a screw extruder using one- and two-dimensional models. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 452-460. DOI
12. Lyubimova T.P. Numerical investigation of convection in a viscoplastic liquid in a closed region. *Fluid Dyn.*, 1977, vol. 12, no. 1, pp. 1-5. DOI
13. Lyubimova T.P. Convective motions of a viscoplastic fluid in a rectangular region. *Fluid Dyn.*, 1979, vol. 14, no. 5, pp. 747-750. DOI
14. Lyubimova T.P. O stacionarnykh resheniyakh uravnenij konveksii vyazkoplastichnoi zhidkosti, podogrevaemoj snizu, pri uchete temperaturnoj zavisimosti reologicheskikh parametrov [On steady solutions of the equations of convection of visco-plastic fluid heated from below with temperature-dependent rheological parameters]. *Izvestiya AN BSSR, Fiziko-Matematicheskie Nauki – Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences*, 1986, no. 1, pp. 91-96.
15. Perminov A.V., Shulepova E.V. Vozdeistvie vysokochastotnykh vibratsij na konvektivnoe dvizhenie nen'yutonovskoj zhidkosti [Influence of high-frequency vibrations on convective motion of non-Newtonian fluid]. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2011, vol. 3, no. 129, pp. 169-175.
16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Morozov V.A. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows. *Vestnik PGU. Informacionnye sistemy i tehnologii – Bulletin of Perm State University. Information Systems and Technologies*, 2001, no. 5, pp. 74-81.
17. Perminov A.V. Stability of the rigid state of a generalized Newtonian fluid. *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 2, pp. 140-148. DOI

Поступила в редакцию 26.05.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014

## Сведения об авторах

Перминов Анатолий Викторович, кфмн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский пр., д. 29; e-mail: perminov1973@mail.ru

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф., зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: lyubimovat@mail.ru