

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.3.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.24)
УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

И.Г. Емельянов^{1,2}, А.В. Кузнецов¹

¹ *Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация*

² *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация*

В работе для описания поведения оболочки используется классическая теория, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява. Предложен подход, который позволяет аппроксимировать модельные уравнения с учетом произвольной внешней нагрузки. При определении напряженного состояния изотропных и ортотропных оболочек вращения от действия локальных нагрузок используются предложенные так называемые виртуальные элементы и метод разложения в ряды Фурье. Приводятся результаты вычислений для оболочек, нагруженных локальными механическими нагрузками различного вида. Проведено сопоставление напряженного состояния, полученного с применением виртуальных элементов, и рассчитанного с использованием метода конечных элементов. Расчеты показали, что применение виртуального оболочечного элемента и предложенное разложение нагрузки в ряд Фурье позволяют понизить размерность задачи на единицу. При этом обеспечивается достаточно высокая точность аппроксимации внешней нагрузки, а следовательно, и вычисленных характеристик напряженного состояния изотропных и ортотропных оболочек вращения.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, локальная нагрузка, напряженное состояние, виртуальный элемент, ряд Фурье, метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова

APPLICATION OF VIRTUAL ELEMENTS FOR DETERMINATION OF STRESS STATE OF ROTATIONAL SHELLS

I.G. Emel'yanov^{1,2} and A.V. Kuznetsov¹

¹ *Institute of Engineering Science UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation*

² *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

In the present work, to describe the behavior of the shell, the classical theory based on the Kirchhoff–Love hypotheses is used. An approach is proposed which allows us to approximate model equations, taking account of any external loads. Virtual elements and expansion in Fourier's series are applied to determine the stress state of isotropic and orthotropic rotational shells under local loading conditions. Calculation results for shells subjected to different types of local mechanical loads are presented. Comparison of the stress state obtained using virtual elements and that calculated by the finite elements method is carried out. Calculations indicate that the application of the concept of a virtual shell element and the decomposition of loading in Fourier's series make it possible to reduce the dimensionality of the problem by 1. In addition, the high accuracy of approximation of external loads and the characteristics of the stress state of isotropic and orthotropic rotational shells is provided.

Key words: orthotropic rotational shells, stress state, virtual element, Fourier's series, local loading, Godunov's method of discrete orthogonalization

1. Введение

Одной из основных проблем механики деформируемого твердого тела является построение методов, позволяющих эффективно и точно оценивать напряженное состояние разного рода конструкций и их элементов. Среди них довольно часто встречаются тонкостенные. Для описания поведения подобных объектов, как правило, прибегают к различным теориям оболочек. Появившиеся в последнее время коммерческие вычислительные программы, основанные на этих теориях и процедуре метода конечных элементов (МКЭ), сводящей исходную дифференциальную задачу к алгебраической, позволяют решать широкий круг прикладных задач для оболочечных конструкций. Таким образом, задача определения напряженного состояния оболочки, возникающего от действия механической нагрузки, может быть реализована даже в геометрически и физически нелинейной постановке. Приложение этих программ к исследованию оболочек вращения при произвольной механической нагрузке подразумевает построение двумерной поверхности оболочки и соответствующей постановки задачи, а следовательно, требует больших вычислительных ресурсов [1]. При осевой симметрии задачи один из путей понижения ее размерности на единицу с сохранением необходимой точности — это разложение искомых функций в ряды Фурье по окружной координате, приводящее к разделению переменных. Последующее использование численного метода решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, например метода дискретной ортогонализации С.К. Годунова [2], делает возможным интегрирование уравнения оболочек по образующей (меридиану) [3–5].

В данной работе предложен подход, который позволяет аппроксимировать произвольную внешнюю нагрузку, а численно-аналитическое сведение задачи к одномерной [3] дает возможность определять напряженное состояние оболочек вращения. Внешняя механическая нагрузка может быть заранее задана или устанавливается в процессе решения, например, контактной задачи.

Преимущество предлагаемой методики особенно проявляется при расчете напряженного состояния оболочек, находящихся под действием сосредоточенных или сильно локализованных нагрузок. Известно, что эти задачи относятся к числу особых задач для тонкостенных конструкций [6–9]. Методы их решения можно условно разделить на аналитические [7], численно-аналитические [3], и численные [10]. Обширная библиография (более тысячи публикаций), отражающая подходы и результаты на основе аналитических методов, содержится в работе [9]. Эти методы развивались главным образом в конце прошлого века. Работ с использованием численно-аналитических методов [5, 11, 12] имеется к настоящему времени значительно меньше, чем работ, посвященных численным методам. Среди последних наиболее универсальным считается метод конечных элементов — МКЭ, приложения которого хорошо представлены в литературе. Так, в работе [10] приводятся результаты расчета оболочки, нагруженной сосредоточенной силой, полученные аналитическим методом и МКЭ с использованием различных типов конечных элементов. Показано, что численный метод дает несколько большее значение прогиба в точке приложения силы. Нахождение распределения напряжений от действия сосредоточенной силы методом конечных элементов не составляет труда, так как напряжения при этом принимают конечные значения. Точный же аналитический метод приводит к выражению, согласно которому напряжение в точке действия сосредоточенной силы бесконечно (решение Фламана для плоской задачи и решение Буссинеска для пространственной задачи [13]). Различие в величине прогиба и напряжения связано с тем, что численный метод усредняет искомое значение функции. Чтобы найти приемлемое значение этой функции, необходимо сгущать сетку.

Таким образом, при решении задач с помощью МКЭ даже в двумерной постановке приходится иметь дело с системой линейных алгебраических уравнений большого порядка и занимать большой объем оперативной памяти компьютера. Предлагаемый в данной работе подход свободен от этого условия. Его преимущество состоит в том, что исключается необходимость хранить матрицу жесткости оболочки и решать систему линейных алгебраических уравнений большого порядка. Требуется запоминание информации о решении только в точках ортогонализации, которых, как правило, меньше, чем точек интегрирования уравнений оболочки. С вычислительной точки зрения это проявляется в сокращении общего времени вычислений и экономии вычислительных ресурсов.

2. Постановка задачи

Координатную поверхность оболочки, получаемой вращением образующей вокруг оси z , отнесем к криволинейной ортогональной системе координат s, θ , где s — длина дуги меридиана, θ — центральный угол в сечении радиуса $r(s)$, перпендикулярном оси вращения. В общем случае оболочка может быть слоистой и ортотропной. Для описания ее поведения воспользуемся классической теорией, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Следовательно, задача определения напряженного состояния геометрически и физически линейной оболочки с переменными вдоль образующей параметрами сводится к системе уравнений вида [3, 4]

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 \mathbf{A}_m(s) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta), \quad (1)$$

$$\bar{Y} = \{N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s\},$$

где N_r, N_z — радиальное и осевое усилия; u_r, u_z — радиальное и осевое перемещения; \hat{S} — сдвигающее усилие; M_s — меридиональный изгибающий момент; v — окружное перемещение; ϑ_s — угол поворота нормали к поверхности оболочки. Элементы матрицы \mathbf{A}_m зависят от геометрических и механических характеристик оболочки, компоненты вектора \bar{f} — от поверхностных нагрузок.

Жесткостные характеристики слоев C_{mp}, K_{mp}, D_{mp} n -слойной оболочки, входящие в соотношения упругости, находятся через упругие постоянные B_{mp}^i и толщины отдельных слоев следующим образом [3, 4]:

$$C_{mp} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{mp}^i d\gamma, \quad K_{mp} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{mp}^i \gamma d\gamma, \quad D_{mp} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{mp}^i \gamma^2 d\gamma,$$

где координата γ отсчитывается по нормали к координатной поверхности оболочки. Для ортотропного материала имеем $B_{11} = \frac{E_s}{1 - \nu_s \nu_\theta}$, $B_{12} = \frac{\nu_s E_\theta}{1 - \nu_s \nu_\theta} = \frac{\nu_\theta E_s}{1 - \nu_s \nu_\theta}$, $B_{22} = \frac{E_\theta}{1 - \nu_s \nu_\theta}$, $B_{66} = G_{s\theta}$, где E_s , E_θ — модули упругости в направлении s , θ ; ν_s , ν_θ — коэффициенты Пуассона; $G_{s\theta}$ — модуль сдвига в плоскости, касательной к координатной поверхности.

Поскольку рассматриваются замкнутые в окружном направлении оболочки вращения, то все параметры нагрузки и напряженно-деформированного состояния являются периодическими. В силу периодичности компонент поверхностной нагрузки все используемые функции, определяющие состояние оболочки можно разложить в ряды Фурье по окружной координате θ . Ввиду громоздкости формул [3] приведем здесь только разложение компоненты внешней распределенной нагрузки, действующей по нормали q_γ к координатной поверхности оболочки:

$$q_\gamma(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{\gamma k}(s) \cos k\theta. \quad (2)$$

Таким образом, с учетом разложения (2) система (1) в частных производных сводится к ряду систем обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка в нормальной форме [3, 4]

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Y}}{ds} &= A_k(s) \bar{Y}_k + \bar{f}_k(s) \quad (k=0, 1, 2 \dots), \\ A_k(s) &= \left\| a_{ij}^{(k)}(s) \right\| \quad (i, j=1, \dots, 8; s_0 \leq s \leq s_L), \quad \bar{f}_k = \{f_{1k}, \dots, f_{8k}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

с граничными условиями на левом ($s = s_0$) и правом ($s = s_L$) торцах оболочки $\mathbf{B}_1 \bar{Y}(s_0) = \bar{\mathbf{b}}_1$, $\mathbf{B}_2 \bar{Y}(s_L) = \bar{\mathbf{b}}_2$. Здесь \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 — заданные прямоугольные матрицы размерностью 4×8 с элементами 0 или 1, позволяющие задавать граничные условия в виде разрешающих функций; \bar{f}_k (k — номер гармоники), $\bar{\mathbf{b}}_1$, $\bar{\mathbf{b}}_2$ — заданные векторы, определяющие внешнее нагружение оболочки и необходимые граничные условия. Формулы для вектора $\bar{f}(s)$ ввиду громоздкости не приводятся. Отметим, что в общем случае на оболочку могут действовать поверхностные нагрузки и моменты q_s , q_θ , q_γ , m_s , m_θ , отнесенные к координатной поверхности [3, 4].

3. Метод решения задачи

В прикладных задачах гладкая поверхность оболочки может быть нагружена либо избыточным внутренним давлением, либо внешними усилиями контактного взаимодействия с другими телами. Следовательно, если не учитывать силы трения в контактных задачах, то любая механическая нагрузка сводится к нормальной распределенной нагрузке q_γ с тем или иным знаком (в дальнейшем индекс γ опускается).

Если известно, что внешняя нагрузка является равномерно распределенной по меридиональной координате s и плавно изменяется по окружной координате θ , то задача решается разработанным методом [3]. Однако при нормальной нагрузке q , распределенной по окружности в виде сильно локализованных сил, а также в случае нахождения нагрузки в процессе решения, например, в контактных задачах, определение напряженного состояния оболочки известными методами затруднительно. Поскольку распределение нормальной контактной нагрузки q_c и область ее приложения не известны, то уравнения (1) для контактных задач принимают вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial s} &= \sum_{m=0}^4 A_m(s) \frac{\partial^m \bar{Y}}{\partial \theta^m} + \bar{f}(s, \theta) + \lambda \mathbf{E} \bar{q}_c(s, \theta), \\ \bar{q}_c &= \{q_c, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T, \\ \lambda(s, \theta \in \Omega) &= 1, \quad \lambda(s, \theta \notin \Omega) = 0, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} — единичная матрица, Ω — область контакта. Данная система в частных производных с учетом разложения вида (2) также может быть сведена к ряду систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме восьмого порядка.

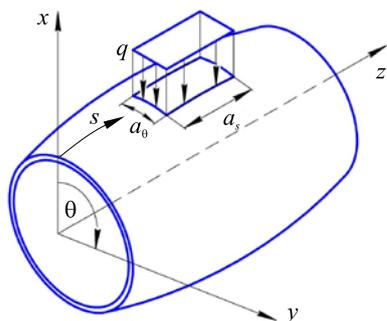


Рис. 1. Оболочка, деформируемая локализованной нагрузкой q , распределенной на виртуальном элементе

кольца разобьем по углу θ на участки с постоянным значением внешней нагрузки q . Следовательно, область Ω_p будет покрыта криволинейной сеткой. На рисунке 1 показан виртуальный оболочечный элемент размерами $a_0 \times a_s$, где a_0 — длина дуги окружности, соответствующей углу $\Delta\theta$; размеры элемента зависят от степени локализации заданной внешней нагрузки P . Например, при решении контактных задач для тонких цилиндрических оболочек известен эффект образования сосредоточенных сил на границе области контакта [6], и следовательно, размер элемента, соотносящийся с угловой координатой, должен быть минимально возможным. Однако исходя из внутренней логики теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, для корректного определения напряженного состояния оболочки линейные размеры элемента должны превышать толщину оболочки, то есть

$$a_s, a_0 \geq h. \quad (4)$$

Следовательно, для нахождения напряженного состояния оболочки необходимо внешнюю нормальную нагрузку аппроксимировать на сетке виртуальных элементов с необходимой точностью.

Если для любого кольца длиной a_s известен закон распределения локальных нагрузок q и их значения, то для интегрирования уравнения (3) выражение, описывающее суммарную нагрузку, может быть представлено в виде разложения в ряд Фурье согласно (2). При условии симметрии нагрузки q относительно оси x аппроксимирующая нагрузка будет четной. Поскольку функция нагрузки, известная на множестве виртуальных элементов, периодическая (с периодом $2N$) и четная, то ее можно разложить в ряд Фурье по косинусам [17]

$$q_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (5)$$

где коэффициенты имеют вид

$$a_k = \frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} q_i + \sum_{i=1}^{N-1} q_i \cos \frac{\pi k}{N} i + \frac{1}{2} (-1)^k q_N \right], \quad (6)$$

$$b_k = 0.$$

Таким образом, записав произвольную внешнюю механическую нагрузку в виде ряда Фурье (5) и проинтегрировав систему уравнений оболочки (3) с ортогонализацией по С.К. Годунову, найдем напряженно-деформированное состояние оболочки вращения, нагруженной на выделенном кольце. В результате аналогичных действий на следующих кольцах установим НДС во всей оболочке. Разложение в ряд Фурье с коэффициентами (6) неоднократно применялось для определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций, находящихся в контактом взаимодействии [4, 14, 15].

4. Численный пример для ортотропной оболочки с одиночным виртуальным элементом

Рассмотрим задачу для однослойной ортотропной оболочки, показанной на рисунке 1. На оболочку, имеющую внешний радиус $R = 1,60$ м, длину $L = 2,24$ м, толщину $h = 0,006$ м, действует внешняя нагрузка

Для решения таких задач, по аналогии с контактным элементом, который используется при решении контактных задач и на котором принимается постоянное значение контактного давления [14, 15 и другие], введем понятие виртуального оболочечного элемента, на котором значение внешней нормальной нагрузки будем считать постоянным [16]. Допустим, что на оболочку толщиной h действует внешняя механическая нагрузка, главный вектор которой равняется P . Выделим область поверхности оболочки Ω_p в месте предполагаемого приложения нагрузки. Затем разделим длину дуги меридиана на отрезки и расsection оболочку по их концам перпендикулярными оси вращения плоскостями. Получим на поверхности ряд колец. Дугу окружности на поверхности каждого

$P = 1000$ Н, которая равномерно распределена на виртуальном элементе размером $a_0 \times a_s$. Модули упругости и сдвига, коэффициент Пуассона материала оболочки имеют следующие значения: $E_s = 4,65 \cdot 10^4$ МПа; $E_\theta = 0,7 \cdot 10^4$ МПа; $G_{s\theta} = 0,7 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_s = 0,25$. Положим, что торцы оболочки имеют неподвижное шарнирное закрепление. Нагрузка приложена на элементе, размеры которого $0,0558 \times 0,24$ м, находящемся на поверхности кольца, равноудаленного от торцов оболочки. Представим нагрузку в виде разложения в ряд Фурье с коэффициентами [14, 15]

$$a_0 = \frac{P}{\pi R a_s}, \quad a_k = \frac{2P \sin(k\Delta\theta/2)}{\pi R a_s k \Delta\theta}, \quad b_k = 0. \quad (7)$$

В выражениях для коэффициентов (7) $\Delta\theta$ — угол, который соответствует стороне a_0 виртуального элемента. Для данной задачи примем $\Delta\theta = 2^\circ$ или $\Delta\theta = 0,0349$ рад.

На рисунке 2 продемонстрировано изменение u_r — радиального перемещения поверхности оболочки, в зависимости от угла θ в сечении с криволинейной координатой $s = 1,12$ м. Поскольку внешняя нагрузка нормальна к поверхности оболочки и симметрична относительно оси x , то рассматривается только половина длины окружности оболочки ($0 < \theta < \pi$). При этом количество гармоник в (5) равняется $k = 130$. Кривая 1 получена при помощи предлагаемой методики, кривая 2 соответствует решению в конечно-элементном пакете ANSYS [18]. При использовании ANSYS количество конечных элементов по окружности, для удобства задания нагрузки, увеличено до 360. В итоге модель состояла из 17900 конечных элементов типа shell 181 [18].

Рисунок 3 содержит изменение радиального перемещения u_r в точке $\theta = 0$ для различных значений шага $\Delta\theta$. При уменьшении $\Delta\theta$ в коэффициенте a_k выражения (7) и увеличении количества суммируемых гармоник k в выражении (5) нагрузка по координате θ стремится к сосредоточенной силе. Исходя из соотношения (4) для данной задачи можно найти минимальное значение $\Delta\theta$, для которого корректно должно определяться напряженное состояние оболочки в рамках гипотез Кирхгофа–Лява в области приложения нагрузки. Для данной задачи $\Delta\theta \geq 0,22^\circ$ или $\Delta\theta \geq 0,0038$ рад. Удастся получить решение для $\Delta\theta = 0,5^\circ$. Как отмечено выше, преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что шаг разбиения по координате θ не связан с шагом интегрирования уравнений (3) по координате s .

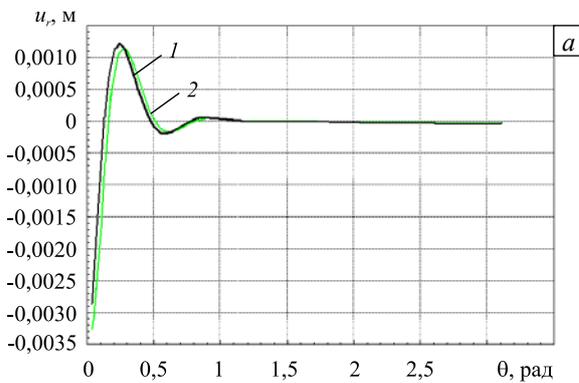


Рис. 2. Радиальное перемещение u_r в зависимости от окружной координаты: решение с использованием рядов Фурье (кривая 1); решение в пакете ANSYS (2)

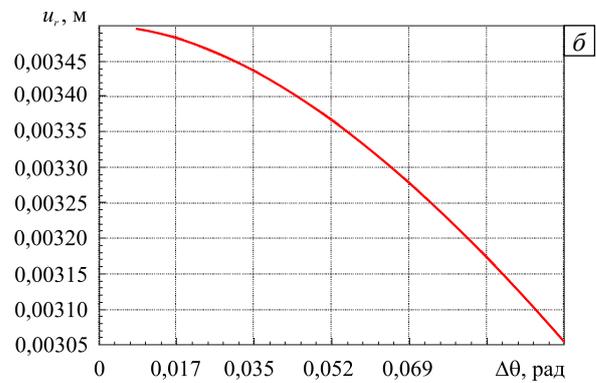


Рис. 3. Изменение радиального перемещения u_r в $\theta = 0$ в зависимости от величины шага по углу θ

На рисунке 4 показано распределение меридионального (σ_s) и окружного (σ_θ) напряжений на внутренней и наружной поверхностях оболочки. Напряжения приводятся в сечении с координатой $s = 1,12$ м. Кривые 3 и 4 соответствуют конечно-элементному расчету напряженного состояния оболочки в пакете ANSYS.

Из анализа кривых на рисунках 2 и 4 можно сделать вывод, что предлагаемая методика решения с разложением нагрузки в ряды Фурье и метод конечных элементов дают близкие результаты для характеристик напряженно-деформированного состояния в случае нагрузки, приложенной на виртуальном элементе. Время счета по предлагаемой методике на порядок меньше, чем при помощи ANSYS.

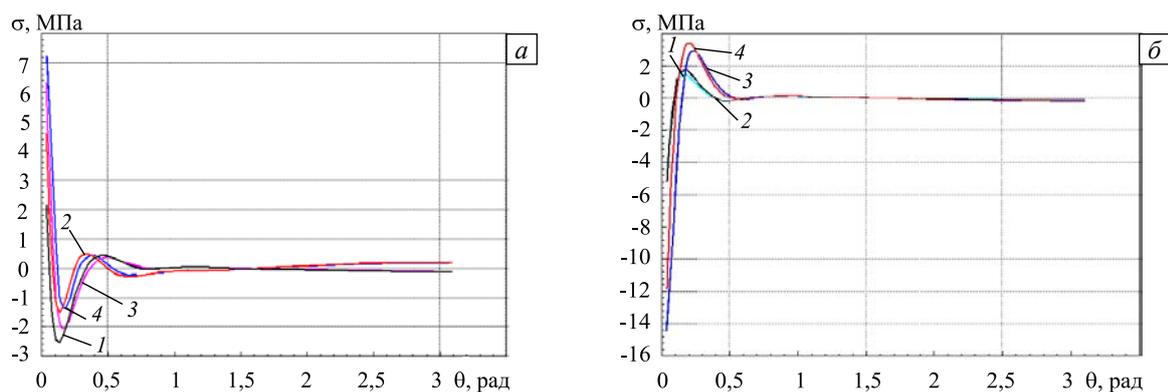


Рис. 4. Распределение меридионального σ_s (кривые 1, 3) и окружного σ_θ (2, 4) напряжений (МПа) на внутренней (а) и внешней (б) поверхностях оболочки в зависимости от угловой координаты θ : кривые 1, 2 – решение в рядах Фурье, 3, 4 – решение с использованием ANSYS

5. Численный пример для изотропной оболочки

На практике возникает необходимость в определении напряженного состояния оболочек от нагрузки, приложенной на множестве виртуальных элементов. В качестве примера рассмотрим деформирование изотропной оболочки, лежащей на несплошном основании (Рис. 5). Данная задача описывает случай передачи нагрузки от котла вагона-цистерны на лежневые опоры.

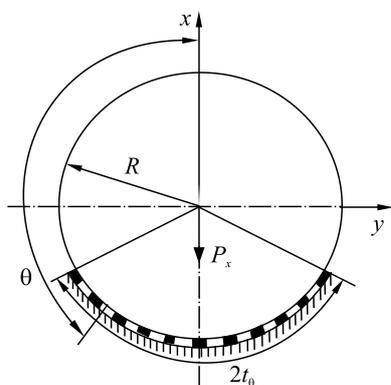


Рис. 5. Расчетная схема цилиндрической оболочки, лежащей на основании

В результате решения этой контактной задачи в работе [19] было получено распределение контактного давления q_c , действующего на оболочку. Для того чтобы найти напряженное состояние оболочки котла вагона от нагрузки q_c , применим описанную выше методику. Представим контактное давление q_c в виде разложения в ряд Фурье q_f (5) с коэффициентами (6). Такая аппроксимация позволяет разделить переменные и определить, по аналогии с разделом 4, напряженно-деформированное состояние оболочки от нагрузки, приложенной на множестве виртуальных элементов.

При расчете принималось: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, значение вертикальной компоненты главного вектора нагрузки $P_x = 45 \cdot 10^4$ Н. Остальные исходные данные и граничные условия были теми же, что и в предыдущем примере.

На рисунке 6 показано распределение контактного давления в оболочке, возникающего от взаимодействия с несплошным жестким основанием (результат из [19]). Горизонтальная ось изображает область контакта, ее протяженность определяется углом θ . Естественно, что при таком нагружении оболочки контактное давление симметрично относительно плоскости, проходящей через ось вращения оболочки и имеющей угловую координату $\theta = 180^\circ$.

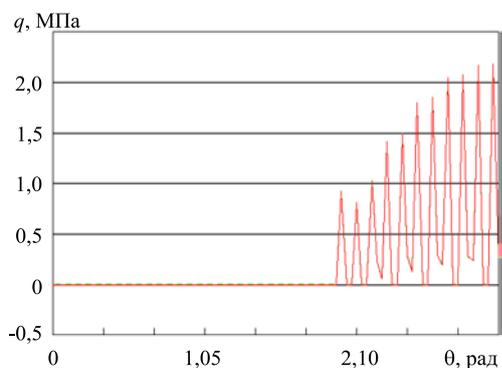


Рис. 6. Аппроксимация контактного давления q для случая взаимодействия оболочки с несплошным жестким основанием

На рисунке 6 сплошная линия представляет распределение контактного давления q_c на половине длины окружности оболочки (от 0 до π). Штриховая линия изображает нагрузку q_f , вычисленную по методике с представлением в виде разложения в ряд Фурье с коэффициентами разложения (6). При этом количество гармоник в (5) равно $k = 90$. Из рисунка видно, что кривые практически совпадают. Относительная ошибка δ , вычисленная как $\delta = |q_c - q_f| \times q_{\max}^{-1} \times 100\%$ не превышает 0,4%.

6. Заключение

Из проведенных расчетов следует, что применение виртуального оболочечного элемента и предложенное разложение нагрузки в ряд Фурье, которое позволяет понизить размерность задачи на единицу, обеспечивают достаточно высокую точность аппроксимации внешней нагрузки, а следовательно, и напряженного состояния изотропных и ортотропных оболочек вращения.

С вычислительной точки зрения преимущество обсуждаемого подхода проявляется в том, что исключается необходимость хранить матрицу жесткости оболочки и решать систему линейных алгебраических уравнений, поскольку запоминается информация о решении только в точках ортогонализации. Вследствие этого существенно сокращается время вычислений и экономятся вычислительные ресурсы.

Литература

1. *Emel'yanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V.* Determining the stress state and the lifetime of a shell structure // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2007. – Vol. 36, no. 5. – P. 443-449. DOI
2. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1961. – Т. 16, № 3(99). – С. 171-174. (URL: <http://www.mathnet.ru/links/c99fb080e5e6111a5c9b5260e37010a1/rm6626.pdf>).
3. Методы расчета оболочек: В 5-ти томах. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости / Под ред. Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 544 с.
4. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др.* Механика композитов: В 12-ти т. Т. 8. Статика элементов конструкций. – Киев: А.С.К., 1999. – 379 с.
5. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
6. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
7. *Лукаевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 544 с.
8. *Нерубайло Б.В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. – М.: Машиностроение, 1983. – 248 с.
9. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.* Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). – Москва, 1988. – 192 с. – Деп. в ВИНТИ 12.02.88.
10. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
11. *Григоренко Я.М.* Решение краевых задач о напряженном состоянии упругих тел сложной геометрии и структуры с применением дискретных рядов Фурье // *Прикладная механика*. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 3-52. DOI
12. *Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П.* Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки // МТТ. – 2007. – № 3. – С. 115-124. DOI
13. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
14. *Емельянов И.Г.* Применение контактных элементов для задач о контактирующих оболочках вращения // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2005. – № 6. – С. 62-68.
15. *Емельянов И.Г.* Контактные задачи теории оболочек. – Екатеринбург: УрО РАН, 2009. – 185 с.
16. *Barashkova E., Emelyanov I.* Stress state of shells under arbitrary load // *Proceedings of 5th WSEAS International Conference on Finite Differences – Finite Elements – Boundary Elements (F-and-B'12)*, Prague, Czech Republic, September 24-26, 2012. – P. 33-37.
17. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
18. *Басов К.А.* ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
19. *Emelyanov I.G., Mironov V.I.* Contact problem for a shell considering the transverse load // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2013. – Vol. 42, no. 1. – P. 36-40. DOI

References

1. *Emel'yanov I.G., Mironov V.I., Kuznetsov A.V.* Determining the stress state and the lifetime of a shell structure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2007, vol. 36, no. 5, pp. 443-449. DOI
2. *Godunov S.K.* O chislennom reshenii kraevykh zadach dlya sistem lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij [Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations]. *Usp. Mat. Nauk – Russ. Math. Surv.*, 1961, vol. 16, no. 3, pp. 171-174. (URL: <http://www.mathnet.ru/links/c99fb080e5e6111a5c9b5260e37010a1/rm6626.pdf>).
3. *Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T.* *Theory of shells of variable stiffness*. Vol. 4 of the 5-volume series *Methods of shell design*. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 544 p.
4. *Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Emel'yanov I.G. et al.* *Statics of structural elements*. Vol. 8 of the 12-volume series *Mechanics of composites*. Kiev: A.S.K., 1999. 379 p.
5. *Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G., Grigorenko A.Ya.* *Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modelei* [Numerically-analytical solution of problems of the mechanics of shells based on different models]. Kiev: Akadempriodika, 2006. 472 p.
6. *Grigolyuk E.I., Tolkahev V.M.* *Kontaknyye zadachi teorii plastin i obolochek* [Contact problems in the theory of plates and shells]. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 411 p.
7. *Lukasevich S.* *Lokal'nye nagruzki v plastinakh i obolochkakh* [Local loads in plates and shells]. Moscow: Mir, 1982. 544 p.

8. Nerubailo B.V. *Lokal'nye zadachi prochnosti tsilindricheskikh obolochek* [Local tasks strength of cylindrical shells]. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 248 p.
9. Obratsov I.F., Nerubailo B.V., Ol'shanskii V.P. *Obolochki pri lokalizovannykh vozdeystviyakh* [Shells under localized effects (review of works, basic results and trends of investigations)]. Moscow, 1988. Deposited at VINITI 12.02.88, no. 1222-V88.
10. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled constructions]. Moscow: Fizmatlit, 2006. 392 p.
11. Grigorenko Ya.M. Using discrete fourier series to solve boundary-value stress problems for elastic bodies with complex geometry and structure. *Int. Appl. Mech.*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 469-513. DOI
12. Nerubailo B.V., Ol'shanskii V.P. Asymptotic method for analysis of a conical shell under local loading. *Mech. Sol.*, 2007, vol. 42, no. 3, pp. 429-436. DOI
13. Johnson K.L. *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 452 p.
14. Emel'yanov I.G. Application of contact elements to contact problems of shells of revolution. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, no. 6, pp. 62-68.
15. Emelyanov I.G. *Kontaknye zadachi teorii obolochek* [Contact problems of the theory of shells]. Yekaterinburg: UB RAS, 2009. 185 p.
16. Barashkova E., Emelyanov I. Stress state of shells under arbitrary load. *Proceedings of 5th WSEAS International Conference on Finite Differences – Finite Elements – Finite Volumes – Boundary Elements (F-and-B'12), Prague, Czech Republic, September 24-26, 2012. – P. 33-37.*
17. Hamming R.W. *Numerical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, 1962.
18. Basov K.A. *ANSYS: Spravochnik pol'zovatelya* [ANSYS: User Manual]. Moscow: DMK Press, 2005. 640 p.
19. Emelyanov I.G., Mironov V.I. Contact problem for a shell considering the transverse load. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 1, pp. 36-40. DOI

Поступила в редакцию 11.02.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014