

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.23

УДК 532.5

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГАЗОВОГО МИКРОПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА НАПРАВЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ

Е.В. Бутюгина<sup>1,2</sup>, Э.Ш. Насибуллаева<sup>1,2</sup>, Н.А. Гумеров<sup>1,3</sup>, И.Ш. Ахатов<sup>1,4</sup><sup>1</sup>Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем Башкирского государственного университета, Уфа, Российская Федерация<sup>2</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Уфа, Российская Федерация<sup>3</sup>Институт передовых компьютерных исследований Университета штата Мэриленд, США<sup>4</sup>Факультет инженерной механики Государственного университета Северной Дакоты, США

В работе представлен численный метод решения диффузионной задачи для одиночного газового пузырька в безграничной малосжимаемой жидкости, колеблющегося под действием акустического поля. Разработанный метод позволяет рассчитывать нелинейную динамику пузырьков с изменяющейся массой. Как известно, сохранение общей массы растворенного в жидкости газа и газа в пузырьке возможно при соблюдении закона сохранения в дискретной схеме. С этой целью при вычислении диффузионного потока через стенку пузырька применяется консервативная разностная схема, для получения которой А.Н.Тихоновым и А.А.Самарским предложен интегро-интерполяционный метод, основанный на выполнении интегральных уравнений баланса. Как правило, для изучения влияния направленной диффузии на динамику пузырька требуются значительные затраты машинного времени. В связи с этим разработано приближение исходной задачи, основанное на предположении о квазистационарности колебаний концентрации растворенного газа, которое дает возможность исследовать влияние направленной диффузии на динамику пузырька в течение миллионов периодов колебаний. Результаты вычислений с помощью предложенного метода показали хорошее соответствие экспериментальным данным, приведенным в литературе. Сравнение величин изменения массы газа в пузырьке, найденных по представленной схеме и по традиционно используемой схеме, не сохраняющей общую массу системы «газ–жидкость», выявило, что во втором случае погрешность расчета может накапливаться и приводить к физически некорректным результатам.

*Ключевые слова:* динамика пузырьков, направленная диффузия, консервативная схема, акустическое поле

## NUMERICAL SIMULATIONS OF GAS MICROBUBBLE DYNAMICS IN AN ACOUSTIC FIELD WITH THE INFLUENCE OF RECTIFIED DIFFUSION

E.V. Butyugina<sup>1,2</sup>, E.Sh. Nasibullaeva<sup>1,2</sup>, N.A. Gumerov<sup>1,3</sup> and I.Sh. Akhatov<sup>1,4</sup><sup>1</sup>Center for Micro- and Nanoscale Dynamics of Dispersed Systems, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation<sup>2</sup>Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation<sup>3</sup>Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, College Park, Maryland, USA<sup>4</sup>Department of Mechanical Engineering, North Dakota State University, USA

A numerical method for simulation of the diffusion problem for a single gas bubble oscillating in unbounded weakly compressible liquid in an acoustic field is developed. The method enables computation of nonlinear dynamics of bubbles of variable mass. The total mass of the dissolved gas and the gas in the bubble is conserved by enforcing conservation in the discrete scheme. For this purpose a conservative scheme based on an integro-interpolative method is applied for computation of the diffusion flux. Generally, a study of the effect of rectified diffusion on bubble dynamics requires significant computational time. To reduce it, an approximation based on the assumption on quasistationary character of oscillations of the dissolved gas concentration is developed. This enables investigation of rectified diffusion during millions of periods of oscillations. The numerical results obtained by the proposed method are in good agreement with the available experimental data. Comparison of the bubble mass change using the presented scheme and the standard scheme, which does not conserve the total mass of the gas-liquid system, reveals that in the latter case the numerical error may accumulate and lead to physically incorrect results.

*Key words:* bubble dynamics, rectified diffusion, conservative scheme, acoustic field

### 1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию акустической кавитации и связанным с ней физическим явлениям (самоорганизации пузырьков, многопузырьковой сонолюминесценции, химическим реакциям внутри пузырька и в жидкости и другим), наблюдаемым в физике, химии и биологии и находящим широкое практическое применение в технике, медицине и различных областях промышленности. Одно из важных направлений в понимании фундаментальной природы акустической кавитации — это изучение диффузионной устойчивости пузырьков при акустическом воздействии. Задача переноса газа между пузырьком и окружающей его жидкостью является актуальной, так как на сегодняшний день нет четкого представления о механизме данного процесса, и для его описания необходимо прибегнуть к компьютерному моделированию и сравнению с результатами экспериментов.

Первоначально интерес к диффузионным процессам, протекающим между газовым пузырьком и окружающей его жидкостью с растворенным в ней газом, возник благодаря экспериментам по акустической кавитации, в которых наблюдалось, что маленькие газовые пузырьки, при наличии акустического поля,

растут со временем. Это явление объяснялось массопереносом растворенного газа между жидкостью и пузырьком и было названо направленной диффузией (rectified mass diffusion) [1]. Математические теории, описывающие процесс диффузии для случая малых амплитуд колебаний пузырька, представлены, например, в работах [2–5]. При изучении однопузырьковой сонолюминесценции в 1991 году было обнаружено [6], что одиночный пузырек в сильном акустическом поле может колебаться в течение нескольких дней без изменения своего размера. Такое поведение упомянутые математические теории объяснить не могут.

Аналитического решения полной системы нелинейных уравнений, описывающих массообмен между колеблющимся в акустическом поле газовым пузырьком и жидкостью, не существует, и решение может быть найдено только численно. Главная проблема численного решения состоит в том, что изменение среднего за период значения массы пузырька очень мало и близко к погрешности расчета. Кроме того, вычислительный эксперимент требует значительных затрат машинного времени. Поэтому до настоящего момента в литературе (например [7–12]) при исследовании диффузионной задачи использовались, как правило, асимптотические или аппроксимационные модели, которые не дают полного представления о процессе диффузии. Заметим, что во всех этих работах изменение массы пузырька в масштабе одного периода колебаний не принималось в расчет; в отличие от них в работе [13] рассматривается рост пузырька за счет направленной диффузии при малом управляющем давлении и сравнительно большом начальном радиусе. Но при таких условиях задача не представляет большой вычислительной сложности, поскольку высокочастотные осцилляции внутри периода и глубокие коллапсы пузырька отсутствуют.

Основной целью данной работы является построение и оптимизация такого численного метода решения полной диффузионной задачи для одиночного пузырька, колеблющегося в акустическом поле, который способен учитывать также влияние изменения массы газа в пузырьке на его динамику. Зная, что уравнение диффузии выражает закон сохранения массы, потребуем, чтобы при его конечно-разностной аппроксимации изменение массы газа, как и в дифференциальной задаче, оставалось постоянным. В основу предлагаемого метода положим консервативную разностную схему, которая позволяет удовлетворить это условие.

Для того чтобы продемонстрировать влияние направленной диффузии на динамику пузырька, необходимы вычисления на нескольких тысячах или даже миллионах периодов его колебаний. Пользуясь тем, что в обсуждаемой задаче есть несколько временных масштабов, осуществим ее оптимизацию. Например, при определенных параметрах оказывается, что время установления диффузии  $T_d$  меньше (в пределах нескольких процентов) характерного времени  $T_m$ , требуемого для изменения средней за период массы пузырька, то есть  $T_d < T_m$ , а изменение массы пузырька за один период очень мало. Для такого случая — случая квазистационарных колебаний, авторами получено приближение диффузионной задачи, предполагающее, что усредненный за период колебаний диффузионный поток мало изменяется от периода к периоду и скорость изменения усредненной массы пузырька остается постоянной в течение некоторого промежутка времени. В литературе (например, в работах [7, 10]) существуют приближенные решения при периодическом условии для профиля концентрации, но их применение возможно лишь при больших числах Пекле. Отметим, что разработанное авторами и представляемое в настоящей статье алгоритмическое ускорение вычислений показывает хорошие результаты и для малых чисел Пекле, а также согласуется с решением полной диффузионной задачи в частных производных.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается сферически-симметричный одиночный газовый пузырек, который совершает радиальные колебания в безграничной малосжимаемой жидкости под действием акустического поля, изменяющегося со временем  $t$  по периодическому закону:  $p_e(t) = p_0 - p_A \sin(\omega t)$ , где  $p_0$  — атмосферное давление;  $p_A$  — амплитуда переменного давления;  $\omega$  — круговая частота.

Математическое моделирование задачи основывается на следующих допущениях: теплообмен в жидкости отсутствует; изменение размеров пузырька за период колебания происходит только за счет диффузии; длина волны звукового поля много больше размеров пузырька,  $\omega R \ll c_l$ , где  $R = R(t)$  — радиус пузырька, зависящий от времени,  $c_l$  — скорость звука в жидкости. Скорость переноса массы газа  $m_g$  через подвижную границу пузырька определяется через градиент массовой газовой концентрации  $c$ , растворенного в жидкости, по формуле:  $\frac{dm_g}{dt} = 4\pi R^2(t) \rho_l D_l \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R(t)}$ , где  $\rho_l$  — плотность жидкости,  $D_l$  — коэффициент диффузии,  $r$  — пространственная координата.

Движение стенки пузырька опишем нелинейным дифференциальным уравнением Келлера–Миксиса [14]:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c_l}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c_l}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_l}\right) \frac{p}{\rho_l} + \frac{R}{c_l \rho_l} \frac{dp}{dt}, \quad (1)$$

в котором давление на границе пузырька с жидкостью имеет вид:

$$p = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \frac{m_g}{m_{g0}} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - p_e(t),$$
 где  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Нижний индекс «0» означает параметр в начальный момент времени, а точка над параметром — дифференцирование по времени. Начальные условия для уравнения (1) зададим как  $R(0) = R_0$ ,  $\dot{R}(0) = 0$ .

Согласно [10] уравнение диффузии растворенного в жидкости газа, записанное в сферических координатах, имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \frac{\partial c}{\partial r} = D_l \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (2)$$

а краевое условие на границе пузырька удовлетворяет закону Генри, в котором учитывается изменение массы, приходящееся на один период акустического поля  $c|_{r=R(t)} = \frac{c_0}{p_0} \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \frac{m_g}{m_{g0}} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma}$ , где  $c_0$  — концентрация насыщения при давлении  $p_0$ . Предполагается, что пузырек образуется в жидкости с однородной концентрацией газа  $c_\infty$ , соответствующей концентрации вдали от стенки пузырька. Таким образом, краевое условие на отдаленной границе имеет вид  $c_{r=\infty} = c_\infty$ .

Для устранения вычислительных проблем, связанных с движением стенки пузырька, по аналогии с [7], зафиксируем границу с помощью переменной Лагранжа  $\xi$  следующим образом:

$$\xi = \frac{r^3 - R^3}{3R_0^3}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{r^2}{R_0^3} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{R^2 \dot{R}}{R_0^3} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

После этого уравнение (2) принимает вид: 
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{D_l R^4}{R_0^6} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( 1 + \frac{3R_0^3 \xi}{R^3} \right)^{4/3} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right).$$

Введение безразмерных переменных

$$u = \frac{c - c_\infty}{c_0}, \quad a = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{t} = \omega t, \quad \bar{m}_g = \frac{m_g}{m_{g0}}, \quad \text{Pe} = \frac{\omega R_0^2}{D_l} \text{ — число Пекле, } b = \frac{4\pi R_0^3 \rho_l c_0}{3m_{g0}}$$

приводит систему уравнений к безразмерному виду, который удобнее исходного для осуществления дискретизации и вычислений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{a^4}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( 1 + \frac{3\xi}{a^3} \right)^{4/3} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), & 1 \\ u|_{\xi=0} = (1 + \bar{\sigma}) \bar{m}_g a^{-3\gamma} - \frac{c_\infty}{c_0}, & 2 \\ \frac{d\bar{m}_g}{d\bar{t}} = 3a^4 \frac{b}{\text{Pe}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}. & 3 \end{cases} \quad (3)$$

### 3. Дискретная схема для уравнения диффузии

В данной работе при вычислении диффузионного потока использовалась консервативная схема, в результате применения которой сохраняется общая масса физической системы вследствие выполнения закона сохранения на дискретном уровне, что дает большое преимущество перед остальными схемами. Также консервативная схема позволяет учитывать влияние на динамику пузырька мгновенного изменения его массы.

Итак, запишем уравнение диффузии (3)<sub>1</sub> в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{a^4}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( 1 + \frac{3\xi}{a^3} \right)^{4/3} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0,$$

где  $W = -\frac{a^4}{\text{Pe}} \left(1 + \frac{3\xi}{a^3}\right)^{4/3} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ , и применим теорему Грина

$$\oint_{\Gamma} (u(\bar{t}, \xi) d\xi - W(\bar{t}, \xi) d\bar{t}) = 0. \tag{4}$$

В соответствии с интегро-интерполяционным методом [15] зададим сетку по пространству  $\xi = \xi_j$  ( $j = 0, 1, \dots, M$ ) и по времени  $\bar{t} = \bar{t}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Пространственную ячейку с номером  $j$  возьмем такую, чтобы ее границы проходили через точки  $(\xi_{j-1} + \xi_j)/2$  и  $(\xi_j + \xi_{j+1})/2$ . Проинтегрируем уравнение (4) по следующему контуру:

$$\begin{array}{ccc} \left( \bar{t}_i, \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2} \right) & \rightarrow & \left( \bar{t}_i, \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} \right) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \left( \bar{t}_{i+1}, \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2} \right) & \leftarrow & \left( \bar{t}_{i+1}, \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} \right) \end{array}$$

в результате найдем: 
$$\int_{(\xi_{j-1} + \xi_j)/2}^{(\xi_j + \xi_{j+1})/2} u(\bar{t}_i, \xi) d\xi + \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} W\left(\bar{t}, \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}\right) d\bar{t} + \int_{(\xi_j + \xi_{j+1})/2}^{(\xi_{j-1} + \xi_j)/2} u(\bar{t}_{i+1}, \xi) d\xi + \int_{\bar{t}_{i+1}}^{\bar{t}_i} W\left(\bar{t}, \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2}\right) d\bar{t} = 0.$$

Применив к этому уравнению метод трапеций — метод приближенного интегрирования, получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} - \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2} \right) u(\bar{t}_i, \xi_j) - (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}\right) + \\ & + \left( \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2} - \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} \right) u(\bar{t}_{i+1}, \xi_j) - (\bar{t}_i - \bar{t}_{i+1}) W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

или после приведения подобных членов

$$(\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) \left( W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}\right) - W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2}\right) \right) = -\frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2} (u(\bar{t}_{i+1}, \xi_j) - u(\bar{t}_i, \xi_j)).$$

Заменим  $W$  его дискретным аналогом и введем обозначение  $\kappa_{i,j+1/2} = a^4(\bar{t}_i) \left(1 + \frac{3(\xi_j + \xi_{j+1})}{2a^3(\bar{t}_i)}\right)^{4/3}$ . С учетом проделанного и упорядочения слагаемых уравнение (3)<sub>1</sub> для концентрации газа на каждом шаге по времени запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} - \frac{\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{(\xi_{j+1} - \xi_{j-1}) \text{Pe}} \left( \kappa_{i+1,j+1/2} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\xi_{j+1} - \xi_j} - \kappa_{i+1,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \right) = \\ = u_{i,j} + \frac{\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{(\xi_{j+1} - \xi_{j-1}) \text{Pe}} \left( \kappa_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\xi_{j+1} - \xi_j} - \kappa_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $u_{i,j}$  — значение безразмерной концентрации газа на  $i$ -м шаге по времени и  $j$ -м шаге по пространству. В результате приходим к схеме Кранка–Николсон [16]. Уравнения (5) верны для  $j = 1, \dots, M - 1$ . Значениям  $j = 0$  и  $j = M$  соответствуют краевые условия задачи.

Для вычисления изменения массы уравнение (4) проинтегрируем по контуру вблизи точки  $j = 0$ . С этой целью возьмем область, представляющую собой половину ячейки, а именно из рассмотрения исключим интервал  $(-1/2; 0)$ :

$$\begin{array}{ccc} (t_i, \xi_0) & \rightarrow & \left( t_i, \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (t_{i+1}, \xi_0) & \leftarrow & \left( t_{i+1}, \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right) \end{array}$$

Тогда получим

$$(u(\bar{t}_i, \xi_0) - u(\bar{t}_{i+1}, \xi_0)) \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{2} \right) - (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) \left[ W \left( \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right) - W \left( \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \xi_0 \right) \right].$$

Изменение массы за один шаг по времени равняется  $\bar{m}(\bar{t}_{i+1}) - \bar{m}(\bar{t}_i) = \frac{3b}{\text{Pe}} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} a^4 \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\bar{t}$ , а последнее слагаемое в формуле (4) будет, по определению, иметь вид:

$$-\int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \frac{a^4}{\text{Pe}} \left( 1 + \frac{3\xi}{a^3} \right)^{4/3} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\bar{t} = -\frac{1}{3b} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \frac{3b}{\text{Pe}} a^4 \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\bar{t} = -\frac{1}{3b} (\bar{m}(\bar{t}_{i+1}) - \bar{m}(\bar{t}_i)).$$

Отсюда вытекает

$$\frac{1}{3b} (\bar{m}_g(\bar{t}_{i+1}) - \bar{m}_g(\bar{t}_i)) = \frac{\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{2(\xi_1 - \xi_0)} \text{Pe} \left( \kappa_{i,1/2} (u_{i,1} - u_{i,0}) + \kappa_{i+1,1/2} (u_{i+1,1} - u_{i+1,0}) \right) - \frac{\xi_1 - \xi_0}{2} (u(\bar{t}_{i+1}, \xi_0) - u(\bar{t}_i, \xi_0)).$$

Таким образом, установлено выражение для вычисления значения массы газа в пузырьке на каждом шаге итерационного процесса по времени при выполнении дискретного закона сохранения общей массы системы. Следует отметить, что стандартная конечно-разностная аппроксимация уравнения (3)<sub>3</sub> дает выражение для определения массы, однако оно не содержит слагаемого  $\frac{\xi_1 - \xi_0}{2} (u(\bar{t}_{i+1}, \xi_0) - u(\bar{t}_i, \xi_0))$ , и найденная по нему общая масса системы отличается от исходной, то есть не сохраняется. В следующем разделе проводится сравнение результатов расчетов, полученных с помощью такой неконсервативной схемы и с помощью схемы, описанной выше.

#### 4. Приложение дискретного метода и проверка его сходимости

Численное решение уравнения Келлера–Миксиса (1) для одиночного пузырька реализовано с помощью метода Dormana–Принца восьмого порядка точности [17] с адаптивным шагом по времени. Шаг выбирался таким, чтобы ошибка на соответствующей ему итерации не превышала заданную величину параметра  $\varepsilon$ . Для тестирования метода результаты его численной реализации прошли сравнение с данными, рассчитанными с помощью встроенной процедуры MATLAB ode45, предназначенной для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переход к численному моделированию массопереноса через стенку пузырька осуществлялся двумя способами:

- с помощью стандартной схемы Кранка–Николсон, которая подробно рассмотрена в работе [18];
- с использованием вышеописанной полностью консервативной разностной схемы.

Изменение полной массы газа в системе «газ – жидкость» можно записать как

$$\Delta \bar{m}_{full} = \bar{m}_g(\bar{t}) - \bar{m}_g(0) + 3b \int_0^{\infty} u(\bar{t}, \xi) d\xi,$$

где последнее слагаемое является изменением массы газа, растворенного в жидкости. Изменение же полной массы системы в реальных условиях за любой промежуток времени должно быть равно нулю, что делает возможной проверку консервативности схемы в расчетах.

В таблице 1 приведены значения изменения полной массы системы  $\Delta \bar{m}_{full}$ , а также значения безразмерной максимальной массы газа в пузырьке  $\bar{m}_{gmax}$  в течение разного числа периодов  $T$  внешнего акустического

поля. Расчеты проводились для пузырька с начальным радиусом  $R_0 = 2$  мкм при следующих параметрах:  $\gamma = 1,4$ ;  $\sigma = 0,0725$  Н/м;  $p_0 = 10^5$  Па;  $c_l = 1500$  м/с;  $\omega = 2\pi \cdot 20$  кГц;  $D_l = 2 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с;  $c_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ;  $c_\infty = 5 \cdot 10^{-9}$ ;  $p_A = 1,5 \cdot 10^5$  Па. Использовалась неравномерная сетка, сгущающаяся к стенке пузырька по закону:  $\xi_j = L \cdot j^3 / M^3$  ( $j = 0, \dots, M$ ). Здесь величина  $L = 10^3$  была выбрана так, чтобы граница расчетной области не оказывала существенного влияния на диффузию газа в окружающей пузырек жидкости.

Как видно из таблицы 1, при консервативной схеме изменение полной массы системы много меньше, чем в случае, когда дискретный закон сохранения не выполняется, более того, значение  $\Delta \bar{m}_{full}$  близко к нулю, следовательно, численная реализация на основе консервативной схемы позволила выполнить условие сохранения. При неконсервативной схеме изменение общей массы системы и максимальная масса газа в пузырьке являются величинами одного порядка, что приводит к накоплению вычислительной ошибки. А это, как наглядно демонстрируют результаты, оказывает существенное влияние на динамику пузырька за счет направленной диффузии. Действительно, масса газа в пузырьке, рассчитанная с использованием консервативной схемы, растет со временем, тогда как  $\bar{m}_{gmax}$  при стандартной схеме убывает. Результаты, полученные в работе [10] с помощью аппроксимационной теории, говорят о том, что масса при таких параметрах должна расти до момента достижения пузырьком равновесного значения. Таким образом, консервативная схема обеспечивает корректное вычисление изменения массы газа, заключенного в пузырьке.

Таблица 1. Изменение полной массы системы  $\Delta \bar{m}_{full}$  и величина максимальной массы газа в пузырьке  $\bar{m}_{gmax}$  за один период при стандартной и консервативной схемах

Число периодов $T$	Стандартная схема		Консервативная схема	
	$\Delta \bar{m}_{full}$	$\bar{m}_{gmax}$	$\Delta \bar{m}_{full}$	$\bar{m}_{gmax}$
1	$2,0 \cdot 10^{-4}$	1,0004	$8,2 \cdot 10^{-12}$	1,0003
5	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,0002	$4,0 \cdot 10^{-11}$	1,0009
10	$1,9 \cdot 10^{-3}$	0,9995	$3,8 \cdot 10^{-12}$	1,0012
15	$2,9 \cdot 10^{-3}$	0,9987	$3,3 \cdot 10^{-11}$	1,0014
20	$3,9 \cdot 10^{-3}$	0,9891	$5,1 \cdot 10^{-10}$	1,0018

Для исследования сходимости алгоритма на основе консервативной схемы уравнение (1) решалось с помощью метода Рунге–Кутты 4-го порядка, поскольку в этом случае величины временных шагов изменяются более значительно в зависимости от параметра  $\epsilon$ . Поэтому такой метод нагляднее демонстрирует сходимость по времени, чем одна из его разновидностей — метод Дормана–Принца 8-го порядка точности.

В таблице 2 при сравнении можно увидеть абсолютную ошибку, возникающую при сравнении решений по отношению к наиболее точному значению массы газового пузырька на конец периода — значению при  $M = 2^{13}$ ,  $\epsilon = 10^{-12}$ . По мере уменьшения  $\epsilon$  и, следовательно, среднего шага по времени  $h_t = 2\pi/N$ , где  $N$  — число шагов, сходимость схемы по пространству более заметна. Так, из двух последних строк таблицы следует, что ошибка, в зависимости от количества точек по пространству, составляет  $O(h^2)$ . Определить зависимость ошибки от временного шага сложнее, поскольку в алгоритме реализована возможность автоматического выбора шага, но, тем не менее, можно наблюдать повышение точности с уменьшением параметра  $\epsilon$ .

Таблица 2. Сходимость консервативной схемы

Заданная точность (число шагов по времени)	Количество точек по пространству				
	$M = 2^9$	$M = 2^{10}$	$M = 2^{11}$	$M = 2^{12}$	$M = 2^{13}$
	Абсолютная ошибка по отношению к наиболее точному решению				
$\epsilon = 10^{-2}$ ( $N = 1620$ )	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$
$\epsilon = 10^{-4}$ ( $N = 2590$ )	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$
$\epsilon = 10^{-6}$ ( $N = 4620$ )	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$
$\epsilon = 10^{-8}$ ( $N = 10190$ )	$8,1 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$3,2 \cdot 10^{-8}$
$\epsilon = 10^{-10}$ ( $N = 24680$ )	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-9}$
$\epsilon = 10^{-12}$ ( $N = 61560$ )	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$9,6 \cdot 10^{-8}$	0

## 5. Приближение с периодическим условием для профиля концентрации газа

Расчет большого количества периодов колебаний пузырька, несмотря на преимущества описанной схемы, требует значительных временных затрат. В связи с этим предложено и реализовано почти периодическое приближение для диффузионной задачи, которое заключается в следующем.

Считаем, что пузырек испытывает почти периодические колебания, когда диффузионный процесс установился. Это позволяет поставить для профиля концентрации газа условие периодичности  $c(t+T^*, \xi) = c(t, \xi)$ , где  $T^*$  — период акустического поля, и вычислить, основываясь на полученном решении уравнения диффузии, средний за период поток массы. Выполнение условия периодичности означает, что средняя за период колебаний диффузия установилась, и средняя скорость изменения массы газа в пузырьке  $\langle \dot{m}_g \rangle_{\bar{t}}$  постоянна в течение некоторого промежутка времени. Осреднение по периоду акустического поля для произвольной функции безразмерного времени осуществим как

$\langle f(\bar{t}) \rangle_{\bar{t}} = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} f(\bar{t}) d\bar{t}$ . Также предполагаем отсутствие влияния мгновенного потока массы на динамику пузырька. Такое допущение дает возможность решать уравнение (1) отдельно от системы (3), если положить  $\dot{m}_g = 0$ . Далее аппроксимируем систему уравнений (3) с помощью консервативной схемы и найдем среднее за период значение  $\langle \dot{m}_g \rangle_{\bar{t}}$ . Проведенные численные эксперименты показали, что это значение мало и практически не меняет динамику пузырька за один период колебаний, что свидетельствует о правомерности использования периодического приближения. Полученная функция  $\langle \dot{m}_g \rangle_{\bar{t}}$  зависит от  $m_g$  формально, и ее значение можно вычислить при любом известном  $m_g$ .

Для установления характера изменения массы и радиуса пузырька со временем численно интегрируем эту функцию методами типа Рунге–Кутты. Шаги интегрирования при этом адаптируются к заданной точности. Таким образом, имеем асимптотический метод для нахождения массы газа в пузырьке в зависимости от времени, основанный на почти периодическом приближении полной диффузионной задачи в частных производных. Данный метод позволяет значительно сократить затраты машинного времени.

## 6. Численная схема для почти периодического приближения

К безразмерной системе уравнений диффузии (3) добавим условие периодичности  $u(t+T^*) = u(t)$ . Тогда вектор концентрации газа на  $i$ -м шаге по времени  $\mathbf{u}_i$  может быть найден по формуле:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{i-1}. \quad (6)$$

Здесь:  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  — трехдиагональные матрицы,  $\mathbf{A}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_i)$ ,  $\mathbf{B}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i-1})$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица;  $\mathbf{K}_i$  — матрица коэффициентов  $\kappa$ ;  $\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_1$ , где  $\mathbf{u}_1$  — вектор безразмерной концентрации газа на первом шаге по времени,  $N$  — число шагов по времени. Если обозначить текущий шаг по времени как  $h_t^i = \bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i$  и шаг по пространству  $h_\xi^j = \xi_{j+1} - \xi_j$ , где  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M-1$ , то коэффициенты перед значениями  $\mathbf{u}_i$  в выражении (5) составят матрицу  $\mathbf{K}_i$ :

– в строках  $j = 1, \dots, M-1$

$$[\mathbf{K}_i]_{j,j-1} = -\frac{h_t^i}{(h_\xi^j + h_\xi^{j-1}) \text{Pe}} \frac{\kappa_{j-1/2}^i}{h_\xi^{j-1}}, \quad [\mathbf{K}_i]_{j,j} = \frac{h_t^i}{(h_\xi^j + h_\xi^{j-1}) \text{Pe}} \left( \frac{\kappa_{j+1/2}^i}{h_\xi^j} + \frac{\kappa_{j-1/2}^i}{h_\xi^{j-1}} \right), \quad [\mathbf{K}_i]_{j,j+1} = -\frac{h_t^i}{(h_\xi^j + h_\xi^{j-1}) \text{Pe}} \frac{\kappa_{j+1/2}^i}{h_\xi^j};$$

– на границах при  $i = j = 0$   $[\mathbf{K}_i]_{0,0} = [\mathbf{K}_i]_{M,M} = 1$ ;

– остальные коэффициенты равняются нулю.

Теперь уравнение (6) можно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_N & & & & & & \mathbf{B}_N \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & & & & & \\ & & \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3 & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & \mathbf{B}_{N-1} & \mathbf{A}_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_N \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \dots \\ \mathbf{u}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \dots \\ \mathbf{f}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{f}^i = \{2u_a(\bar{t}_i), 0, 0, \dots, 0\}^T.$$

При помощи блочного метода исключения Гаусса система сводится к виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \mathbf{E}_1 \\ & \mathbf{I} & & & \mathbf{E}_2 \\ & & \mathbf{I} & & \mathbf{E}_3 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \mathbf{E}_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{f}'_3 \\ \dots \\ \mathbf{f}'_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \text{в котором}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}_1, & \mathbf{f}'_1 &= \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_1; \\ \mathbf{E}_j &= -\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}_j\mathbf{E}_{j-1}, & \mathbf{f}'_j &= \mathbf{A}_j^{-1}(\mathbf{f}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{f}'_{j-1}); \\ \mathbf{E}_{N-1} &= \mathbf{A}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1}\mathbf{E}_{N-2}, & \mathbf{f}'_{N-1} &= \mathbf{f}_{N-1} - \mathbf{B}_{N-1}\mathbf{f}'_{N-2}. \end{aligned}$$

При осуществлении прямых вычислений, как известно, требуется хранение всех матриц  $\mathbf{E}_k$ , для чего нужен большой объем оперативной памяти компьютера, так как эти матрицы являются плотными и имеют размер  $(M+1) \times (M+1)$ . Но поскольку в обсуждаемой задаче  $\mathbf{E}_k$ , а также векторы  $\mathbf{f}'_k$  зависят только от своих значений на предыдущем шаге (см. последние формулы) и вычисляются последовательно, их можно не запоминать и таким образом сократить потребность в памяти в  $N$  раз.

После определения в матрице  $\mathbf{E}_{N-1}$  последнего блока и величины  $\mathbf{f}'_{N-1}$  легко найти  $\mathbf{u}_{N-1} = \mathbf{E}_{N-1}^{-1}\mathbf{f}'_{N-1}$ . Остальные элементы рассчитываются по формуле  $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i^{-1}(\mathbf{f}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{u}_{i-1})$ . В результате при условии учета трехдиагональности матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  при реализации алгоритма время работы, по сравнению с прямыми вычислениями периодической задачи, уменьшается с  $O(M^3N)$  до  $O(M^3 + M^2N)$ ; здесь  $M$  и  $N$  — число шагов по пространству и времени.

### 7. Результаты расчетов

Как было отмечено выше, для изучения воздействия направленной диффузии на динамику пузырька требуется рассмотрение большого количества периодов (порядка нескольких миллионов), что влечет за собой значительные затраты машинного времени. Например, расчет нелинейной динамики пузырька в течение  $T = 10^4$  периодов при решении полной диффузионной задачи продолжается около 60 часов на одном ядре системы Intel Core i7-4770 3.40 GHz, 16GB RAM. При параметрах задачи, когда время изменения средней за период массы пузырька много больше времени установления диффузии  $T_d = R^2/D_l$ , оправдано применение почти периодического приближения. Такое приближение позволяет сократить расчетное время с 60 часов до 40 минут и достичь хорошего соответствия результатам решения полной диффузионной задачи. При этом максимальная относительная погрешность массы, полученной по двум представленным схемам, не превышает  $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ . Заметим, что такое значение ошибки имеет место в начале вычислительного эксперимента, тогда как с течением времени оно уменьшается до значения  $\delta \sim 1,1 \cdot 10^{-3}$ .

В рамках верификации было проведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными из работы [19]. При этом использовались те же значения параметров, что и при проведении экспериментов:  $R_0 = 35$  мкм;  $\sigma = 0,068$  Н/м;  $\gamma = 1,4$ ;  $p_0 = 10^5$  Па;  $c_l = 1480$  м/с;  $\omega = 2\pi \cdot 22,1$  кГц;  $D_l = 2,42 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с;  $c_0 = 2,36 \cdot 10^{-5}$ ;  $c_\infty = c_0$ ;  $p_A = 0,195 \div 0,305$  атм; внешнее давление определялось по формуле  $p_e(t) = p_0 + p_A \cos(\omega t)$ . Процесс диффузии воздуха из пузырьков проходил в воде; пузырьки претерпевали осцилляции от изотермических (при радиусе  $R < 30$  мкм) до адиабатических (при  $R > 70$  мкм). Вместо показателя адиабаты  $\gamma$  в уравнения (1) и (3), для соблюдения идентичности с работой [19], входил переменный показатель политропы  $\eta$ , рассчитанный по выражению Эйлера [20]:

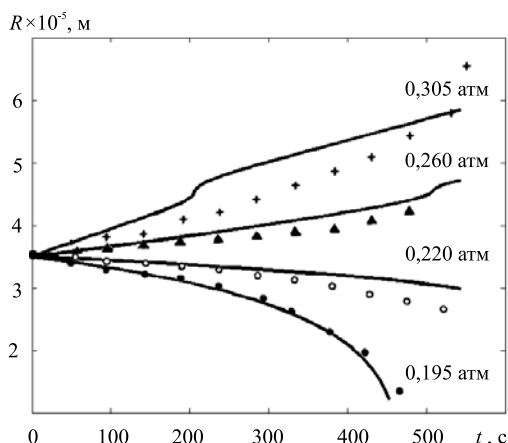
$$\eta = \gamma(1 + d_r^2)^{-1} \left[ 1 + \frac{3(\gamma-1)}{X} \left( \frac{\text{sh}(X) - \sin(X)}{\text{ch}(X) - \cos(X)} \right) \right]^{-1},$$

где  $d_r = 3(\gamma-1) \left( \frac{X(\text{sh}(X) + \sin(X)) - 2(\text{ch}(X) + \cos(X))}{X^2(\text{ch}(X) - \cos(X)) + 3(\gamma-1)X(\text{sh}(X) - \sin(X))} \right)$ ,  $X = R(2\omega/D_l)^{1/2}$ . В этих уравнениях

$D_l = K/(\rho_g C_p)$ , где  $K$  — это коэффициент теплопроводности газа в пузырьке;  $\rho_g$  — плотность газа;  $C_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

На рисунке 1 приведены результаты расчетов по методу, предложенному в данной работе, и экспериментальные данные из [19]. Видно, что с увеличением амплитуды давления пузырек, за счет направленной диффузии, растет быстрее, чем в экспериментах. Объяснить это можно тем, что при проведении эксперимента было достаточно сложно добиться поддержания постоянной температуры и, как следствие, степени насыщения жидкости газом. Отметим, что в случае амплитуды давления, максимальной





**Рис. 1.** Изменение радиуса пузырька  $R$  со временем для различных значений амплитуды акустического поля  $p_A = 0,195 \div 0,305$  атм в насыщенной газом жидкости; сплошная линия – результаты расчетов; маркеры +, ▲, ○, ● – экспериментальные значения из [19]

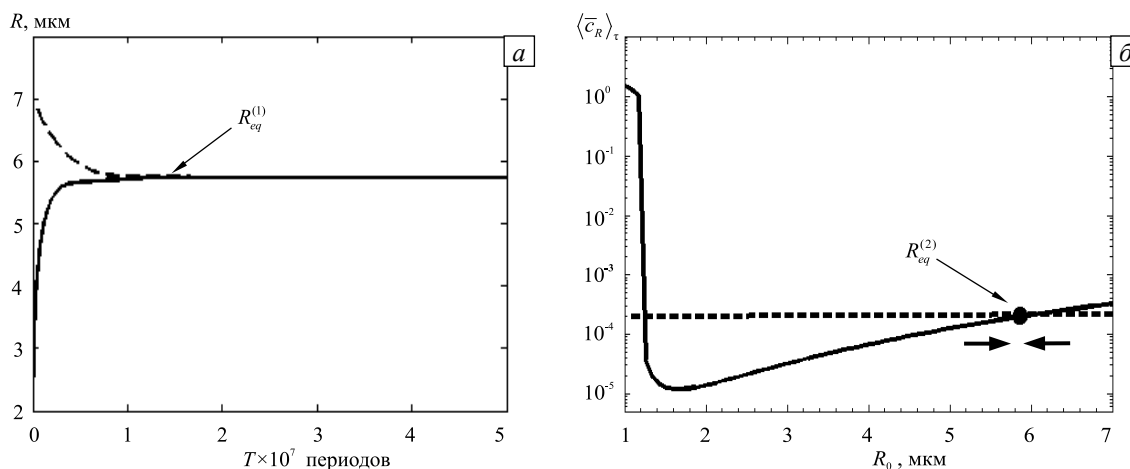
из рассматриваемых, при которой радиус пузырька достигает значения 60 мкм (Рис. 1), в экспериментах наблюдается изменение характера колебания пузырька: пузырек начинает совершать так называемые «танцующие» (трансляционные) движения. Следовательно, в рамках поставленной в данной статье задачи для взятых значений параметров невозможно провести сравнение результатов, полученных по представленной теории и в экспериментах. Тем не менее, относительно остальных параметров можно сделать вывод, что результаты вычислений по предложенной методике достаточно корректно описывают процесс направленной диффузии для одиночного пузырька.

В работе также исследовалась динамика пузырька под влиянием направленной диффузии в течение нескольких миллионов периодов. Расчеты проводились для тех же значений параметров, что и в разделе 4.

После оптимизации описанная методика позволяет учесть  $T = 5 \cdot 10^7$  периодов акустического поля за 1,5 часа, что не осуществимо при прямом решении диффузионной задачи.

На рисунке 2а показано изменение со временем размеров двух пузырьков с различными начальными радиусами:  $R_0 = 2$  мкм и  $R_0 = 7$  мкм. Средняя за период масса газа в пузырьке монотонно изменяется за счет направленной диффузии до тех пор, пока не достигнет равновесного значения примерно ко времени, равному  $T = 1,5 \cdot 10^7$  периодов. При заданных параметрах равновесному значению соответствует радиус  $R_{eq}^{(1)} = 5,74$  мкм, что находится в хорошем соответствии с работой [10], где равновесный радиус составляет  $R_{eq}^{(2)} \sim 5,9$  мкм (на рисунке 2б он обозначен жирной точкой). Горизонтальные стрелки показывают направление изменения радиуса пузырька. Если взять начальный радиус  $R_0 > R_{eq}^{(2)}$ , то пузырек будет растворяться до тех пор, пока его радиус не достигнет равновесного значения. Если же взять  $R_0 < R_{eq}^{(2)}$ , то пузырек будет «расти» до достижения радиусом величины  $R_{eq}^{(2)}$ .

Небольшое отличие в значениях равновесных радиусов можно объяснить тем, что приближение, используемое в [10], предполагает достижение пузырьком состояния равновесия в момент, когда осредненная за период концентрация газа у стенки пузырька  $\langle \bar{c}_R \rangle_t$  строго равняется концентрации газа на отдаленной границе. При решении же полной диффузионной задачи с учетом изменения массы газа в функции, моделирующей давление газа внутри пузырька, это значение при равновесном радиусе только приближается к концентрации газа на отдаленной от пузырька границе расчетной области.



**Рис. 2.** Радиус пузырька  $R$  в зависимости от числа периодов акустического поля  $T$  (а) и изменение осредненной за период концентрации газа у стенки пузырька  $\langle \bar{c}_R \rangle_t$  в зависимости от начального радиуса пузырька  $R_0$  (б) при различных значениях начального радиуса: сплошная линия –  $R_0 = 2$  мкм; штриховая линия –  $R_0 = 7$  мкм

## 8. Заключение

Разработан численный метод для исследования динамики сферического пузырька в изотропном акустическом поле с учетом массопереноса через подвижную стенку пузырька. При записи уравнения диффузии в дискретном виде для выполнения закона сохранения, роль которого играет непрерывность диффузионного потока в элементарной ячейке, применяется консервативная разностная схема.

Проведено сравнение результатов расчета изменения массы газа в пузырьке по представленной полностью консервативной схеме и стандартной схеме, не сохраняющей общую массу системы «газ–жидкость». Показано, что для получения физически корректной картины необходимо использовать полностью консервативную схему, поскольку в противном случае накопление численных ошибок может существенно повлиять на динамику пузырька и привести к неверному результату.

Исследована сходимость схемы, учитывающей дискретный закон сохранения массы. Показано, что с увеличением числа шагов по пространству ошибка составляет  $O(h^2)$ . Также показано, что ошибка падает с измельчением шага по времени. Выявлено, что для практического применения более эффективной является схема Дормана–Принца с адаптивным выбором временного шага вследствие высокого порядка аппроксимации и возможности вычислять радиус пузырька при его коллапсе — резком уменьшении радиуса во время осцилляций.

Построено приближение с периодическим условием для профиля концентрации газа в пузырьке, что позволяет исследовать влияние направленной диффузии на динамику пузырька в течение миллионов периодов. Для численной реализации этого приближения предложены приемы оптимизации, сокращающие время счета с  $O(M^3N)$  до  $O(M^3 + M^2N)$ , где  $M$  и  $N$  — число шагов по пространству и времени соответственно. Проведена верификация метода, показано хорошее соответствие результатам решения полной диффузионной задачи. Проведено также сравнение результатов вычислений по представленной в данной работе методике с результатами экспериментов [14], которое показало, что расчеты дают корректную картину процесса направленной диффузии для одиночного пузырька.

Выявлено, что в случаях, когда изменение средней за период массы газа в пузырьке мало по сравнению со временем установления диффузии, применение почти периодического приближения значительно экономит машинное время. Когда же масса газа в пузырьке изменяется достаточно быстро, в полной диффузионной задаче в частных производных оправдано применение метода, основанного на дискретном законе сохранения общей массы системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (договор 11.G34.31.0040) и РФФИ (проект №14-01-31369-мол\_а).

## Литература

1. Blake F.G. Onset of cavitation in liquids / PhD thesis. – Harvard University, Cambridge, MA, 1949. – 49 p.
2. Hsieh D.-Y., Plesset M.S. Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles // J. Acoust. Soc. Am. – 1961. – Vol. 33, no. 2. – P. 206-215. DOI
3. Eller A., Flynn H.G. Rectified diffusion during nonlinear pulsations of cavitation bubbles // J. Acoust. Soc. Am. – 1965. – Vol. 37, no. 3. – P. 493-503. DOI
4. Crum L.A., Hansen G.M. Generalized equations for rectified diffusion // J. Acoust. Soc. Am. – 1982. – Vol. 72, no. 5. – P. 1586-1592. DOI
5. Аль-Маннай М., Хабеев Н. С. О радиальных пульсациях растворимых парогазовых пузырьков в жидкости // МЖГ. – 2011. – № 2. – С. 131-135. DOI
6. Barber B.P., Putterman S.J. Observation of synchronous picosecond sonoluminescence // Nature. – 1991. – Vol. 352. – P. 318-320. DOI
7. Fyrrillas M.M., Szeri A.J. Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 277. – P. 381-407. DOI
8. Löfstedt R., Weninger K., Putterman S., Barber B.P. Sonoluminescing bubbles and mass diffusion // Phys. Rev. E. – 1995. – Vol. 51. – P. 4400-4410. DOI
9. Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M.P. Phase diagrams for sonoluminescing bubbles // Phys. Fluids. – 1996. – Vol. 8. – P. 2808-2826. DOI
10. Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.D., Parlitz U., Lauterborn W. The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78, no. 2. – P. 227-230. DOI
11. Louisnard O., Gomez F. Growth by rectified diffusion of strongly acoustically forced gas bubbles in nearly saturated liquids // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 67, no. 32. – 036610. DOI
12. Sile T., Virbulis J., Timuhins A., Sennikovs J., Bethers U. Modelling of cavitation and bubble growth during ultrasonic cleaning process // Proc. of International Scientific Colloquium Modelling for Material Processing, Riga, Latvia, September 16-17, 2010. – P. 329-334.
13. Naji Meidani A.R., Hasan M. Mathematical and physical modelling of bubble growth due to ultrasound // Appl. Math. Model. – 2004. – Vol. 28, no. 4. – P. 333-351. DOI
14. Keller J.B., Miksis M. Bubble oscillations of large amplitude // J. Acoust. Soc. Am. – 1980. – Vol. 68, no. 2. – P. 628-633. DOI
15. Тухонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

16. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // *Math. Proc. Cambridge*. – 1947. – Vol. 43, no. 1. – P. 50-67. DOI
17. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
18. Volkova E.V., Nasibullaeva E.S., Gumerov N.A. Numerical simulations of soluble bubble dynamics in acoustic fields // *Proc. of the ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE 2012)*, November 9-15, 2012, Houston, Texas, USA. – 1 CD ROM, 2012. – Article 86243. – P. 317-323. DOI
19. Crum L. A. Measurements of the growth of air bubbles by rectified diffusion // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1980. – Vol. 68, no. 1. – P. 203-211. DOI
20. Eller A.I. Damping constants of pulsating bubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1970. – Vol. 47. – P. 1469-1470. DOI

## References

1. Blake F.G. *Onset of cavitation in liquids*. PhD thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1949. 49 p.
2. Hsieh D.Y., Plesset M.S. Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1961, vol. 33, no. 2, pp. 206-215. DOI
3. Eller A., Flynn H.G. Rectified diffusion during nonlinear pulsations of cavitation bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1965, vol. 37, no. 3, pp. 493-503. DOI
4. Crum L.A., Hansen G.M. Generalized equations for rectified diffusion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1982, vol. 72, no. 5, pp. 1586-1592. DOI
5. Al-Monnai M., Khabeev N.S. Radial oscillations of soluble vapor-gas bubbles in a liquid. *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 286-290. DOI
6. Barber B.P., Putterman S.J. Observation of synchronous picosecond sonoluminescence. *Nature*, 1991, vol. 352, pp. 318-320. DOI
7. Fyrrillas M.M., Szeri A.J. Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles. *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 277, pp. 381-407. DOI
8. Lofstedt R., Weninger K., Putterman S., Barber B.P. Sonoluminescing bubbles and mass diffusion. *Phys. Rev. E.*, 1995, vol. 51, P. 4400-4410. DOI
9. Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M.P. Phase diagrams for sonoluminescing bubbles. *Phys. Fluids*, 1996, vol. 8, pp. 2808-2826. DOI
10. Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., Parlitz U., Lauterborn W. The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, no. 2, pp. 227-230. DOI
11. Louisnard O., Gomez F. Growth by rectified diffusion of strongly acoustically forced gas bubbles in nearly saturated liquids. *Phys. Rev. E.*, 2003, vol. 67, no. 32, 036610. DOI
12. Sile T., Virbulis J., Timuhins A., Sennikovs J., Bethers U. Modelling of Cavitation and Bubble Growth During Ultrasonic Cleaning Process. *Proc. of International Scientific Colloquium Modelling for Material Processing, Riga, Latvia, September 16-17, 2010*, pp. 329-334.
13. Naji Meidani A.R., Hasan M. Mathematical and physical modelling of bubble growth due to ultrasound. *Appl. Math. Model.*, 2004, vol. 28, no. 4, pp. 333-351. DOI
14. Keller J.B., Miksis M. Bubble oscillations of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1980, vol. 68, no. 2, pp. 628-633. DOI
15. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*. Dover Publications, 2011. 800 p.
16. Crank J., Nicolson P.A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Math. Proc. Cambridge*, 1947, vol. 43, no. 1, pp. 50-67. DOI
17. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1993. 528 p.
18. Volkova E.V., Nasibullaeva E.S., Gumerov N.A. Numerical simulations of soluble bubble dynamics in acoustic fields. *Proc. of the ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress & Exposition (IMECE 2012)*, November 9-15, 2012, Houston, Texas, USA. 1 CD ROM, 2012, Article 86243, pp. 317-323. DOI
19. Crum L.A. Measurements of the growth of air bubbles by rectified diffusion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1980, vol. 68, no. 1, pp. 203-211. DOI
20. Eller A.I. Damping constants of pulsating bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1970, vol. 47, pp. 1469-1470. DOI

Поступила в редакцию 11.03.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014

## Сведения об авторах

Бутогина Екатерина Валерьевна, стажер-исслед., Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем Башкирского государственного университета (ЦМНДДС при БашГУ), 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32; email: ekaterina.butugina@gmail.com

Насибуллаева Эльвира Шамилевна, кфмн, снс, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН (ИМех УНЦ РАН), 450054, Россия, Уфа, пр. Октября, д. 71; email: elvira98@mail.ru

Гумеров Наиль Асатович, дфмн, проф., Институт передовых компьютерных исследований (UMIACS), Университет Штата Мэриленд, США, Room 3305, A.V. Williams Building, College Park, MD 20742, USA; email: gumerov@umiacs.umd.edu

Ахатов Искандер Шаукатович, дфмн, проф., Факультет инженерной механики Государственного университета Северной Дакоты, США, P.O. Box 6050, 210 Dolve Hall, Fargo, ND 58108, USA; email: Iskander.Akhatov@ndsu.edu