

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.3.22](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.22)
УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ УДАРНИКОВ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В.Л. Котов¹, А.Ю. Константинов^{1,2}

¹ НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
Нижегород, Российская Федерация

² Государственный научно-исследовательский институт машиностроения им. В.В. Бахирева,
Дзержинск, Нижегородская обл., Российская Федерация

Проводится анализ точности модели локального взаимодействия (МЛВ) при решении на ее основе задач удара и плоскопараллельного движения конических тел под углом к свободной поверхности полупространства, занимаемого грунтовой средой. Параметры квадратичной по скорости МЛВ определяются из решения задачи расширения сферической полости. При этом среда считается упругопластической, с линейными зависимостями «давление – объемная деформация» и «предел текучести – давление». С помощью компьютерного моделирования задачи в полной трехмерной постановке при действии сил поверхностного трения и с учетом установленных параметров модели находятся силовые и кинематические характеристики проникания конических ударников в грунт (силы сопротивления, скорости и траектории движения центров масс и углы поворота). Получено, что квадратичная по скорости МЛВ, удовлетворительно описывающая инерционное движение конического ударника по нормали к поверхности грунта, применима и для представления начальной стадии наклонного внедрения. Однако при входе ударников в грунт под углом получается несколько большая по сравнению с нормальным ударом погрешность в вычислении как силовых, так и кинематических характеристик, что обусловлено, по мнению авторов, исходными ошибками в задании нормального напряжения в используемых МЛВ и законе трения Кулона. Учет кулоновского трения приводит к увеличению максимального угла поворота ударника по сравнению с расчетами без сил трения, и МЛВ качественно описывает эту тенденцию.

Ключевые слова: удар, динамическое наклонное проникание, конический ударник, упругопластическая среда, модель локального взаимодействия, кулоновское трение, трехмерное моделирование

NUMERICAL MODELING OF THE PLANE-PARALLEL MOTION OF CONICAL PROJECTILES IN THE SOIL ENVIRONMENT BASED ON A LOCAL INTERACTION MODEL

V.L. Kotov¹ and A.Yu. Konstantinov^{1,2}

¹ Research Institute of Mechanics of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

² State Scientific Research Institute of Mechanical Engineering n.a. V.V. Bakhirev,
Dzerzhinsk, Nizhny Novgorod Region, Russian Federation

The paper considers the accuracy of a local interaction model applied to the solution of impact problems and the problems of the plane-parallel motion of conical bodies at an angle to the free surface of the soil-filled half space. The parameters of the local interaction model quadratic in speed are determined by solving the problem of expansion of a spherical cavity. The medium is considered to be an elastoplastic medium with linear pressure-volumetric strain and yield stress-pressure linear relationships. 3D modeling carried out using the obtained parameters of the model yields the force and kinematic characteristics of penetration of conical projectiles into the soil (resistance force, speed and trajectory of the motion of the center of mass, and rotation angles) under the action of surface friction. It has been found that the local interaction model quadratic in speed satisfactorily describes the inertial motion of a conical projectile that moves normally to the surface of the soil and thus can represent the initial stage of inclined indentation. However, when the projectiles enter the soil, an error in determining both the force and kinematic characteristics is somewhat greater compared to normal impact. According to the authors, this is caused by the errors introduced by presetting normal stress in the framework of the local interaction model and Coulomb's law of friction law. The Coulomb friction leads to an increase in the maximum angle of rotation of the projectile compared with the calculations ignoring friction forces, and the local interaction model qualitatively describes this trend.

Key words: impact, dynamic oblique penetration, conical projectile, elastic-plastic medium, local interaction model, Coulomb friction, three-dimensional modeling

Моделирование процессов внедрения жестких осесимметричных объектов в упругопластические и грунтовые среды представляет сложную проблему, в связи с чем получили развитие численные и полуэмпирические методы на основе упрощающих гипотез о характере взаимодействия тела и среды. Приближенному решению задач удара и проникания по нормали и под углом к свободной поверхности посвящено большое количество работ [1–19]. Отмечается [20], что среди приближенных подходов к моделированию процесса проникания сформировался достаточно большой класс математических моделей, основанных на гипотезе локального взаимодействия. Модели локального взаимодействия — МЛВ, использовались для поиска оптимальных форм проникающих объектов [21, 22], анализа устойчивости движения при осесимметричной и пространственной конфигурациях [11, 16, 18]. В работах [23–27] теоретически и экспериментально обоснована применимость квадратичной по скорости МЛВ для определения сил сопротивления внедрению по нормали в мягкий грунт острых конических тел

и нарушение условий приложения модели при наличии затупления. Ранее [19] изучались силовые характеристики взаимодействия конических ударников с грунтом при ударе и наклонном проникании без учета трения. Было показано, что квадратичная по скорости МЛВ, удовлетворительно описывающая процесс внедрения конического ударника по нормали к поверхности грунта, с несколько большей погрешностью может употребляться и при наклонном внедрении. В данной работе для конических ударников с различным углом раствора и углом падения проводится сравнение сил сопротивления, траекторий движения центров масс и углов поворота, полученных в рамках квадратичной МЛВ, с аналогичными результатами компьютерного моделирования в полной трехмерной постановке при учете трения.

Для описания плоскопараллельного движения твердого конического тела, имеющего высоту h и радиус основания R , рассмотрим его сечение плоскостью, проходящей через оси неподвижной системы координат Orz , ось Oz которой совпадает с осью симметрии тела, а ось Or перпендикулярна ей и проходит через центр основания конуса. Для плоской фигуры уравнения движения и вращения вокруг центра масс C (Рис. 1), согласно [28], имеют вид:

$$Mw_c = F, \quad J_C \dot{\omega} = K, \tag{1}$$

где M — масса тела; w_c и F — вектор ускорения центра масс и главный вектор сил, действующих на тело; ω — вектор угловой скорости вращения относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс; J_C и K — момент инерции и момент сил относительно этой же оси; точкой обозначено дифференцирование по времени. Введем также подвижную систему координат $O'r'z'$, связанную с телом и в начальный момент времени совпадающую с системой координат Orz .

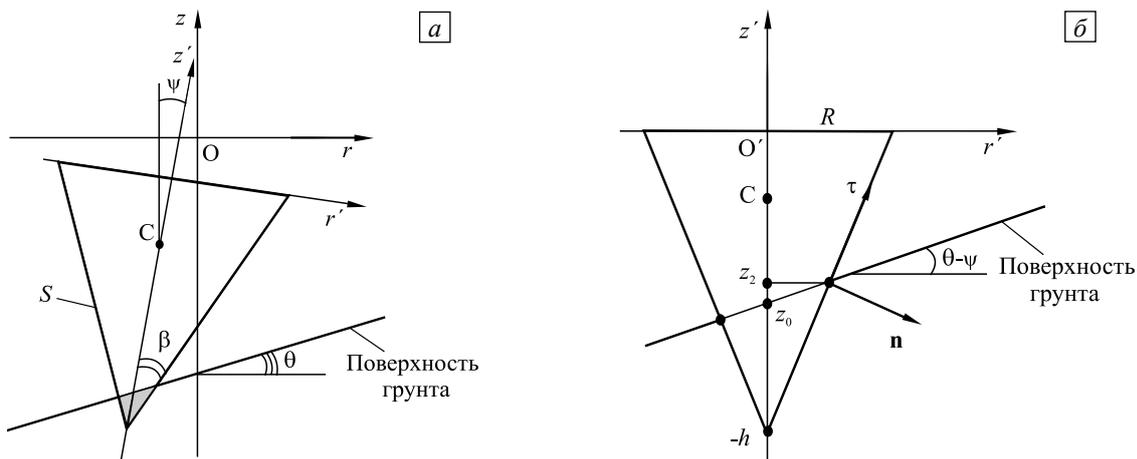


Рис. 1. Схемы к постановке задачи исследования движения конуса в грунтовой среде

Проектируя векторные равенства (1) на оси системы координат $O'r'z'$ и учитывая соотношения $w_c = \dot{v}_c + \omega \times v_c$ (v_c — вектор скорости центра масс [28]), получим:

$$M(\dot{v}_r - \omega v_z) = F_r, \quad M(\dot{v}_z + \omega v_r) = F_z, \quad J_C \dot{\omega} = J_C \ddot{\psi} = K, \tag{2}$$

где v_r, v_z и F_r, F_z — проекции векторов v_c и F на координатные оси Or', Oz' ; ω — проекция вектора угловой скорости ω на ось, перпендикулярную плоскости движения ($\omega_r = \omega_z = 0$), ψ — угол поворота вокруг центра масс.

В дополнение к подвижной системе координат $O'r'z'$ введем локальную координатную систему, связанную с боковой поверхностью S проникающего тела и образуемую вектором внешней нормали n и касательным вектором τ (Рис. 1б) Компоненты главного вектора сил F и величину момента сил K в соотношениях (2) найдем, прибегнув к интегрированию контактных напряжений, возникающих на поверхности S :

$$F_r = \int_{-h}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} r(z')(\sigma_n + \sigma_\tau \operatorname{tg} \beta) \cos \varphi d\varphi dz', \quad F_z = \int_{-h}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} r(z')(-\sigma_n \operatorname{tg} \beta + \sigma_\tau) d\varphi dz', \tag{3}$$

$$K = \int_{-h}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} r(z')[(r' - r_c)(-\sigma_n \operatorname{tg} \beta + \sigma_\tau) - (z' - z_c)(\sigma_n + \sigma_\tau \operatorname{tg} \beta)] \cos \varphi d\varphi dz',$$

где $r(z')$ — радиус окружности сечения конуса плоскостью $z' = \text{const}$; φ — угол, образующийся между радиусом $r(z')$ и положительным направлением оси r' в поперечном сечении конического ударника с углом раствора 2β ; σ_n и σ_τ — нормальные и касательные напряжения в элементе тела, определяемом углом φ и координатой z' ; r' , z' и r_c , z_c — координаты точки приложения вектора сил и центра масс соответственно.

Величины φ_2 , $r(z')$ и z_2 в (3), аналогично [29], рассчитываются по формулам

$$r(z') = (h + z') \text{tg}\beta, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{z' - z_0}{r(z')} \text{ctg}(\theta - \psi), \quad z_2 = \frac{z_0 + h \text{tg}\beta \text{tg}(\theta - \psi)}{1 - \text{tg}\beta \text{tg}(\theta - \psi)},$$

где z_0 — координата точки пересечения оси z' с поверхностью грунта; θ — угол, образованный осью Or и свободной поверхностью грунта. Данные формулы применяются при $z' < 0$, то есть до момента полного погружения миделя тела в среду; при $z' \geq 0$ полагаем $\varphi_2 = 2\pi$, $z_2 = 0$.

В соответствии с МЛВ считаем, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела. Также принимаем, что нормальное напряжение представляется в виде квадратичной зависимости от скорости, а касательное напряжение является кусочно-постоянной функцией и описывается законом Кулона

$$\sigma_n / \rho_0 = -H(v_n)(Av_n^2 + Bv_n + C), \quad \sigma_\tau = -\text{sgn } v_\tau k_f |\sigma_n|, \quad (4)$$

где H — функция Хевисайда; A , B и C — постоянные коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств среды, формы ударника и других составляющих; ρ_0 — начальная плотность среды; v_n и v_τ — нормальная и касательная компоненты вектора скорости внедрения, имеющей место в сечении конуса плоскостью $\varphi = \text{const}$, проходящей через ось симметрии; k_f — коэффициент трения. Если $v_n < 0$, то $\sigma_n = 0$, что соответствует отрыву среды от тела.

Величины сил в (3) при отсутствии отрыва потока и условии $k_f = 0$ обозначим верхним индексом 0, тогда, с учетом (4), получим следующие оценки:

$$F_r \approx (1 - k_f \text{tg}\beta) F_r^0, \quad F_z \approx (1 + k_f \text{ctg}\beta) F_z^0. \quad (5)$$

Компоненты вектора скорости в локальной системе координат вычислим по формулам

$$v_n = (v_{r'} - (z' - z_c)\omega) \cos \varphi \cos \beta - (v_{z'} + (r' - r_c)\omega \cos \varphi) \sin \beta, \quad \sigma_T = Y + kp;$$

$$v_\tau = (v_{r'} - (z' - z_c)\omega) \cos \varphi \sin \beta + (v_{z'} + (r' - r_c)\omega \cos \varphi) \cos \beta.$$

Для завершения описания движения необходимо конкретизировать способ задания параметров модели среды и МЛВ (4). Положим, что грунтовая среда упругопластическая, с линейными функциональными зависимостями

$$\sigma_T = Y + kp, \quad p = K_e e, \quad c = a + \lambda U, \quad (6)$$

при этом σ_T — ее предел текучести, p — давление, e — объемная деформация, c — скорость ударной волны, U — массовая скорость за фронтом ударной волны, K_e — модуль объемного сжатия, постоянные Y и k отвечают за сцепление и внутреннее трение грунта, величина a характеризует скорость распространения волны сжатия в грунте при малых давлениях, λ — предельную сжимаемость грунта.

Параметры МЛВ, в соответствии с известным подходом [30], найдем из приближенного решения задачи расширения сферической полости [24, 31–33]. Для модели среды (6) это решение записывается следующим образом:

$$\sigma = \rho c^2 s, \quad \rho = \rho_0 / (1 - \varepsilon^3), \quad \varepsilon = U/c, \quad c = \lambda^{1/3} U + a/3,$$

$$s = \left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \cdot \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \cdot \varepsilon^{4-2\mu} \right) \varepsilon^2 - (1 + \varepsilon^{-2\mu}) \frac{Y}{\mu}, \quad (7)$$

$$\mu = \kappa / (1 + 2/3\kappa), \quad \mu \neq 0, \quad \mu \neq 0,5,$$

где σ — напряжение на границе полости, U — скорость расширения полости, ρ — плотность грунта за фронтом ударной волны.

Аналитическое решение (7), полученное в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны, учитывает динамическую сжимаемость и сопротивление грунта сдвигу в рамках модели (6). Чтобы сделать решение применимым в расчетах, в формуле (7) положим $\sigma_n = \sigma$, $v_n = U$. Коэффициенты A , B и C в заданном диапазоне изменения скоростей определим методом наименьших квадратов. Таким образом, движение тела во времени представляется решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) относительно величин v_r, v_z, ω и ψ при следующих начальных условиях ($t = 0$):

$$v_r = 0, \quad v_z = -V_0, \quad \omega = 0, \quad \psi = 0. \quad (8)$$

Задача Коши (2), (8) решалась численно, методом Эйлера, на отрезке времени $[0, T]$ с постоянным шагом Δt . На каждом временном отрезке кратный интеграл (3) вычислялся путем последовательного интегрирования по переменным φ и z , после чего осуществлялось суммирование результатов по всем отрезкам, и получалась составная формула Симпсона.

В момент полного погружения тела в грунт подинтегральные выражения в (3), описывающие силу сопротивления и момент сил в подвижной системе координат $O'r'z'$, являются полиномами степени не выше третьей относительно переменных φ и z . В силу этого формулы интегрирования четвертого порядка позволяют точно установить величины силовых характеристик в каждый момент времени при отсутствии отрыва потока среды от поверхности тела.

Тестирование численной методики решения системы уравнений (2)–(8) осуществлялось с использованием полученных ранее (см. [19]) аналитических выражений для компонент вектора силы и момента (без учета трения), которые применимы только с момента полного погружения тела до начала отрыва среды от тела. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $a = 516,4$ м/с; $\lambda = 0,5$; $\rho_0 = 2000$ кг/м³; $Y = 0,5$ МПа; $k = 1,0$; $V_0 = 150$ м/с; $k_f = 0,3$. Значения коэффициентов трехчленной МЛВ (4) при изменении скорости v_n в диапазоне от 30 м/с до 100 м/с составили: $A = 1,2$; $B = 0,95V_0$; $C = 0,034V_0^2$ [19].

Для верификации изложенной методики на основе МЛВ также рассматривалась задача проникания конического ударника в упругопластическую среду с учетом кулоновского трения. Задача имела полную трехмерную постановку и решалась с помощью коммерческого программного продукта LS-DYNA. Ударник моделировался как недеформируемое жесткое тело (*MAT_RIGID), грунт — как упругопластическая среда (*MAT_SOIL_AND_FOAM), поведение которой, согласно модели, описывалось как (см. [34]) $\sigma_T^2 = 3(a_0 + a_1 p + a_2 p^2)$, $p = K_e e$. Для приведения в соответствие этих выражений связи предела текучести с давлением и давления с объемной деформацией с принятыми линейными зависимостями (6) полагали, что $a_0 = Y^2/3$, $a_1 = 2kY/3$, $a_2 = k^2/3$, $K_e = \rho_0 a^2 / (1 + 2k/3)$.

Решение проводилось в постановке FSI (Fluid Structure Interaction), при которой уравнения движения ударника интегрировались в лагранжевой системе координат, а при получении уравнений для грунта использовалась эйлерова сетка. Взаимодействие ударника и упруго-пластической среды изображалось специальным типом контакта (CONSTRAINED_LAGRANGE_IN_SOLID).

В качестве тестовых примеров рассмотрено проникание под углом $\theta = \pi/3$ к свободной поверхности грунта конусов массой $M = 40$ г с углами полураствора $\beta = \pi/6, \pi/4$ и $\pi/3$ и начальной скоростью $V_0 = 150$ м/с. Конусы имели постоянный радиус основания $R = 0,01$ м, а их высота составляла $h = R/tg\beta$. Координаты центра масс в подвижной системе координат $O'r'z'$ равнялись $r_c = 0$, $z_c = -h/4$, момент инерции — $J_c = 3M(4R^2 + h^2)/80$.

Погрешность решения задач в пакете LS-DYNA определялась из анализа решений на сгущающихся сетках, фрагмент такой (средней по величине) расчетной сетки приведен в [19]. Силы сопротивления, полученные в численных расчетах, имели осциллирующий в пределах 5-10% характер. Осредненные кривые решений для конкретного конуса, найденные на различных сетках, отличались друг от друга менее, чем на 5%, что было принято за оценку погрешности численных расчетов. Ранее в [19] получено,

что погрешность МЛВ (4), (6), (7) при решении задач нормального проникания конуса с углом полураствора $\beta = \pi/6$ не превышает именно 5%. Таким образом, если далее будут возникать большие отличия при описании наклонного проникания, то они не будут связаны с ошибками учета в МЛВ свойств среды проникания.

В процессе счета анализировалось влияние трения на компоненты интегральной силы взаимодействия ударника с грунтом. Компоненты главного вектора силы сопротивления в неподвижной системе координат Oxz представлены на рисунке 2 в безразмерном виде. Угол полураствора ударника β и другие характеристики составляли: $\beta = \pi/4$, $F^* = \rho_0 V_0^2 \pi R^2 / 2$, $t^* = V_0 / h^*$, $h^* = R / \operatorname{tg} \beta + R \operatorname{tg} \theta$, где время t^* соответствует моменту полного погружения тела в грунт (угловое движение в расчет не принималось).

На рисунке 2 кривые 1, 2 согласуются с осевыми (F_z), а кривые 3, 4 с радиальными (F_r) компонентами главного вектора силы сопротивления внедрению. Силы сопротивления внедрению, обозначенные сплошными линиями с номерами 1, 3, получены при учете трения Кулона ($k_f = 0,3$), штриховые линии с номерами 2, 4 отвечают $k_f = 0$. Наблюдается хорошее качественное совпадение результатов трехмерных расчетов (Рис. 2а) и расчетов в рамках МЛВ (Рис. 2б), изменение силы сопротивления при учете трения адекватно оценкам (5). Ошибка МЛВ в величине амплитуды сил может превышать 25%, а с учетом трения она становится еще больше.

На рисунке 3 представлены компоненты главного вектора силы сопротивления внедрению конусов с углами полураствора $\pi/6$ (а) и $\pi/3$ (б) при ударе под углом $\pi/3$ к поверхности грунта при учете трения. Сплошными линиями обозначены результаты, полученные в трехмерных расчетах, штриховыми — согласно МЛВ. Кривые 1, 2 соответствуют осевым компонентам вектора силы, кривые 3, 4 — радиальным. Видно, что с ростом угла раствора конуса ошибка МЛВ возрастает.

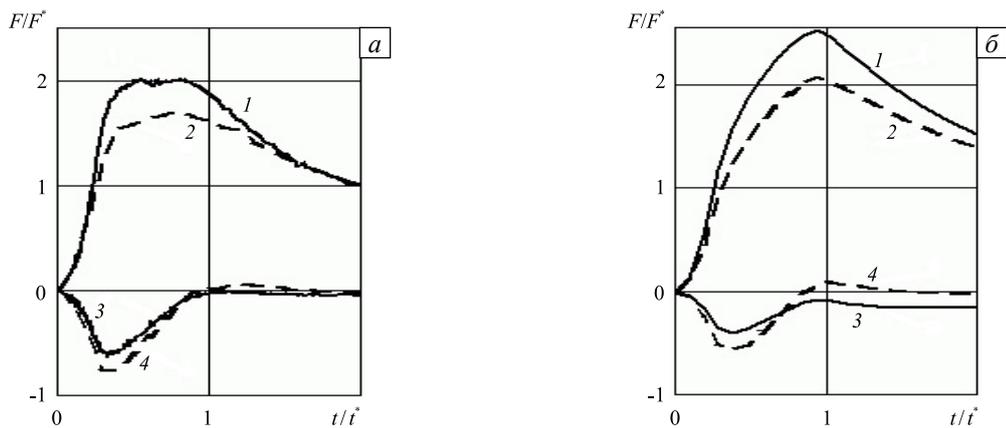


Рис. 2. Безразмерные осевые (кривые 1, 2) и радиальные (3, 4) компоненты главного вектора силы сопротивления внедрению, полученные в трехмерных расчетах (а) и по МЛВ (б) с учетом сил трения ($k_f = 0,3$ – сплошные линии) и без учета ($k_f = 0$ – штриховые линии) в задаче внедрения под углом $\pi/3$ к поверхности грунта конуса с углом полураствора $\pi/4$

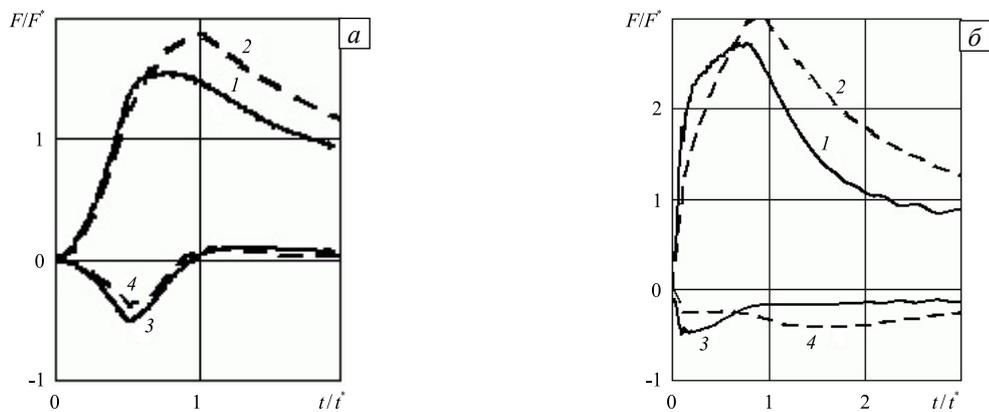


Рис. 3. Безразмерные осевые (кривые 1, 2) и радиальные (кривые 3, 4) компоненты главного вектора силы сопротивления внедрению конусов с углами полураствора $\pi/6$ (а) и $\pi/3$ (б) при ударе под углом $\pi/3$ к поверхности грунта при учете трения; сплошные и штриховые линии – соответственно результаты расчетов в трехмерной постановке и в рамках МЛВ

Как отмечалось ранее [23, 26, 27], с ростом угла раствора конуса ошибка применимости МЛВ к расчету силы сопротивления внедрению по нормали растет, что отмечается и при наклонном проникании (см. Рис 3 и также Рис. 2). Можно предположить, что радиальная компонента вектора силы будет удовлетворительно описываться и для конусов с углом раствора, меньшим $\pi/6$.

На рисунке 4 приводятся величины углов поворота вокруг центров масс конусов, имеющих углы полураствора $\beta = \pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$ соответственно, в зависимости от безразмерного времени (величина t^*

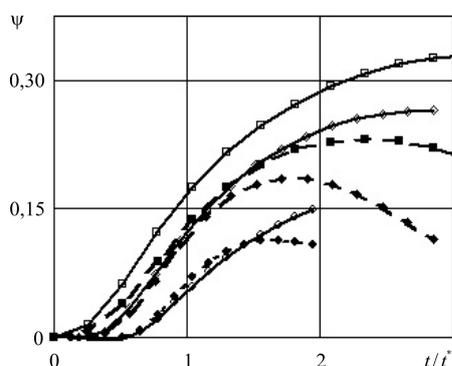


Рис. 4. Угол поворота конуса относительно центра масс в зависимости от безразмерного времени: точки, ромбы и квадраты соответствуют углам полураствора конусов $\beta = \pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$; результаты расчетов в трехмерной постановке показаны светлыми маркерами \circ , \diamond , \square ; по МЛВ – темными маркерами \bullet , \blacklozenge , \blacksquare .

рассчитывалась отдельно для каждого угла полураствора конуса). Светлыми маркерами обозначены результаты, полученные в численных расчетах в трехмерной постановке, темными — полученные в рамках МЛВ. Отмечается нормализация положения конусов при погружении на глубину, большую высоты конуса (положительное значение угла соответствует повороту против часовой стрелки), а также при этом конус с меньшей высотой имеет больший угол поворота. Сравнение результатов расчетов с учетом и без учета трения показало, что кулоновское трение приводит к некоторому увеличению максимального угла поворота, обратно пропорциональному углу раствора конуса. МЛВ качественно описывает эту тенденцию. Удовлетворительное количественное соответствие числовых данных, полученных по различным методикам, наблюдается только на ранней стадии внедрения, увеличение ошибки при использовании МЛВ происходит как с ростом β , так и с ростом глубины погружения.

На рисунке 5а представлены безразмерные смещения центров масс конусов с углами полураствора $\beta = \pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$ в системе координат Oxz . Видно, что преобладает движение в осевом направлении при малом относительном смещении в радиальном направлении.

На рисунке 5б приведены безразмерные радиальные компоненты векторов скоростей центров масс (отнесены к величине начальной скорости в осевом направлении) в зависимости от безразмерного времени. Компоненты векторов скоростей в осевом направлении не приводятся, так как наблюдается достаточно хорошее совпадение кривых — падение скорости V_z от начальной величины V_0 при $t/t^* = 1$ составляет 18-20%, а при $t/t^* = 2$ находится в интервале 35-45% для всех рассматриваемых конических ударников (величина $t/t^* = 1$ соответствует моменту контакта всей боковой поверхности конусов с грунтом).

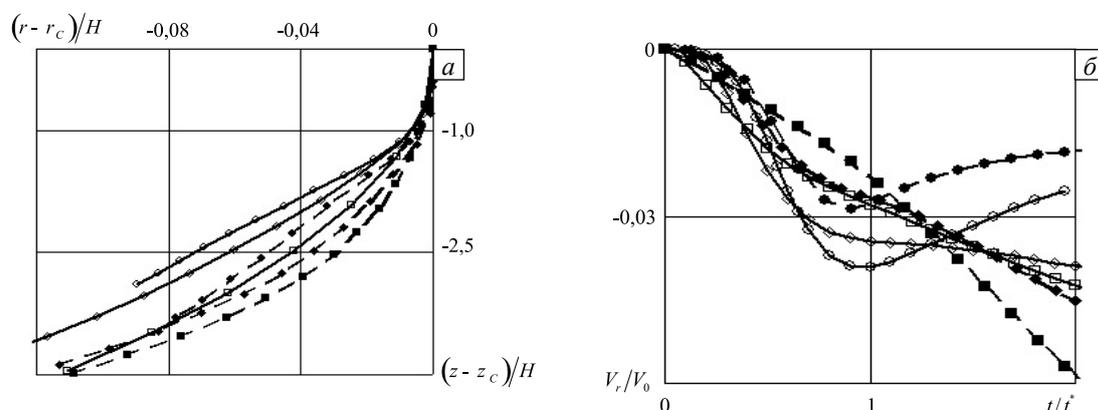


Рис. 5. Траектории движения центров масс конусов (а) и радиальные компоненты векторов скоростей центров масс в зависимости от времени (б); точки, ромбы и квадраты соответствуют углам полураствора конусов $\beta = \pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$; результаты расчетов в трехмерной постановке показаны светлыми маркерами \circ , \diamond , \square ; по МЛВ – темными маркерами \bullet , \blacklozenge , \blacksquare .

Таким образом, из полученных результатов следует, что квадратичная по скорости МЛВ, удовлетворительно описывающая движение по инерции конического ударника по нормали к поверхности грунта [19, 23, 26, 27], применима и для описания наклонного внедрения в интервале от $t/t^* = 0$ до момента контакта всей боковой поверхности конуса с грунтом ($t/t^* \sim 1$). По сравнению с нормальным ударом наблюдается несколько бóльшая погрешность определения силовых и кинематических характеристик, что обусловлено ошибками вычисления нормального напряжения при заданном законе трения Кулона. Учет кулоновского трения приводит к увеличению максимального угла поворота ударника по сравнению с расчетами без трения, и МЛВ качественно описывает эту тенденцию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-2843.2012.8) и РФФИ (проекты № 13-08-00531_а, 13-08-00658_а).

Литература

1. Сагомонян А.Я. Проникание. – М.: Изд-во МГУ. 1974. 299 с.
2. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. Прикладная теория проникания. – М.: Наука, 1992. – 105 с.
3. Григорян С.С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // МЖГ. – 1993. – № 4. – С. 18-24.
4. Высокоскоростное взаимодействие тел / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.
5. Осипенко К.Ю., Симонов И.В. Модель пространственной динамики тела вращения при взаимодействии с малопрочной средой и несимметричной кавитации // МТТ. – 2002. – № 1. – С. 143-153.
6. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // ПММ. – 2003. – Т. 67, № 4. – С. 686-697.
7. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors // Int. J. Solids Struct. – 2007. – Vol. 44, no. 7-8. – P. 2593-2607. DOI
8. Осипенко К.Ю. Проникание тела вращения в упругопластическую среду // МТТ. – 2009. – № 2. – С. 169-180. DOI
9. Баландин В.В., Брагов А.М., Крылов С.В., Цветкова Е.В. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 15-23. DOI
10. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // ЖТФ. – 2011. – Т. 81, № 7. – С. 94-104. DOI
11. Якунина Г.Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // ПММ. – 2012. – Т. 76, № 3. – С. 429-449.
12. Линник Е.Ю. Численное исследование волнового механизма формирования силы сопротивления внедрению тел вращения в грунтовые среды // Вестник ННГУ. – 2013. – № 1(1). – С. 164-169.
13. Бабаков В.А., Шабунин Е.В. Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде // ФТПРПИ. – 1987. – № 1. – С. 105-110.
14. Roisman I.V., Yarin A.L., Rubin M.B. Oblique penetration of a rigid projectile into an elastic-plastic target // Int. J. Impact Eng. – 1997. – Vol. 19, no. 9-10. – P. 769-795. DOI
15. Баженов В.Г., Котов В.Л. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 3. – С. 391-402.
16. Шамолин М.В. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23, № 12. – С. 79-104.
17. Шамолин М.В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 10. – С. 109-132.
18. Осипенко К.Ю. Об устойчивости пространственного движения тела вращения в упругопластической среде // МТТ. – 2012. – № 2. – С. 68-77. DOI
19. Котов В.Л., Константинов А.Ю., Кибец Ю.И., Тарасова А.А., Власов В.П. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в упругопластической среде // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75, № 4. – С. 303-311.
20. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review // Appl. Mech. Rev. – 2005. – Vol. 58, no. 6. – P. 355-371. DOI
21. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review // Central European Journal of Engineering. – 2012. – Vol. 2, no. 4. – P. 473-482. DOI
22. Крайко А.Н., Якунина Г.Е. К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимодействия // ПММ. – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 41-53. DOI
23. Котов В.Л. Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник – грунт» // Проблемы прочности и пластичности. – 2008. – Т. 70. – С. 123-131.
24. Котов В.Л., Баландин В.В., Линник Е.Ю., Баландин В.В. О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 435-442. DOI
25. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // ДАН. – 2013. – Т. 449, № 2. – С. 156-159. DOI
26. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 114-125. DOI

27. Линник Е.Ю. Определение параметров модели локального взаимодействия при внедрении конических ударников в песчаный грунт // Вестник ННГУ. – 2014. – № 1(1). – С. 186-191.
28. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – 640 с.
29. Колесников В.А. Об изменении траектории метеорита при входе в грунт // МТТ. – 1981. – № 4. – С. 99-104.
30. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55, no. 2. – P. 275-279. DOI
31. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Макарова А.А., Тарасова А.А. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде // Проблемы прочности и пластичности. – 2011. – Т. 73. – С. 58-63.
32. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи о расширении сферической полости в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Т. 74. – С. 49-58.
33. Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л. Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // ПММ. – 2014. – Т. 78, № 1. – С. 98-115.
34. Kreig R.D. A Simple constitutive description for cellular concrete / Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Rept. SC-DR-72-0883, 1972. <http://prod.sandia.gov/techlib/access-control.cgi/1972/720883.pdf> (дата обращения: 20.06.2014).

References

1. Sagomonyan A.Ya. *Pronikanie* [Penetration]. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1974. 299 p.
2. Aptukov V.N., Murzakaev P.T., Fonarev A.V. *Ppikladnaya teoriya pponikaniya* [Applied theory of penetration]. Moscow: Nauka, 1992. 105 p.
3. Grigoryan S.S. Priblizhennoe reshenie zadachi o pronikanii tela v grunt [An approximate solution of the problem of the penetration of a body into soil]. *Fluid Dyn.*, 1993, vol. 28, no. 4, pp. 444-449.
4. *Vysokoskorostnoe vzaimodejstvie tel* [High-speed interaction of bodies]. Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: SB RAS, 1999. 600 p.
5. Osipenko K.Yu., Simonov I.V. A model of 3D dynamics of a body of revolution interacting with low-strength media and nonsymmetric cavitation. *Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 2002, vol. 37, no. 1, pp. 119-128.
6. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L., Kochetkov A.V. The investigation of bodies of revolution striking upon and penetrating soft soils. *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 686-697.
7. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors. *Int. J. Solids Struct.*, 2007, vol. 44, no. 7-8, pp. 2593-2607. DOI
8. Osipenko K.Yu. Penetration of a body of revolution into an elastoplastic medium. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 311-321. DOI
9. Balandin V.V., Bragov A.M., Krylov S.V., Tsvetkova Y.V. Experimental and theoretical study of penetration of spheroconical bodies into a sand target. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 15-23. DOI
10. Veldanov V.A., Markov V.A., Pusev V.I., Ruchko A.M., Sotskii M.Yu., Fedorov S.V. Computation of nondeformable striker penetration into low-strength obstacles using piezoelectric accelerometry data. *Technical Physics*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 992-1002. DOI
11. Yakunina G.E. Osobennosti vysokoskorostnogo dvizheniya tel v plotnyh sredakh [Characteristic features of the high-velocity motion of bodies in dense media]. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 3, pp. 429-449.
12. Linnik E.Yu. Numerical simulation of the wave formation mechanism of the force of resistance to penetration of bodies of revolution into soil medium. *Bulletin of the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*, 2013, no. 1(1), pp. 164-169.
13. Babakov V.A., Shabunin E.V. Ob odnom metode rascheta pnevmoprobojnika v deformiruemoj srede [A method for calculating pneumodrills in a deformable medium]. *Journal of Mining Science*, 1987, no. 1, pp. 105-110.
14. Roisman I.V., Yarin A.L., Rubin M.B. Oblique penetration of a rigid projectile into an elastic-plastic target. *Int. J. Impact Eng.*, 1997, vol. 19, no. 9-10, pp. 769-795. DOI
15. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Analysing the problems of oblique penetration of axisymmetrical strikers into soft rocks based on the local interaction models. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 3, pp. 391-402.
16. Shamolin M.V. Rigid body motion in a resisting medium. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Simulation*, 2011, vol. 23, no. 12, pp. 79-104.
17. Shamolin M.V. The problem of a rigid body motion in a resisting medium with the assumption of dependence of the force moment from the angular velocity. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Simulation*, 2012, vol. 24, no. 10, pp. 109-132.
18. Osipenko K.Yu. Stability of spatial motion of a body of revolution in an elastoplastic medium. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 2, pp. 212-220. DOI
19. Kotov V.L., Konstantinov A.Yu., Kibec Yu.I., Tarasova A.A., Vlasov V.P. Numerically modeling plane-parallel displacement of conical strikers in an elastoplastic medium. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, vol. 75, no. 4, pp. 303-311.
20. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58, no. 6, pp. 355-371. DOI
21. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review. *Central European Journal of Engineering*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 473-482. DOI
22. Kraiko A.N., Yakunina G.E. Optimal body design using localized interaction models. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 1, pp. 26-32. DOI
23. Kotov V.L. Studying the applicability of the auto-modeling analysis of the problem of expansion of a spherical cavity in a compressible medium for determining the pressure on the surface of the striker-soil contact. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2008, vol. 70, pp. 123-131.

24. Kotov V.L., Balandin V.V., Linnik E.Y., Balandin V.V. Applicability of the local interaction model for determining nonlinear-compressible soil resistance to sphere penetration. *Vysisl. meh. spos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 435-442. DOI
25. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Linnik E.Yu. Models of calculation of axisymmetrical solids with the lowest drag during motion in soils. *Doklady Akademii Nauk – Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 100-103. DOI
26. Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.Yu. Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 612-621. DOI
27. Linnik E.Yu. Opredelenie parametrov modeli lokal'nogo vzaimodejstviya pri vnedrenii konicheskikh udarnikov v peschanyj grunt [Determining model parameters of local interaction at the penetration of conical-nose projectiles into sandy soil]. *Bulletin of the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*, 2014, no. 1(1), pp. 186-191.
28. Loitsyanskii L.G., Lurie A.I. *Kurs teoreticheskoy mehaniki* [A course of theoretical mechanics], Vol. 2. Moscow: Nauka, 1983. 640 p.
29. Kolesnikov V.A. Ob izmenenii traektorii meteorita pri vhode v grunt [Change in the trajectory of a meteorite at its entry into the soil]. *Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 1981, no. 4, pp. 99-104.
30. Forrestal M. J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, no. 2, pp. 275-279. DOI
31. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Makarova A.A., Tarasova A.A. The analysis of approximate solutions of a spherical cavity expansion in a soil medium problem. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2011, vol. 73, pp. 58-63.
32. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2012, vol. 74, pp. 49-58.
33. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S., Kotov V.L. Analysis of models for calculating the motion of bodies of revolution of minimum drag in soil environments. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 98-115.
34. Kreig R.D. A simple constitutive description for cellular concrete. Available at: <http://prod.sandia.gov/techlib/access-control.cgi/1972/720883.pdf> (accessed 20 June 2014).

Поступила в редакцию 29.01.2014; опубликована в электронном виде 10.10.2014

Сведения об авторах

Котов Василий Леонидович, дфмн, снс, внс, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики ННГУ), 603950, Нижний Новгород, ГСП-1000, пр. Гагарина, д. 23, корп. 6; e-mail: vkotov@inbox.ru

Константинов Александр Юрьевич, ктн, нс, Государственный научно-исследовательский институт машиностроения им. В.В. Бахирева (ОАО «ГосНИИмаш»), 606002, Нижегородская обл., г. Дзержинск, ул. Свердлова, д. 11А; e-mail: constantinov.al@yandex.ru