

DOI: [10.7242/1999-6691/2015.8.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.3.20)
УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИСКРЕТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

И.Г. Емельянов

*Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация*

В работе рассматривается подход к решению задач нахождения напряженного состояния оболочек вращения с применением дискретных рядов Фурье, то есть рядов Фурье, состоящих из функций, заданных на дискретном множестве точек. Решение осуществляется в рамках классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Напряженное состояние оболочки определяется для случая переменных вдоль образующей параметров и сводится к системе уравнений в частных производных. Представление разрешающих функций в виде рядов позволяет понизить размерность задачи, свести ее к одномерной и решить численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова. Поскольку функции, входящие в ряды Фурье, задаются на дискретном множестве точек, то с целью создания этого множества сначала на поверхность оболочки наносится криволинейная сетка с равным шагом по меридиану. Затем образующиеся окружности разбиваются на одинаковое число частей. Таким образом получается не только множество узлов, но и множество виртуальных элементов, покрывающих оболочку. Считается, что на созданном множестве виртуальных элементов известно значение распределенных нагрузок. В работе предлагается аппроксимировать нагрузки разложениями в дискретный ряд Фурье по косинусам и синусам, что дает возможность описывать их в случае, когда они произвольны и несимметричны. Приведены примеры вычисления напряженного состояния изотропных и ортотропных оболочек с помощью аналитических и дискретных рядов Фурье. Установлены погрешность аппроксимации различных заданных функций с помощью дискретных рядов и необходимое количество удерживаемых гармоник.

Ключевые слова: ортотропная оболочка вращения, напряженное состояние, виртуальный элемент, дискретный ряд Фурье, метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова

APPLICATION OF DISCRETE FOURIER SERIES TO THE STRESS ANALYSIS OF SHELL STRUCTURES

I.G. Emel'yanov

*Institute of Engineering Science UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

A method for the solution of problems associated with determination of the stress state of shells of revolution using a discrete Fourier-series method is proposed. In the present work the classical theory based on Kirchhoff–Lova hypotheses is used to describe the stress state of shells. The problem of determination of the stress state of a shell with variable parameters along a generatrix is reduced to the solution of the system of partial differential equations. Discrete Fourier series are the set of functions defined on a discrete set of points. This method allows one to reduce the dimension of the problem and to solve it by the numerical Godunov's method of discrete orthogonalization. As the approach based on application of a discrete Fourier-series for the functions set on a discrete ensemble of points is used, the curvilinear grid with an equal step on a meridian is plotted on the shell surface. The circles obtained are broken into equal amounts. This yields a set of virtual shell elements. It is recognized that the value of distributed loads on this set of virtual elements is known. We suggest to approximate loads using a discrete Fourier series expansion in cosines and sines, which makes it possible to describe any asymmetric loading. Examples of application of analytical and discrete Fourier series to calculation of isotropic and the orthotropic of shells are given. The errors in approximating the given functions are defined by discrete series. For all the problems the necessary number of harmonics is determined. On necessary retention of the quantity of summable harmonics, the approximating function describes rather precisely various external superficial loading modes. The approximation error obtained by the Fourier series expansion method proposed here is insignificant, and this provides a description of any asymmetric loading. Application of discrete Fourier series makes it possible to reduce the dimension of the problem and to determine the stress state of shells of revolution.

Key words: orthotropic rotation shells, stress state, virtual element, discrete Fourier-series method, Godunov's method of discrete orthogonalization

1. Введение

При решении двумерных краевых задач определения напряженного состояния тонкостенных оболочек в рамках механики оболочек зачастую прибегают к дифференциальным уравнениям в частных производных. Во многих случаях подходы основываются на представлении решения в виде рядов Фурье по одной из координат [1–3]. Это позволяет понизить размерность задачи и свести ее к одномерной, решение которой затем может быть получено с использованием аналитических или численных методов.

Ретроспективный взгляд на применение тригонометрических рядов при расчете оболочек в случаях локальных воздействий нагрузок можно найти в работе [4]. Отметим, что, по-видимому, первые работы по расчету оболочек с помощью рядов провели У. Финстервальдер и Г. Рейснер в тридцатые годы прошлого века [4]. С тех пор вышли сотни работ, в которых решение задач определения напряженно-деформированного состояния оболочек осуществлялось с привлечением различных видов рядов,

в том числе и рядов Фурье. И всегда приходилось отвечать на непростые вопросы: как подобрать коэффициенты ряда, наилучшим образом аппроксимирующие необходимые функции; сколько членов ряда необходимо удерживать в решении и другие.

В данной работе подход к нахождению напряженного состояния оболочек основывается на применении дискретных рядов Фурье. При этом напряженное состояние описывается суммой двух независимых функций, каждая из которых представляет собой дискретный ряд Фурье по косинусам и синусам, что позволяет рассматривать произвольный несимметричный случай нагружения конструкции. Проведено сопоставление результатов использования аналитических и дискретных рядов Фурье для определения напряженного состояния изотропных и ортотропных оболочек.

Запись в виде дискретного ряда Фурье становится актуальной в связи с упрощением осуществления решения благодаря развитию вычислительной техники и появлению различных сеточных методов для анализа разного рода элементов конструкций [5–7].

Пусть напряженное состояние упругой оболочки в ортогональной криволинейной системе координат $O\alpha\beta$ описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [7]:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} = \Phi_i \left(\alpha, \beta, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k} \right) + f_i(\alpha, \beta) \quad (i, j, k = \overline{1, l}), \quad (1)$$

где $Z_i = Z_i(\alpha, \beta)$ ($\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$) — искомые разрешающие функции; Φ_i — функции, линейные относительно своих аргументов; $f_i(\alpha, \beta)$ — правые части. Данная система дополняется граничными условиями на контуре $\alpha = \text{const}$. Если оболочки вращения будут замкнутыми в направлении $O\beta$, то граничные условия в этом направлении следует заменить условиями периодичности.

Краевая задача, изображаемая системой (1), позволяет вследствие периодичности всех искомых функций представить их в виде рядов Фурье по координате β . Однако это осуществимо, если все члены уравнений с соответствующими коэффициентами не препятствуют разделению переменных в этом направлении. Для некоторых моделей оболочек система (1) содержит члены с коэффициентами, зависящими от жесткостных параметров, что делает невозможными разделение переменных и представление искомых функций в виде рядов Фурье, но принципиальных затруднений не создает. В такие системы вводятся некоторые добавки, выражающиеся через разрешающие функции и их производные [7]. При решении прикладных задач в случае тонких оболочек можно использовать либо классическую модель оболочки, либо модели, основанные на других, менее жестких, гипотезах.

2. Постановка задачи

Исследуем оболочки вращения (в общем случае слоистые и ортотропные) в геометрически и физически линейной постановке. Для описания состояния оболочки воспользуемся уравнениями классической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Координатную поверхность оболочки отнесем к криволинейной ортогональной системе $O s \theta$, где s — длина дуги меридиана, θ — центральный угол в сечении, перпендикулярном оси вращения z (Рис. 1).

Задача определения напряженного состояния оболочки (1) с переменными вдоль образующей параметрами сводится к системе уравнений в частных производных [2]

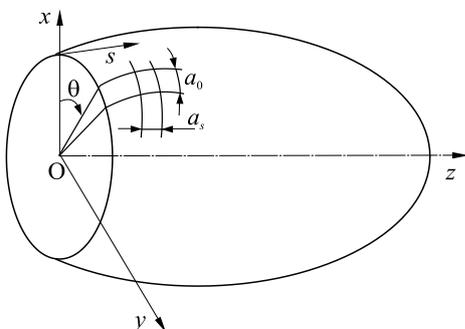


Рис. 1. Виртуальный оболочечный элемент с размерами a_s и a_0 по меридиану и окружности

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_m(s) \frac{\partial^m \mathbf{Y}}{\partial \theta^m} + \mathbf{f}(s, \theta), \quad (2)$$

$$\mathbf{Y} = \{ N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s \}^T, \quad (3)$$

где \mathbf{Y} — вектор разрешающих функций; N_r , N_z — радиальное и осевое усилия; u_r , u_z — радиальное и осевое перемещения; \hat{S} — сдвигающее усилие; M_s — меридиональный изгибающий момент; v — окружное перемещение; ϑ_s — угол поворота нормали к контуру s . Элементы матрицы A_m зависят от геометрических и механических характеристик оболочки, компоненты вектора \mathbf{f} — от поверхностных нагрузок.

Все многообразие внешних силовых воздействий можно описать компонентами действующей распределенной нагрузки: касательной к образующей (q_s), касательной к направляющей (q_0), нормальной к поверхности (q_r) оболочки, если представить их в виде разложений [2]

$$q_s(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_s(s) \cos k\theta, \quad q_0(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} q_0(s) \sin k\theta, \quad q_r(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_r(s) \cos k\theta, \quad (4)$$

где k — номер гармоники.

В силу периодичности компонент поверхностной нагрузки все функции, определяющие состояние оболочки, можно разложить в ряд Фурье по окружной координате θ . Имеем [2]:

– для симметричных компонент вектора разрешающих функций $N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, \vartheta_s$

$$\Phi(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(s) \cos k\theta, \quad (5)$$

– для антисимметричных компонент \hat{S}, v

$$\Psi(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(s) \sin k\theta. \quad (6)$$

Разложения (5) и (6) можно использовать лишь при условии, что симметричные компоненты вектора разрешающих функций (3) симметричны относительно вертикальной оси x . При этом угол θ отсчитывается от оси так, как показано на рисунке 1. Тогда все компоненты вектора (3) раскладываются либо только по косинусам, либо только по синусам. Таким образом, с учетом разложения вида (4)–(6) система в частных производных (2) сводится к k системам обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка в нормальной форме [2, 8]

$$\frac{d\mathbf{Y}}{ds} = A_k(s) \mathbf{Y}_k + \mathbf{f}_k(s) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$A_k(s) = \left\| a_{ij}^{(k)}(s) \right\| \quad (i, j=1, \dots, 8), \quad s_0 \leq s \leq s_L, \quad \mathbf{f}_k = \{f_{1k}, f_{2k}, \dots, f_{8k}\},$$

с граничными условиями $B_1 \mathbf{Y}(s_0) = \mathbf{b}_1, B_2 \mathbf{Y}(s_L) = \mathbf{b}_2$. Здесь B_1, B_2 — заданные матрицы, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ — заданные векторы.

Краевую задачу (7) с соответствующими граничными условиями будем решать методом дискретной ортогонализации [2, 9], основанном на ортогонализации векторов решений задач Коши в конечном числе точек изменения аргумента. Во многих случаях система (7) за счет неоднородности механических и геометрических параметров и нагрузки является жесткой и содержит амплитудные значения разрешающих функций. Ряды Фурье для функций (4)–(6) будем строить на дискретном множестве точек [10, 11].

При решении прикладных задач обычно удерживают несколько первых членов дискретного ряда Фурье, так как коэффициенты Фурье быстро убывают, и вследствие этого уменьшается влияние больших гармоник. Скорость убывания коэффициентов Фурье связана с дифференциальными свойствами функции, продолженной на весь интервал $(-\infty, \infty)$. Значения коэффициентов Фурье и количество гармоник определяют точность приближений.

Если известно значение распределенных нагрузок q_s, q_0, q_r по произвольно выделенной кольцевой поверхности длиной a_s (Рис. 1), то, согласно (4), для интегрирования уравнения (7) значение любой из компонент нагрузки должно быть представлено в виде разложения в ряд Фурье [10–12]:

$$q_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (8)$$

3. Метод решения задачи

Поскольку в работе применяется подход, предполагающий построение решения в виде рядов Фурье для функций, заданных на дискретном множестве точек, то для создания этого множества на поверхность оболочки нанесем криволинейную сетку с равным шагом по меридиану. Полученные окружности разобьем

на одинаковое количество элементов, вследствие чего приходим к множеству виртуальных оболочечных элементов [8]. На рисунке 1 показан виртуальный оболочечный элемент с размерами a_s и a_θ . Будем считать, что на множестве виртуальных элементов известно значение распределенных нагрузок q_s , q_θ , q_γ . Таким образом, на каждом виртуальном элементе имеем известное постоянное значение компоненты нагрузки q .

Обычно в рамках теории оболочек рассматриваются нагрузки, симметричные относительно какой-либо поперечной оси [2–4]. Если за ось симметрии принять ось x (Рис. 1), то можно использовать разложение (4)–(6), в котором коэффициенты обуславливаются требованиями задачи и таковы, что позволяют обеспечить быструю сходимость ряда.

При решении задачи определения напряженного состояния оболочки вращения, находящейся под действием нагрузки, заданной в окружном направлении в виде ступенчатой (дискретной) функции, встают вопросы, связанные с суммированием рядов Фурье. Вследствие того, что при вычислении приходится усекавать ряд и учитывать конечное число его членов, возникает явление Гиббса [12]. Его суть заключается в том, что при наличии разрыва заданной функции ее значения справа и слева от точки разрыва могут различаться [2]. Существуют подходы по сглаживанию колебаний Гиббса, например умножение всех членов ряда на множители Ланцоша [13].

При действии на оболочку нагрузки, нормальной к ее поверхности — q_γ , или касательной к образующей — q_s , можно удерживать коэффициенты дискретного ряда Фурье только при косинусах [11]. В случае симметричных относительно оси x нагрузок аппроксимирующая функция нагрузки будет четной. В силу периодичности (период $2N$) и четности этой функции ее можно разложить в ряд Фурье с коэффициентами [11]

$$a_k = \frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} q_0 + \sum_{i=1}^{N-1} q_i \cos \frac{\pi k}{N} i + \frac{1}{2} (-1)^k q_N \right], \quad (9)$$

$$b_k = 0,$$

где q_i — значение компоненты нагрузки на каждом виртуальном элементе.

В работах [8, 14] для функций, характеризующих напряженное состояние конструкций, на которые нагрузка действовала по нормали к поверхности — q_γ , использовалось разложение с коэффициентами (9). Затем вычислялась разность между исходной и аппроксимирующей функциями, которая во всех случаях не превысила 0,71%.

Однако в прикладных задачах для тел вращения могут встречаться нагрузки, не симметричные относительно поперечной оси, а распределенные произвольным образом. Это могут быть ветровые нагрузки, силы инерции при землетрясениях [15], нагрузки, рассматриваемые в разделе 4 данной статьи. Такие нагрузки необходимо раскладывать в ряд по косинусам и синусам [1, 15]

$$q_s(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_s^{sim}(s) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} q_s^{ans}(s) \sin k\theta,$$

$$q_\theta(s, \theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} q_\theta^{sim}(s) \sin k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} q_\theta^{ans}(s) \cos k\theta, \quad (10)$$

$$q_\gamma(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_\gamma^{sim}(s) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} q_\gamma^{ans}(s) \sin k\theta.$$

Верхним индексом *sim* отмечены симметричные компоненты нагрузки, а индексом *ans* — антисимметричные компоненты. Следовательно, для симметричных компонент вектора разрешающих функций надо добавлять в ряд слагаемые вида

$$\Phi(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(s) \sin k\theta, \quad (11)$$

а для антисимметричных компонент

$$\Psi(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(s) \cos k\theta. \quad (12)$$

При такой записи выражений для нагрузок функции антисимметричной деформации определяются точно такой же системой уравнений, как и функции симметричной деформации. Поэтому при нахождении

напряженно-деформированного состояния оболочек от нагрузки вида (10) вектор разрешающих функций (3) можно представить как сумму компонент $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$, где \mathbf{Y}_1 — вектор разрешающих функций при разложениях (5), (6), а \mathbf{Y}_2 — при разложениях (11), (12).

В разнообразных разложениях в ряд Фурье, приведенных в различных литературных источниках, можно выделить коэффициенты, дающие малую погрешность аппроксимации [16]

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cos \frac{2\pi ki}{N}, \quad b_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \sin \frac{2\pi ki}{N}, \quad (k = 0, \dots, N/2). \quad (13)$$

Ряды Фурье с коэффициентами вида (13) используются в акустике при анализе сигналов в случае разложения их на гармоники. При этом считается, что сигнал — функция периодическая с периодом N .

Точность решения задачи (вычисленного напряженно-деформированного состояния оболочки) зависит как от точности аппроксимирующей нагрузки (8), так и от точности интегрирования системы уравнений (7). Величина погрешности может быть установлена сопоставлением с решением аналогичной задачи другим методом, численным либо аналитическим. Поскольку разложение нагрузки в дискретный ряд Фурье — это суперпозиция нагрузок, приложенных на множестве виртуальных элементов, то для обоснования предлагаемого метода в работах [8, 14] решение с коэффициентами вида (9) сопоставлялось с решением при помощи метода конечных элементов. Реализована задача для оболочки, нагруженной распределенной нагрузкой q_f , действующей на одном виртуальном элементе. Значения различных компонент напряженно-деформированного состояния для изотропных [14] и ортотропных [8] оболочек сравнивались с аналогичными результатами, полученными в вычислительных комплексах ANSYS [17] и Cosmos [18]. Достигнуто хорошее совпадение величин компонент напряженного состояния.

4. Численный пример с применением дискретных рядов

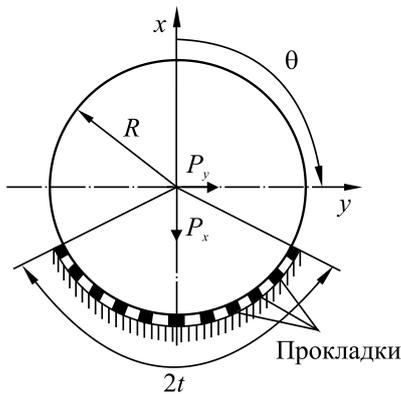


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка, лежащая на опоре

В качестве примера рассмотрим тонкую оболочку ($h = 0,006$ м) длиной $L = 2,24$ м, лежащую на жестком основании. Ширина основания составляет $b = 0,24$ м, длина дуги контакта $2t$ «стягивается» углом 128° (Рис. 2). Между основанием и оболочкой имеются 11 упругих прокладок одинаковой длины. Этот расчетный случай представляет передачу нагрузки от вагона-цистерны на лежневые опоры.

Ранее в [19] путем решения контактной задачи найдено распределение контактного давления q , действующего на эту оболочку. При расчете было принято: внешний радиус цилиндрической оболочки $R = 1,50$ м; радиус опоры $R = 1,50$ м; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; главный вектор вертикальной нагрузки $P_x = 45 \cdot 10^4$ Н. Граничные условия имели вид:

$$N_r = N_z = M_s = \hat{S} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \\ N_r = N_z = M_s = \hat{S} = 0 \quad \text{при} \quad s = L.$$

Для того чтобы установить напряженно-деформированное состояние оболочки описанным выше методом, аппроксимируем контактное давление q в виде (8). Окружность оболочки разобьем на элементы с угловым шагом $\Delta\theta = 2^\circ$, который «стягивает» виртуальный элемент длиной a_0 . Таким образом, окружность оболочки аппроксимируем 180 виртуальными элементами, дугу прокладки — четырьмя, а зазор между прокладками — двумя виртуальными элементами. По ширине области контакта в меридиональном направлении зададим один виртуальный элемент $a_s = b$.

На рисунке 3а показано распределение контактного давления q , найденное в [19]. Горизонтальная ось изображает область контакта, длина которой определяется углом θ . Естественно, при вертикальной нагрузке P_x контактное давление симметрично относительно плоскости $\theta = 180^\circ$. На рисунке также изображена нагрузка q_f , представленная в виде разложения в ряд Фурье с коэффициентами (13); кривые полностью совпадают.

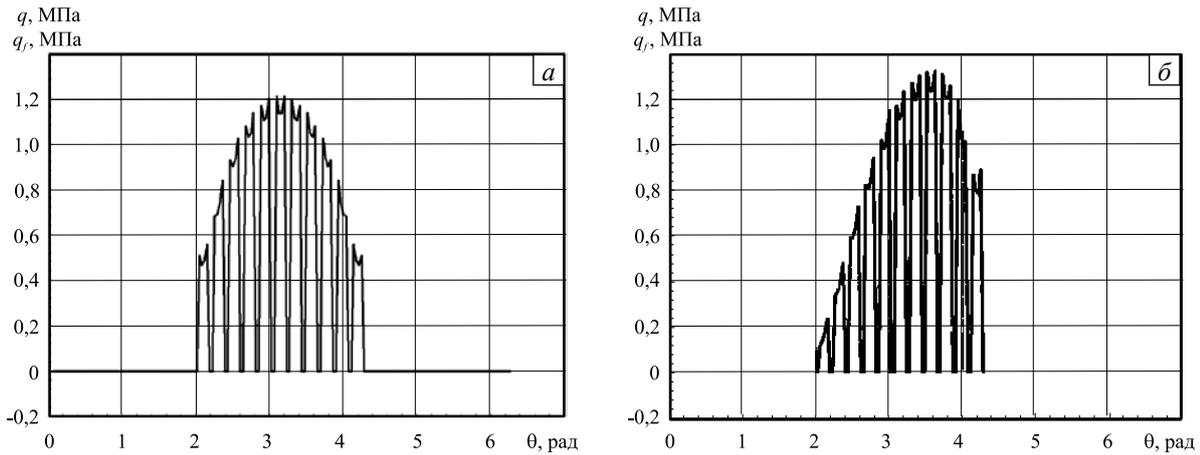


Рис. 3. Характер контактного давления при взаимодействии оболочки с основанием при вертикальном (P_x) (а) и смешанном (P_x и P_y) (б) нагружении

Относительная погрешность δ , вычисленная как $\delta = |q - q_f| \cdot q_{cp}^{-1} \cdot 100\%$, где q_{cp} — среднее значение нагрузки по всем точкам расчетной сетки, не превышает 0,0005%. Добавим, что путем численного эксперимента было установлено следующее: в разложении в ряд Фурье (8) с коэффициентами (13) необходимо удерживать $k = N/2$ гармоник. Таким образом, в данной задаче соотношение (8) содержало 90 членов ряда.

Поскольку действующая нагрузка симметрична относительно вертикальной оси, то для решения задачи можно использовать и разложение с коэффициентами (9). Такой случай исследован в работе [14]. При этом погрешность составила $\delta = 0,4\%$.

Рисунок 3б содержит распределение контактного давления q при действии на оболочку вертикальной ($P_x = 45 \cdot 10^4$ Н) и поперечной ($P_y = 8,848 \cdot 10^4$ Н) нагрузок (см. Рис. 2). Данный расчетный случай описывает прохождение вагоном–цистерной криволинейного участка пути, на котором и возникает дополнительная центробежная сила P_y . Из рисунка видно, что поперечная нагрузка нарушает симметрию контактного давления относительно оси x , и следовательно, такое нагружение возможно описать только разложением с коэффициентами (13). Кривая нагрузки q_f , представленной в виде разложения в ряд Фурье, совпадает с графиком q . Относительная погрешность δ не превышает 0,0005%.

5. Численный пример с применением обычных и дискретных рядов

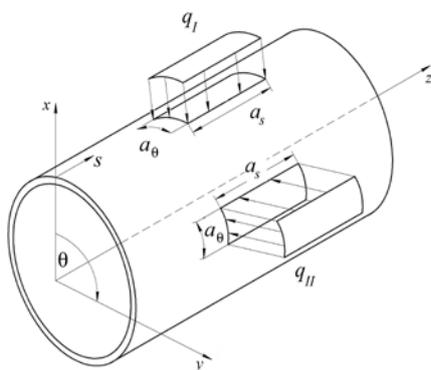


Рис. 4. Цилиндрическая оболочка под действием внешней нагрузки, которая равномерно распределена на двух виртуальных элементах

Рассмотрим задачу для однослойной ортотропной цилиндрической оболочки, на которую действует нормальная внешняя нагрузка $P_I = 1000$ Н, равномерно распределенная на одном виртуальном элементе с размерами $a_\theta \times a_s$. Данная задача решена в работе [8] для случая, когда центр виртуального элемента имеет координаты $s = L/2, \theta = 0$. На рисунке 4 показан такой случай нагружения ($q_I = P_I \times (a_s \times a_\theta)^{-1}$).

Модули упругости и сдвига, коэффициент Пуассона имеют следующие значения: $E_1 = 4,65 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0,7 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0,7 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_1 = 0,25$. Геометрические размеры и граничные условия совпадают с задачей из раздела 4. Поскольку нагрузка симметрична относительно вертикальной оси, то она может быть представлена в виде разложения по косинусам в обычный ряд Фурье с коэффициентами [8]:

$$a_0 = \frac{P}{\pi R a_s}, \quad a_k = \frac{2P \sin(k\Delta\theta/2)}{\pi R a_s k \Delta\theta}, \quad b_k = 0. \tag{14}$$

Здесь $\Delta\theta = 2^\circ$ — угол, который «стягивает» виртуальный элемент по окружности. Аналитическое разложение в ряд с коэффициентами (14) описывает четную функцию в виде ступеньки, симметричную относительно $\theta = 0^\circ$.

После интегрирования системы (7) с учетом разложения с коэффициентами (14) имеем компоненты напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки (σ_s — меридиональную, σ_θ — окружную, $\tau_{s\theta}$ — касательную) и перемещения в каждой точке срединной поверхности по трем направлениям (u_r, u_z, v).

Рисунок 5а демонстрирует изменение радиального перемещения u_r (кривая 1) по длине окружности, измеряемой углом θ , в сечении оболочки $s = L/2$. В решении удерживалось 200 гармоник. Перемещение u_r выбрано как наиболее информативный параметр, по которому можно оценить деформированное состояние оболочки. Видно, что в месте, где приложена нагрузка, прогиб максимален. В работе [8] полученное распределение u_r сравнивалось с решением, найденным методом конечных элементов. Поскольку внешняя нагрузка симметрична относительно вертикальной оси x , то и радиальный прогиб симметричен относительно сечения $\theta = 0^\circ$.

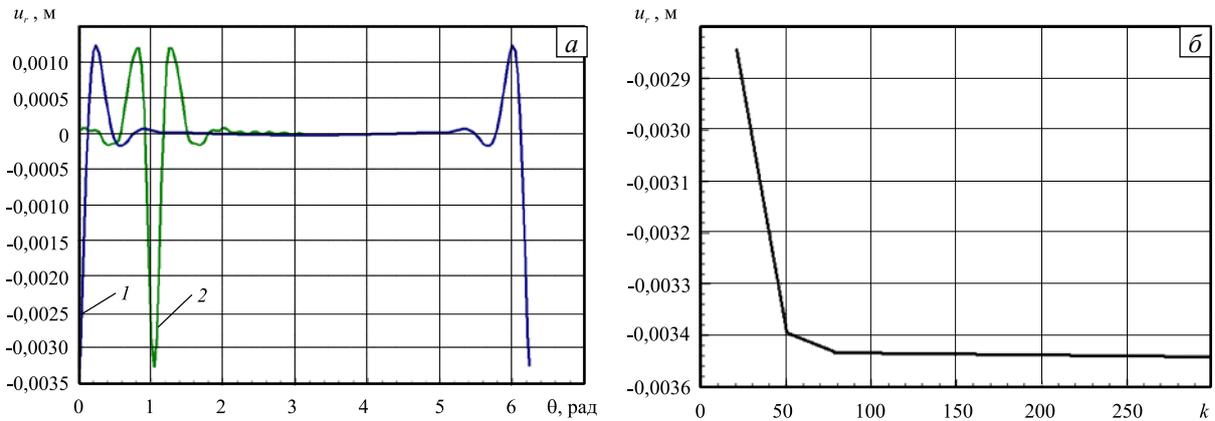


Рис. 5. Изменение радиального перемещения u_r по длине окружности для сечения $s = L/2$ (а) и в точке поверхности оболочки с координатами $s = L/2, \theta = 0^\circ$ в зависимости от количества суммируемых гармоник k (б)

Как отмечено выше, при суммировании гармоник, описываемых обычными рядами Фурье, часто возникает вопрос о количестве удерживаемых членов ряда в соотношении (8). Рисунок 5б содержит изменение радиального перемещения u_r в точке с координатами $s = L/2, \theta = 0^\circ$ в зависимости от количества суммируемых гармоник k . Видно, что в данной задаче необходимо удерживать не менее 100 членов ряда, поскольку далее решение приближается к асимптоте, и количество гармоник в решении не влияет на результат.

Представим в рассматриваемой задаче внешнюю нагрузку в виде дискретного ряда с коэффициентами (13). Сначала рассмотрим расчетный случай для внешней нагрузки $P_f = 1000$ Н,

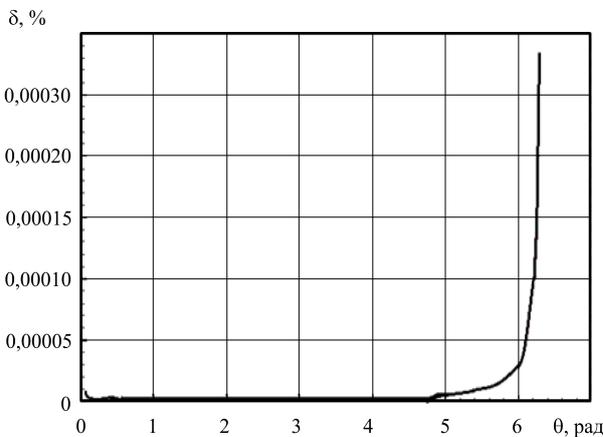


Рис. 6. Изменение по окружности оболочки относительной погрешности δ при аппроксимации приложенной ступенчатой нагрузки дискретным рядом Фурье

равномерно распределенной на виртуальном элементе, центр которого имеет координаты $s = L/2, \theta = 0^\circ$. В соотношении (8) удержим 90 членов ряда.

На рисунке 6 показано изменение относительной погрешности δ в зависимости от угла θ при аппроксимации ступенчатой нагрузки дискретным рядом. Погрешность, вычисленная как $\delta = |q - q_f| \cdot q_{cp}^{-1} \cdot 100\%$, не превышает 0,0003%. Увеличение δ в конце интервала представления функции, по-видимому, можно объяснить накоплением погрешности за счет недостаточно точного задания числа π , через которое определяется шаг.

Далее рассмотрим расчетный случай для элемента с координатами центра $s = L/2,$

$\theta = \pi/3$. Согласно рисунку 4 на элемент действует нагрузка $P_{II} = 1000$ Н. Такую нагрузку можно аппроксимировать только дискретным рядом с коэффициентами вида (13). На рисунке 5а кривая 2 показывает изменение радиального перемещения u_r в сечении $s = L/2$ именно для этого вида нагружения. В месте, где приложена нагрузка, наблюдается максимальный прогиб. Из рисунка 5а видно, что кривая 2 сдвинута относительно кривой 1 на угол $\pi/3$.

6. Заключение

Из проведенных расчетов следует, что при удержании необходимого количества суммируемых гармоник аппроксимирующая функция q_f достаточно точно представляет различные внешние поверхностные нагрузки. Предложенное разложение в дискретный ряд Фурье по косинусам и синусам с коэффициентами (13) имеет незначительную погрешность аппроксимации и более универсально, чем разложение с коэффициентами (9), так как способно описывать произвольные несимметричные нагрузки. При этом в разложении в ряд Фурье (8) с коэффициентами (13) необходимо удерживать $k = N/2$ гармоник. Предложенное разложение с коэффициентами (13), по-видимому, целесообразно применять при аппроксимации внешних нагрузок для тел вращения, исследуемых с помощью и других сеточных методов, например метода конечных элементов.

Важно, что использованное в работе разложение нагрузки в дискретный ряд Фурье позволяет понизить размерность задачи при обеспечении высокой точности аппроксимации произвольной внешней нагрузки.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект № 15-10-1-22).

Литература

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек: в 5-ти тт. – Киев: Наукова думка, 1981. – Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. – 544 с.
3. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 544 с.
4. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). – Москва, 1988. – 192 с. – Деп. в ВИНТИ 12.02.88.
5. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // J. Eng. Math. – 2003. – Vol. 46, no 3-4. – P. 269-280. DOI
6. Grigorenko Ya.M., Tsybul'nik V.A. Application of discrete Fourier series in the stress analysis of cylindrical shells of variable thickness with arbitrary end conditions // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, no. 6. – P. 657-665. DOI
7. Григоренко Я.М. Решение краевых задач о напряженном состоянии упругих тел сложной геометрии и структуры с применением дискретных рядов Фурье // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 3-52. (English version DOI).
8. Емельянов И.Г., Кузнецов А.В. Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 245-252. DOI
9. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1961. – Т. 16, № 3(99). – С. 171-174. (URL: <http://www.mathnet.ru/links/c99fb080e5e6111a5c9b5260e37010a1/rm6626.pdf>).
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
11. Хемминг П.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
12. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Физматгиз, 1960. – 390 с.
13. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с. DOI
14. Emelyanov I.G., Kuznetsov A.V. The stressed state of shell structures under local loads // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 1. – P. 42-47. DOI
15. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
16. Ба-хуссейн А.А. Дискретное преобразование Фурье. <http://ilab.xmedtest.net/?q=node/3740> (дата обращения: 01.06.2015).
17. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
18. Алямовский А.А. SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 432 с.
19. Emelyanov I.G., Mironov V.I. Contact problem for a shell considering the transverse load // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2013. – Vol. 42, no. 1. – P. 36-40. DOI

References

1. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsij* [Mechanics of thin-walled structures]. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 488 p.
2. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. *Teoriya obolochek peremennoj zhestkosti* [Theory of shells of variable stiffness]. Methods of shell design, vol. 4. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 544 p.
3. Lukasevich S. *Lokal'nye nagruzki v plastinakh i obolochkakh* [Local loads in plates and shells]. Moscow: Mir, 1982. 544 p.

4. Obratsov I.F., Nerubailo B.V., Ol'shanskii V.P. *Obolochki pri lokalizovannykh vozdeistviyakh* [Shells under localized effects (review of works, basic results and trends of investigations)]. Moscow, 1988. Deposited at VINITI 12.02.88, no. 1222-V88.
5. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates. *J. Eng. Math.*, 2003, vol. 46, no 3-4, pp. 269-280. DOI
6. Grigorenko Ya.M., Tsybul'nik V.A. Application of discrete Fourier series in the stress analysis of cylindrical shells of variable thickness with arbitrary end conditions. *Int. Appl. Mech.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 657-665. DOI
7. Grigorenko Ya.M. Using discrete fourier series to solve boundary-value stress problems for elastic bodies with complex geometry and structure. *Int. Appl. Mech.*, 2009, vol. 45, no. 5. pp. 469-513. DOI
8. Emel'yanov I.G., Kuznetsov A.V. Application of virtual elements for determination of stress state of rotational shells. *Vichisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 245-252. DOI
9. Godunov S.K. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations]. *Usp. Mat. Nauk – Russ. Math. Surv.*, 1961, vol. 16, no. 3, pp. 171-174. (URL: <http://www.mathnet.ru/links/c99fb080e5e6111a5c9b5260e37010a1/rm6626.pdf>).
10. Korn G.A, Korn T.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. McGraw-Hill Book, 1968.
11. Hamming R.W. *Numerical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, 1962.
12. Tolstov G.P. *Ryady Fourier* [Fourier series]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 390 p.
13. Lanczos C. *Applied analysis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1956. 539 p. DOI
14. Emelyanov I.G., Kuznetsov A.V. The stressed state of shell structures under local loads. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014 vol. 43, no. 1, pp. 42-47. DOI
15. Gallager R. *Finite element method. Fundamentals*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1975.
16. Ba-kysein A.A. *Diskretnoe preobrazovanie Furie* [Discrete Fourier transform], available at: <http://lab.xmedtest.net/?q=node/3740> (accessed 1 June 2015).
17. Basov K.A. *ANSYS: Spravochnik pol'zovatelya* [ANSYS: User Manual]. Moscow: DMK Press, 2005. 640 p.
18. Alyamovskiy A.A. *SolidWorks/COSMOSWorks. Inzhenernyy analiz metodom konechnykh elementov* [SolidWorks/COSMOSWorks. Engineering analysis by finite element method]. Moscow: DMK Press, 2004. 432 p.
19. Emelyanov I.G., Mironov V.I. Contact problem for a shell considering the transverse load. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 1, pp. 36-40. DOI

Поступила в редакцию 24.03.2015; опубликована в электронном виде 30.09.2015