

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.21

УДК 532.5 539.371: 539.374: 519.615.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРОВ. КОМПЛЕКСНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

О.К. Гаришин, А.С. Корляков, В.В. Шадрин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Предложен комплексный экспериментально-теоретический подход к исследованию сложного механического поведения термопластических полимеров при конечных деформациях. В экспериментальной части работы представляется методика, позволяющая за одно испытание получать данные о вязкоупругих и упругопластических свойствах полимера, необходимые для построения соответствующей феноменологической модели. В теоретической части дается описание этой модели, а также интерпретация полученных с ее помощью результатов. Программа натурных испытаний состоит из циклического нагружения полимерного образца. При этом один цикл включает: растяжение, релаксацию напряжений, сброс деформаций до некоторого заданного постоянного значения растягивающей силы, релаксацию. Далее осуществляется другой цикл нагружения, который (как и все последующие) производится с нарастающей амплитудой деформаций. Феноменологическая модель базируется на дифференциальной форме определяющих соотношений, при записи которых используется четырехэлементная символическая схема. При расчетах применяется математический аппарат механики нелинейных конечных деформаций с привлечением вычислительных схем Рунге–Кутты и симплекс-метода Нелдера–Мида. С помощью данного подхода проведены экспериментальные и теоретические исследования механического поведения полиэтилена марки ПЭ 107-02К. Построены деформационные и временные кривые истинных напряжений, а также модельных механических параметров, характеризующие нелинейно-упругие, пластические и вязкие свойства материала. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей показало, что они практически совпадают, тем самым подтверждается, что сделанные из анализа модельных параметров выводы о развитии вязкоупругих и упругопластических процессов, происходящих при деформировании полимера, близки к реальности.

Ключевые слова: термопластические полимеры, полиолефины, конечные деформации, упругопластичность, вязкоупругость, символические схемы, метод Рунге–Кутты, симплекс-метод Нелдера–Мида

STUDY OF VISCO-ELASTIC-PLASTIC PROPERTIES OF THERMOPLASTIC POLYMERS. AN INTEGRATED EXPERIMENTAL AND THEORETICAL APPROACH

O.K. Garishin, A.S. Korlyakov and V.V. Shadrin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper describes an integrated experimental and theoretical approach to the study of complex mechanical behavior of thermoplastic polymers under finite deformations. It includes a special experimental technique that allows us to obtain during a single test the necessary data on viscoelastic and elastoplastic polymer properties, as well as a phenomenological differential type model designed for decoding and simulating experimental results. The experimental program consists of the cyclic deformation of sample and includes: stretching – stress relaxation – reducing strain to some predetermined constant value of tensile strength – stress relaxation – next cycle of loading. Each subsequent cycle is performed with increasing strain amplitude. The phenomenological model is based on a differential approach to the construction of constitutive equations of the mechanical behavior of materials with the help of symbolic schemes. This approach uses the mathematical apparatus of mechanics of nonlinear finite deformations involving Runge–Kutta computing method and Nelder–Mead simplex method. The symbolic model scheme consists of two parallel branches containing two serially connected elements: a) elastic and plastic, b) elastic and viscous. The elastoplastic branch represents the behavior of agglomerates of more rigid crystallites, their displacement and destruction during deformation. The viscoelastic branch describes the flow of the amorphous polymer phase. The experimental data obtained for polyethylene PE 107-02K were theoretically analyzed using this model. Dependencies of elastic, plastic and viscous model parameters on polymer deformation were obtained. A comparison of the calculated and experimental results shows high coincidence, which is indicative of the fact that the conclusions drawn from the analysis of the model parameters are close to reality.

Key words: thermoplastic materials, polyolefines, finite deformations, elastoplasticity, viscoelasticity, symbolic schemes, Runge–Kutta method, Nelder–Mead simplex method

1. Введение

Полимеры полиолефиновой группы (полиэтилен — ПЭ, полипропилен — ПП, полибутен — ПБ, и так далее) являются основными промышленными термопластами. При нагревании они способны обратимо переходить в высокоэластичное и далее в вязкотекучее состояние, что обеспечивает возможность формования из них самых разнообразных изделий [1]. Переходы могут повторяться многократно, что позволяет, в частности, перерабатывать бытовые и производственные отходы из термопластов в новые изделия. Достоинства этих изделий, по сравнению с металлическими изделиями, — легкость (малая массовая плотность), высокая коррозионная устойчивость, хорошие тепло- и электроизоляционные свойства. Полимеры полиолефиновой группы легко поддаются различным видам механической обработки,

хорошо льются и формуются. К недостаткам можно отнести более низкую прочность, вследствие чего пластмассовые детали используют, как правило, в тех элементах конструкций и механизмов, где нагрузки относительно невелики.

На сегодняшний день первое место по объему промышленного производства занимает полиэтилен, как в чистом виде, так и с самыми разнообразными наполнителями. ПЭ — частично кристаллизующийся полимер, в котором можно наблюдать хорошо выраженную структурную неоднородность на микро-, мезо- и наноуровнях [2]. Сегменты макромолекул располагаются в пространстве хаотически (аморфная фаза) или образуют участки с упорядоченной структурой — кристаллиты, имеющие большую механическую жесткость.

Существует огромное множество сортов ПЭ, различающихся молекулярной массой (длиной полимерных молекул), уровнем разветвленности (количеством боковых групп), степенью кристалличности (концентрацией упорядоченно уложенных молекул — кристаллитов — в общем объеме материала) [3]. Соответственно физико-механические свойства полиэтилена могут сильно варьироваться. Например, разброс по упругому модулю для изотропных ПЭ лежит в диапазоне от 100 до 1000 МПа, прочность изменяется в десятки раз [4, 5]. Общим и характерным для всех типов полиэтиленов является сложное механическое поведение, то есть нелинейные упругие, вязкие и пластические свойства. Экспериментальному и теоретическому изучению этих свойств и посвящена данная работа.

2. Эксперимент

Известно, что при деформировании полиолефиновых полимеров в условиях конечных деформаций происходит изменение их как вязкоупругих, так и упругопластических характеристик. Для того чтобы минимизировать трудозатраты и за один эксперимент получить все необходимые для дальнейшего теоретического моделирования данные об упруго-вязко-пластическом поведении материала, была разработана соответствующая методика. Она основана на циклическом одноосном нагружении образца с возрастающей амплитудой по деформациям и остановками на релаксацию при смене направления движения захватов испытательной машины.

Идея применения различных циклических испытаний для определения механических характеристик таких материалов не нова [6, 7]. В одних работах описываются эксперименты с циклическим нагружением полимера при фиксированных максимальных и минимальных значениях напряжений (или деформаций) на каждом цикле, в других — пошаговое растяжение–сжатие с увеличивающейся на каждом шаге амплитудой нагружения [8–10]. В предлагаемой методике испытаний новым элементом является ввод остановок на релаксацию. Таким образом, программа каждого цикла состоит из следующих операций:

- 1) растяжения на некоторую величину, превышающую максимальную деформацию, достигнутую на предыдущем цикле;
- 2) остановки захватов на заданное время для релаксации напряжений;
- 3) сброса нагрузки до некоторого фиксированного, но не нулевого значения;
- 4) остановки захватов для релаксации;
- 5) окончания текущего цикла и начала следующего (с увеличением амплитуды по деформации).

В качестве объекта исследований был выбран полиэтилен низкой плотности (ПЭНП) ПЭ 107-02К ($\rho = 0,91 \text{ г/см}^3$). Как и все ПЭНП, — это полиэтилен с высоким уровнем разветвленности. Боковые ответвления представляют собой в основном метильные и этильные группы, которые располагаются друг от друга со средним интервалом порядка 50 углеродных атомов. Его температура плавления составляет 110°C , степень кристалличности — 40 %, начальный модуль Юнга — 73,5 МПа.

Испытания проводились с помощью разрывной машины Testometric FS100 с использованием механического датчика FS100kN-CT. Образцы имели форму лопаток с размером рабочей части $0,4 \times 3,5 \times 10 \text{ мм}$. Для защиты столь тонких лопаток от возможных повреждений и предотвращения перекосов при помещении образца в установку использовалась специальная рамка жесткости. Чтобы избежать «выползания» образцов из захватов при больших вытяжках (а они достигали сотен процентов), были разработаны и изготовлены минизахваты клиновидного типа.

При растяжении–сжатии задавались скорость движения захватов — 10 мм/мин (что соответствовало скорости деформирования 100% в минуту или $0,0167 \text{ с}^{-1}$), и время остановки на релаксацию — 10 мин. Программа испытаний состояла из восьми циклов с максимальной деформацией, соответственно, 10, 20, 30, 40, 60, 80, 100 и 120%. На каждом шаге цикла усилие при разгрузке сбрасывалось до значения 0,6 МПа. За счет этого удавалось повысить точность получаемых в эксперименте результатов, так как образец всегда оставался растянутым (то есть исключалась возможность его изгиба при обратном ходе захватов из-за погрешности работы датчика сил).

Такой режим испытаний позволил четко разделить вязкоупругое и упругопластическое поведение образца и получить все необходимые сведения. В результате были построены деформационные и временные (релаксационные) экспериментальные кривые истинных и инженерных напряжений. Далее эти данные играли роль входных параметров при построении феноменологической модели упруго-вязко-пластической среды.

3. Моделирование упруго-вязко-пластических свойств ПЭ

Для моделирования вязкоупругого и упругопластического поведения материалов используются модели как интегрального [11–13], так и дифференциального типа [14–20]. В первом случае история деформирования среды учитывается с помощью интегральных уравнений. При всех несомненных достоинствах интегральных моделей их применение в ряде случаев, например, при моделировании процессов массообмена в диссипативной среде, тиксотропных свойств в эластомерах и прочих, связано с большими практическими затруднениями. Дифференциальные же феноменологические модели более просты и удобны для расчетов, нагляднее идентифицируют константы по имеющимся экспериментальным данным, позволяют с хорошей точностью описывать реальные механические свойства материала.

Обсуждаемая далее феноменологическая модель упруго-вязко-пластической среды является дальнейшим развитием дифференциального подхода к построению определяющих уравнений, основанного на интерпретации механического поведения материала с помощью символьных схем. Ранее этот подход применялся для изучения упругопластического поведения полимерных материалов. В работе [21] представлены результаты моделирования упругопластических свойств нанокомпозитов на основе полиолефиновой матрицы и ультрадисперсного наполнителя из слоистых глинистых минералов (смектитов). Модернизация модели в [22] позволила учесть изменения объема полимера в результате накопления внутренней поврежденности (микроотслоений).

Символьная схема модели (Рис. 1) состоит из двух параллельных ветвей, содержащих по два последовательно соединенных элемента. Верхнюю ветвь образуют упругий (1) и пластический (3), нижнюю — упругий (2) и вязкий (4) элементы.

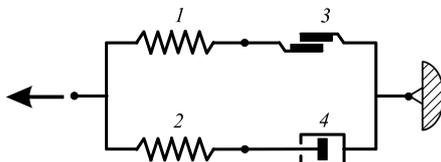


Рис. 1. Символьная схема упруго-вязко-пластической модели

При такой комбинации в каждой из ветвей напряжения в элементах одинаковы, а скорости деформаций суммируются. В материале же общее напряжение есть сумма напряжений в ветвях, а общая скорость деформации равняется скорости деформаций в любой из ветвей, поскольку эти скорости равны между собой.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_4, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_4. \quad (1)$$

Считалось, что упругопластическая ветвь моделирует поведение (перемещение и разрушение при деформировании) агломератов из более жестких кристаллитов, а вязкоупругая — течение аморфной части полимера между структурными элементами кристаллитов — ламелями, и в пространстве около кристаллитов и частиц [2, 23].

В модели используется аддитивное разложение тензора скоростей деформации среды \mathbf{D} на упругие (\mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2), пластическую (\mathbf{D}_3) и вязкую (\mathbf{D}_4) части по аналогии с разложением, предложенным В.А. Пальмовым для упругопластической среды: $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_3$ [24, 25]. Одно из основных преимуществ аддитивного разложения состоит в том, что в этом случае неравенство диссипации удовлетворяется автоматически [26], то есть с точки зрения термодинамики данные соотношения всегда корректны. В модели фигурирует только деформационный градиент всей среды \mathbf{F} , для отдельных элементов это понятие как внутренний параметр не рассматривается.

Остановимся подробнее на описании механических свойств элементов символьной схемы. За каждым из них стоят тензорные уравнения, определяющие свойства среды, что позволяет моделировать различные виды нагружения (растяжение–сжатие, изгиб, кручение и другое) без перестройки модели. Достаточно задать лишь соответствующий вид тензора \mathbf{F} .

3.1. Упругие элементы (1-й и 2-й)

При представлении механических свойств упругого элемента прибегали к известным уравнениям нелинейной теории упругости [4]:

$$w_m = C_m (I_1(\mathbf{B}_m) - 3) + p_m (I_3(\mathbf{B}_m) - 1), \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_m = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(m)} \mathbf{n}_i^{(m)} \otimes \mathbf{n}_i^{(m)} = \mathbf{B}_m^{1/2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_m = 2C_m \mathbf{B}_m + p_m \mathbf{I}. \quad (4)$$

Считали, что в процессе деформирования объем тела и его температура не меняются. Тензоры истинных напряжений Коши в упругих элементах \mathbf{T}_m , а также их девиаторы $\text{dev} \mathbf{T}_m$ и шаровые тензоры $\mathbf{T}_0^{(m)}$

($m = 1, 2$ в соответствии со схемой рисунка 1) определяли через кратности удлинений (собственные числа) $\lambda_1^{(m)}$, $\lambda_2^{(m)}$ и $\lambda_3^{(m)}$ упругих тензоров растяжений \mathbf{V}_m по формулам (3), (4) для неогукowego гиперупругого потенциала (потенциала Трелоара) (2) [27] (номер элемента для компонент тензора, чтобы не путать с показателем степени, указывается вверху в скобках и далее, где это возможно по смыслу, данный индекс опускается). Также в (2)–(4) имеют место обозначения: w_m — объемная плотность свободной энергии для m -го элемента; $\mathbf{n}_i^{(m)}$ — текущая ортонормированная тройка собственных векторов тензора \mathbf{V}_m ; C_m — упругая константа, которая для несжимаемого материала равна $1/6$ начального модуля Юнга материала (или $1/2$ модуля сдвига) [28]; $\mathbf{B}_m = \mathbf{V}_m^2$ — аналог левого тензора Коши–Грина; \mathbf{I} — единичный тензор; p_m — неопределенный множитель Лагранжа, введенный для учета несжимаемости среды; I_1 и I_3 — первый и третий инварианты тензора \mathbf{B}_m . Так как для отдельных элементов схемы понятие деформационного градиента не употребляется, то нельзя говорить, что тензоры \mathbf{V}_m и \mathbf{B}_m для каких-то m -х элементов появляются в результате полярного разложения соответствующих деформационных градиентов, однако \mathbf{V}_m и \mathbf{B}_m являются тем не менее симметричными и индифферентными тензорами.

Текущую деформацию упругих элементов определяли через объективные производные тензора Коши–Грина с помощью эволюционного уравнения

$$D\mathbf{B}/Dt = \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_R\mathbf{B} = 2\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}, \quad (5)$$

где $\mathbf{W}_R = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ спин среды, причем $\mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{m}_j$ — тензор поворота из полярного разложения деформационного градиента среды $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, \mathbf{m}_j и \mathbf{n}_j — ортонормированные тройки собственных векторов тензора \mathbf{B} в отсчетной и текущей конфигурациях. В соответствии с (5) для m -го упругого элемента материальную производную тензора \mathbf{B}_m вычисляли как

$$\dot{\mathbf{B}}_m = \mathbf{W}_R\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_m\mathbf{W}_R + 2\mathbf{V}_m\mathbf{D}_m\mathbf{V}_m. \quad (6)$$

Следует отметить, что формуле (6) используется спин среды \mathbf{W}_R , что позволило сохранить адекватность модели при предельном переходе, когда скорость деформирования материала стремится к бесконечности (соответственно «вязкоупругая ветвь» становится чисто упругой). Для одноосной деформации тензор \mathbf{W}_R будет всегда равен нулю, то есть $\dot{\mathbf{B}}_m = 2\mathbf{V}_m\mathbf{D}_m\mathbf{V}_m$.

3.2. Пластический элемент (3-й)

Хорошо известно, что появление и развитие пластических деформаций в полимерах, как правило, связано с формоизменением [29, 30]. При описании таких процессов удобнее работать не с тензорами напряжений и деформаций, а с их девиаторами. Поэтому было принято (по аналогии с классическими уравнениями теории течения Прандтля–Рейсса [29, 31, 32]), что девиатор тензора \mathbf{T}_3 и тензор скорости пластической деформации \mathbf{D}_3 связаны между собой следующей формулой:

$$\text{dev } \mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{D}_3 = \sqrt{\frac{\text{dev } \mathbf{D}_3 \cdot \text{dev } \mathbf{D}_3}{\text{dev } \mathbf{T}_3 \cdot \text{dev } \mathbf{T}_3}} \text{dev } \mathbf{T}_3. \quad (7)$$

В (7) учтено, что в несжимаемой среде шаровая часть тензора скоростей деформаций всегда равна нулю, тем самым постулируется, что все возникающие в материале пластические деформации происходят за счет изменения формы тела. Изменение же объема (если оно есть) определяется только упругими деформациями.

Выражение (7) содержит неопределенность. Фактически это равенство двух векторов единичной длины в 9-мерном векторном пространстве. Для раскрытия неопределенности введем еще одну зависимость между \mathbf{D}_3 и девиатором тензора скорости деформаций всей среды \mathbf{D} (той скорости, что замеряется в эксперименте). При построении модели примем, что они связаны пропорциональным соотношением

$$D_{in}^{(3)} = \sqrt{\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{D}_3} \equiv \sqrt{\text{dev } \mathbf{D}_3 \cdot \text{dev } \mathbf{D}_3} = \kappa \sqrt{\text{dev } \mathbf{D} \cdot \text{dev } \mathbf{D}} = \kappa D_{in}, \quad (8)$$

где κ — неотрицательный параметр (в дальнейшем — параметр пластичности), имеющий простой физический смысл: при $\kappa=0$ материал ведет себя как чисто упругий, при $0 < \kappa < 1$ — как упругопластический с упрочнением, случай $\kappa=1$ соответствует идеальной пластичности, при $\kappa > 1$ кривая нагружения становится ниспадающей, то есть наблюдается разупрочнение материала. Из (8) видно, что этот параметр связывает выражения, аналогичные классическим интенсивностям тензора напряжений и тензора малых деформаций (с точностью до постоянного множителя): $\sigma_{int} = \sqrt{3/2 \text{dev} \mathbf{T} \cdot \text{dev} \mathbf{T}}$, $\varepsilon_{int} = \sqrt{2/3 \text{dev} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev} \boldsymbol{\varepsilon}}$. Поэтому инварианты $D_{int}^{(3)}$ и D_{int} в дальнейшем будем называть интенсивностями тензоров \mathbf{D}_3 и \mathbf{D} . В модели κ задавали через функцию текучести Φ в следующем виде:

$$\kappa = \begin{cases} 0, & \Phi(\mathbf{V}, \dots) < q, \\ \zeta(q), & \Phi(\mathbf{V}, \dots) = q. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь: $\zeta(q)$ — некая функция, где $q = \max \Phi(\mathbf{V}, \dots)$ — аналог параметра упрочнения Одквиста классической теории пластичности (он характеризует накопленную пластическую деформацию) [33]. Следует отметить, что в выражении (9) фигурирует левый тензор растяжения всей среды \mathbf{V} , который получается из полярного разложения деформационного градиента $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$. Таким образом, функция Φ в данном случае — это гиперповерхность пластичности в пространстве деформаций, разделяющая области упругого и пластического поведения материала (в классической теории пластического течения она чаще задается в пространстве напряжений). Такой вариант записи функции текучести позволил обойтись в определяющих уравнениях без объективных производных от тензоров напряжений, выбор которых обычно требует соответствующего обоснования [34–36].

В модели в качестве Φ использовалась зависимость, введенная по аналогии с ε_{int} :

$$\Phi = \sqrt{\text{dev} \mathbf{V} \cdot \text{dev} \mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 \text{tr}(\mathbf{V}^2) - (\text{tr} \mathbf{V})^2}. \quad (10)$$

Для одноосного растяжения выражение (10), представленное через кратность главного удлинения λ , имеет вид

$$\Phi = \sqrt{2/3} (\lambda - \sqrt{1/\lambda}).$$

Таким образом, для описания пластического поведения материала с помощью данной модели надо знать, как выглядит функция $\zeta(q)$ в (9). Ее получали из анализа экспериментальных кривых, что будет показано далее.

3.3. Вязкий элемент (4-й)

Тензор напряжений вязкого элемента и его девиатор (с учетом того, что в несжимаемой жидкой среде шаровая часть тензора вязких скоростей деформации \mathbf{D}_4 равняется нулю) определяли по формулам [37]

$$\mathbf{T}_4 = 2\eta \mathbf{D}_4 + (-\sigma_0) \mathbf{I}, \quad \text{dev} \mathbf{T}_4 = 2\eta \text{dev} \mathbf{D}_4 = 2\eta \mathbf{D}_4, \quad (11)$$

где η — сдвиговая вязкость (динамическая), $\sigma_0 = 1/3 \text{tr} \mathbf{T}_4$ — среднее напряжение или отрицательное давление.

3.4. Расчетный алгоритм модели

Теоретический анализ механических свойств полимера проведен на основе экспериментальных результатов при его одноосном нагружении. Моделировалось одноосное напряженное состояние образца вдоль первой оси прямоугольной декартовой системы координат $x = \sum x_j \mathbf{k}_j$, то есть главный вектор \mathbf{n}_1 , и $x_j \mathbf{k}_j$ совпадали по направлению. Повороты главных осей отсутствовали, и тензор-спин \mathbf{W}_R всегда был нулевым. Из постоянства величины и направления осей следовало, что $\mathbf{m}_i = \mathbf{n}_i = \text{const}$, $\dot{\mathbf{m}}_i = \dot{\mathbf{n}}_i = \mathbf{0}$, то есть формулы для определения деформационного градиента среды \mathbf{F} и его материальной производной $\dot{\mathbf{F}}$ существенно упрощались: $\mathbf{F} = \sum_1^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$, $\dot{\mathbf{F}} = \sum_1^3 \dot{\lambda}_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$.

При одноосном нагружении несжимаемой среды справедливо равенство: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$, то есть $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_1^{-1/2}$, $\dot{\lambda}_2=\dot{\lambda}_3=-\lambda_1^{-3/2}\dot{\lambda}_1/2$. Левый тензор растяжения среды \mathbf{V} и тензор скоростей деформации \mathbf{D} рассчитывали по формулам

$$\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{1/2} = \sum_1^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T] = \sum_1^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i.$$

Компоненты тензоров \mathbf{T}_m , записанные в главных осях, а также значения p_m ($m=1, 2$) определяли как

$$\sigma_1^{(m)} = 2C_m \left[(\lambda_1^{(m)})^2 - 1/\lambda_1^{(m)} \right], \quad \sigma_2^{(m)} = \sigma_3^{(m)} = 0, \quad p_m = -2C_m/\lambda_1^{(m)}.$$

Собственно вычислительный алгоритм, основанный на использовании расчетной схемы Рунге–Кутты первого порядка, состоял в следующем. Нагрузку «модельного образца» задавали в виде цикла по λ_1 , то есть на j -м шаге $\lambda_1 = 1 + j \cdot \dot{\lambda}_1 dt$. Причем в начальный момент времени $t = t_0$, $q = 0$, $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, $\text{dev}\mathbf{T} = \mathbf{0}$, и в теле не наблюдалось деформаций и напряжений. На каждом шаге цикла вычисляли сначала те параметры, которые не содержат в явном виде производную по времени, а именно: Φ , q , $C_1(q)$, $C_2(q)$, $\text{dev}\mathbf{T}$, $\text{dev}\mathbf{T}_1$, $\text{dev}\mathbf{T}_2$, $\kappa(q)$ и $\eta(q)$ как функции \mathbf{V} , \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 , найденных на предыдущем шаге. Далее определяли значения параметров, связанных со скоростью деформации, чтобы вычислить по ним новые значения $\mathbf{V}^{(new)}$ и $\mathbf{V}_m^{(new)}$, которые требуются для следующего шага ($m=1, 2$):

$$\mathbf{V}^{(new)} = \sum_{j=1}^3 (\lambda_j + \dot{\lambda}_j dt) \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j, \quad \mathbf{V}_m^{(new)} = \sqrt{\mathbf{B}_m + 2\mathbf{V}_m \mathbf{D}_m \mathbf{V}_m} dt. \quad (12)$$

Пластический и вязкий элементы определяют значения тензоров скоростей упругих элементов $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D} - \mathbf{D}_3$ и $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D} - \mathbf{D}_4$, которые входят в формулы (12).

Итак, для описания нелинейного упруго-вязко-пластического поведения среды с помощью данной модели необходимо знать четыре зависимости: $C_1(q)$, $C_2(q)$, $\kappa(q)$ и $\eta(q)$, где $q = \max \Phi(\mathbf{V}, \dots)$ — инвариантная мера деформации (9). Здесь: C_1 — это упругая константа первого элемента в потенциале неогукса, зависящая от необратимых структурных перестроек среды в процессе деформации, то есть от тех процессов, что ведут к появлению остаточных пластических деформаций; C_2 — упругая константа второго элемента, отвечающая за упругие свойства аморфной фазы полимера; параметры κ и η характеризуют, соответственно, пластические и вязкие свойства среды. Вычисление этих зависимостей проводили в два этапа.

Этап 1. Определяли $C_1(q)$ и $\kappa(q)$, при этом предполагали, что среда — чисто упругопластическая, то есть рассматривали равновесное нагружение материала (настолько медленное, что релаксационные процессы, связанные с вязким течением среды, можно не учитывать). «Равновесная» упругопластическая кривая (Рис. 2) построена путем соединения точек, соответствующих концу релаксации после остановки в момент максимальной растягивающей деформации на каждом цикле (обозначены маркерами \circ). Считали также, что процесс снятия напряжений и новое повторное нагружение до максимального достигнутого ранее уровня описываются упругим законом. Это вполне согласуется с общепринятыми гипотезами теории пластичности [29, 30]. Поэтому жесткость 1-го упругого элемента C_1 при максимальной на данном цикле деформации определялась по кривой разгрузки, проходящей через две «равновесные» точки: точку конца релаксации после нагрузки (маркеры \circ) и точку конца релаксации после разгрузки (маркеры \times). Для построения кривой разгрузки строили функционал вида:

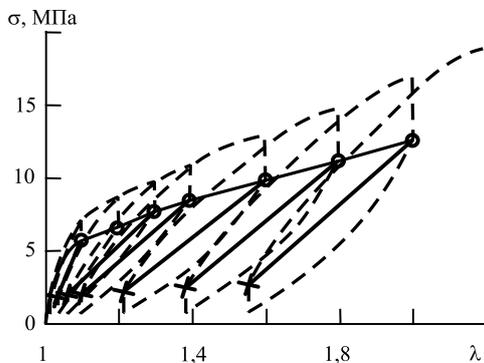


Рис. 2. Расчетная равновесная упругопластическая кривая (сплошные линии) для определения C_1 и κ , (маркеры \circ – конец релаксации после нагрузки, маркеры \times – конец релаксации после разгрузки); эксперимент – штриховые линии

проходящей через две «равновесные» точки: точку конца релаксации после нагрузки (маркеры \circ) и точку конца релаксации после разгрузки (маркеры \times). Для построения кривой разгрузки строили функционал вида:

$$\Psi(C_1, \lambda_p) = \left\{ \sigma|_o - 2C_1 \left[(\lambda_o/\lambda_p)^2 - (\lambda_o/\lambda_p)^{-1} \right] \right\}^2 + \left\{ \sigma|_x - 2C_1 \left[(\lambda_x/\lambda_p)^2 - (\lambda_x/\lambda_p)^{-1} \right] \right\}^2,$$

где $\sigma|_o$, $\sigma|_x$, λ_o , λ_x — соответствующие значения напряжений и удлинений в точках «О» и «Х»; λ_p — остаточная пластическая деформация. Минимизацию Ψ осуществляли численно с помощью симплекс-метода Нелдера–Мида [38]. Для удобства дальнейших вычислений деформационную зависимость C_1 аппроксимировали полиномом 6-го порядка.

Деформационная зависимость пластического параметра κ подбиралась исходя из пошаговых упругопластических решений модельной задачи так, чтобы достигалось максимальное совпадение теории и эксперимента. Использовался следующий алгоритм:

1. На основе экспериментальной кривой $\sigma_{\text{эксп}} - \lambda$ (Рис. 2) строилась равновесная упругопластическая зависимость по вышеописанному алгоритму, и таким образом «исключались» вязкоупругие напряжения.
2. Полученная кривая разбивалась на гладкие участки, которые аппроксимировались полиномами 6-го порядка.
3. Далее аппроксимирующая кривая проходила с малым шагом $\Delta\lambda$, на каждом шаге строился функционал вида: $\Pi(\kappa) = [\sigma_{\text{эксп}}^{\text{pl}} - \sigma_{\text{мод}}^{\text{pl}}]^2$, где $\sigma_{\text{эксп}}^{\text{pl}}$ — текущее значение напряжения с упругопластической экспериментальной кривой; $\sigma_{\text{мод}}^{\text{pl}}$ — значение напряжения в 1-м элементе, рассчитываемое по уравнениям, соответствующим упругопластической ветви модели. Искомое значение пластического параметра κ находили, минимизируя $\Pi(\kappa)$. Поиск минимума функционала производили по тому же алгоритму, что и при поиске C_1 [38].

Этап 2. Отыскивали вязкоупругие характеристики среды C_2 и η . Так как аморфная фаза полимера не испытывает структурных перестроек в процессе деформирования среды, то ее упругие свойства можно считать неизменными. Поэтому C_2 считали величиной постоянной. Для определения η применяли алгоритм, аналогичный описанному выше.

На основе экспериментальной кривой $\sigma_{\text{эксп}} - \lambda$ строилась зависимость вязкоупругих напряжений $\sigma_{\text{эксп}}^{\text{vs}}$ от λ (где $\sigma_{\text{эксп}}^{\text{vs}} = \sigma - \sigma_{\text{эксп}}^{\text{pl}}$). Она также разбивалась на гладкие участки, которые аппроксимировались полиномами 6-го порядка, после чего производилось ее пошаговое прохождение с построением функционала вида $\Omega(\eta) = [\sigma_{\text{эксп}}^{\text{vs}} - \sigma_{\text{мод}}^{\text{vs}}]^2$, где $\sigma_{\text{мод}}^{\text{vs}}$ — модельное значение напряжения в 2-м упругом элементе (см. вязкоупругую ветвь). Искомое значение η получали, находя минимум этого функционала.

4. Обсуждение результатов

С помощью данного подхода были теоретически исследованы упруго-вязко-пластические свойства полиэтилена ПЭ 107-02К. Исходные опытные данные для моделирования получали из механических испытаний образцов по методике, описанной ранее в разделе 2. Напомним, что осуществлялось одноосное циклическое нагружение с возрастающей амплитудой по деформациям и остановками на релаксацию (на 10 мин) при смене направления движения захватов; скорость деформирования составляла 100% в минуту или $0,0167 \text{ c}^{-1}$.

На рисунке 3 показаны зависимости истинных напряжений σ от кратности удлинения образца λ

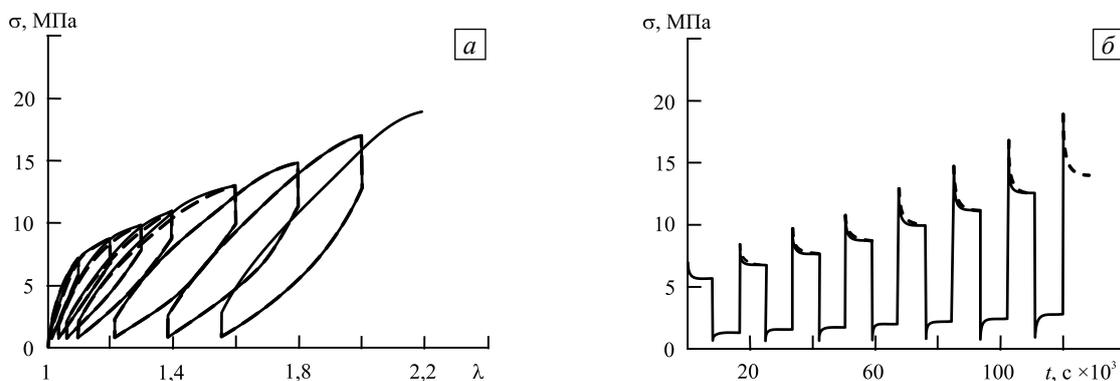


Рис. 3. Деформационные (а) и релаксационные (б) кривые циклического нагружения для ПЭ 107-02К; сплошные линии – расчет, штриховые – эксперимент

и временные (релаксационные) зависимости $\sigma(t)$. Сравнение модельных и экспериментальных кривых показывает, что они практически совпадают, свидетельствуя о близости к реальности сделанных из анализа модельных параметров выводов о характере развития вязкоупругих и упругопластических процессов, происходящих при деформировании полимера.

Ниже представлены расчетные зависимости от q модельных параметров C_1 , κ и η . Выбор q в качестве меры деформации обусловлен тем, что в процессе нагружения его значение, в отличие от кратности удлинения образца λ , может или возрастать, или оставаться постоянным. Подобным образом в модель закладывается условие необратимости изменений вышеуказанных модельных параметров. Жесткость C_2 , определяющую упругие свойства аморфной фазы полимера, которые полагались неизменными в процессе деформирования, при вычислениях считали константой и брали равной 10 МПа [3, 23].

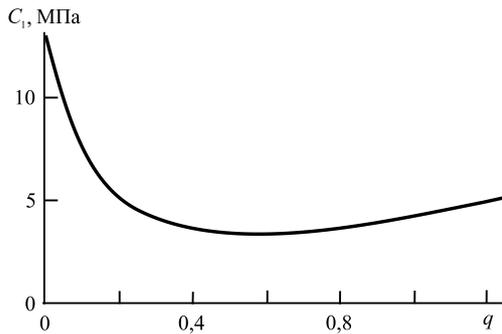


Рис. 4. Зависимость жесткости C_1 от меры деформации q

При $q < 0,24$ или $\lambda < 1,2$) он был близок к нулю. Затем происходит монотонное возрастание, причем при q , равном примерно 0,86 ($\lambda = 1,8$), значения κ приближаются к единице, то есть деформация становится чисто пластической (вся подводимая извне энергия расходуется на пластическое течение). При дальнейшем росте ($q > 1,05$ или $\lambda > 2$) кривая резко идет вверх. Это соответствует моменту появления пластической шейки. В образце возникает механическая неоднородность по длине, что в модели не учитывается. В дальнейшем для описания этого эффекта предполагается модернизировать вышеизложенный подход путем использования не одной, а нескольких последовательно соединенных 4-элементных схем.

Расчеты показали, что жесткость C_1 (ее определяли по кривым упругой разгрузки) сначала резко падает, а потом снова начинает расти (но с меньшей интенсивностью) (Рис. 4). Начальное падение можно объяснить разрушением и переориентацией кристаллитов в структуре ПЭ, а последующий незначительный рост происходит за счет развития пластических ориентационных процессов, а возможно, и образования новых кристаллитов.

На рисунке 5 представлена деформационная зависимость пластического параметра $\kappa(q)$. По характеру графика видно, что на начальном участке деформирования (упругая зона соответствует

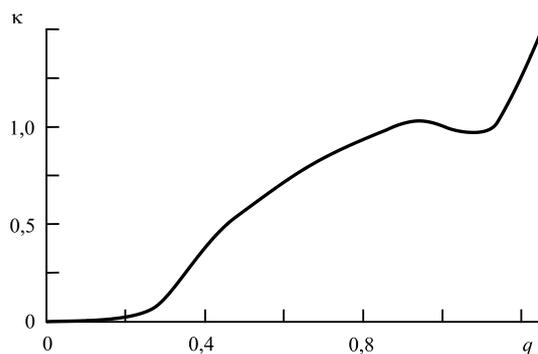


Рис. 5. Зависимость пластического параметра κ от меры деформации q

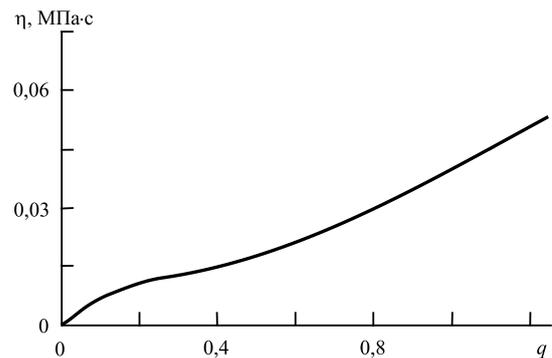


Рис. 6. Зависимость вязкости η от меры деформации q

Что касается деформационных зависимостей вязкости, то η монотонно возрастает на всем диапазоне нагружения, то есть чем больше прилагаемое внешнее усилие, тем хуже «течет» материал. Соответствующая зависимость вязкости от q представлена на рисунке 6.

5. Заключение

Проведенные исследования показали перспективность предложенной модели для исследования упруго-вязко-пластических свойств полиолефиновых полимеров. Сформулированный подход позволяет четко выделить вязкоупругую и упругопластическую составляющие в механическом поведении материала и дать их количественные оценки.

Просматривается дальнейшее усовершенствование модели, например, за счет введения нескольких вязких элементов с различными временами релаксации. Для учета неоднородности распределения напряжений и деформаций по образцу на стадии развития пластической «шейки» возможно использование не одной, а нескольких последовательно соединенных 4-элементных схем (причем для каждой стадии деформации: до прохождения «шейки», в процессе ее прохождении, стадии упрочнения и так далее). Представление определяющих соотношений с помощью символьных схем допускает без особых сложностей вводить в модели эти изменения.

Предполагается, что данная методика будет удобной для описания механического поведения не только чистых полимеров, но и полимерных нанокомпозитов типа полиолефин/глина с учетом влияния наноструктурных параметров наполнителя (степени интеркаляции, концентрации частиц и так далее). Эти данные необходимы для понимания особенностей формирования механических свойств новых материалов и выбора путей по их улучшению. Представляется, что сочетание новых экспериментальных результатов с дальнейшим совершенствованием данного теоретического подхода может привести к ряду новых полезных выводов и заключений не только о феноменологии, но и о тех внутренних процессах, которые происходят в структуре подобных материалов при их деформировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-08-00065-а, 14-08-96013-р_урал_а), а также Министерства образования и науки Пермского края (соглашение С-26/627).

Литература

1. Фишер Дж.М. Усадка и коробление отливок из термопластов: Справочник. – СПб.: Профессия, 2009. – 424 с.
2. G'Sell C., Haudin J.-M. Sillion B., Billardon R. Introduction a la mecanique des polymers. – INPL, Vandoeuvre-les-Nancy, France, 1995. – 430 p.
3. Уайт Дж.Л., Чой Д.Д. Полиэтилен, полипропилен и другие полиолефины. – СПб.: Профессия, 2006. – 256 с.
4. Энциклопедия полимеров. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1151 с.
5. Гусева М.А. Структура и физико-механические свойства нанокомпозитов на основе неполярного полимера и слоевого силиката / Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07. – М.: ИНХС РАН, 2005. – 161 с.
6. Meyer R.W., Pruitt L.A. The effect of cyclic true strain on the morphology, structure, and relaxation behavior of ultra high molecular weight polyethylene // Polymer. – 2001. – Vol. 42, no. 12. – P. 5293-5306. DOI
7. Bergström J.S., Rimnac C.M., Kurtz S.M. An augmented hybrid constitutive model for simulation of unloading and cyclic loading behavior of conventional and highly crosslinked UHMWPE // Biomaterials. – 2004. – Vol. 25, no. 11. – P. 2171-2178. DOI
8. Ayoub G., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M., Gloaguen J.M. Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers: Application to a high density polyethylene // Int. J. Plasticity. – 2010. – Vol. 26, no. 3. – P. 329-347. DOI
9. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // Mech. Mater. – 2012. – V. 52. – P. 40-57. DOI
10. Drozdov A.D., Klitkou R., Christiansen J.C. Cyclic viscoplasticity of semicrystalline polymers with finite deformations // Mech. Mater. – 2013. – Vol. 56. – P. 53-64. DOI
11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
12. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
13. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
14. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
15. Holzapfel G.A. On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1996. – Vol. 39, no. 22. – P. 3903-3926. DOI
16. Govindjee S., Reese S. A presentation and comparison of two large deformation viscoelasticity models // J. Eng. Mater. Technol. – 1997. – Vol. 119, no. 3. – P. 251-255. DOI
17. Lion A. Thixotropic behavior of rubber under dynamic loading histories: experiments and theory // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. – Vol. 46, no. 5. – P. 895-930. DOI
18. Haupt P., Lion A., Backhaus E. On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters // Int. J. Solids Struct. – 2000. – Vol. 37, no. 26. – P. 3633-3646. DOI
19. Reese S., Govindjee S. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects // Int. J. Solids Struct. – 1998. – Vol. 35, no. 26-27. – P. 3455-3482. DOI
20. Новокишинов Р.С., Роговой А.А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // МТГ. – 2005. – № 4. – С. 122-140.
21. Гаршин О.К., Свистков А.Л., Герасин В.А., Гусева М.А. Моделирование упругопластического поведения полиолефиновых нанокомпозитов с различной структурой слоистого наполнителя // Высокомолекулярные соединения. – 2009. – Т. 51, № 4. – С. 610-619. DOI
22. Гаршин О.К., Герасин В.А., Гусева М.А. Исследование упругопластических свойств полимер-силикатных нанокомпозитов с учетом изменения их объема при деформировании // Высокомолекулярные соединения. – 2011. – Т. 53, № 12. – С. 2106-2118. DOI
23. Олейник Э.Ф. Пластичность частично-кристаллических гибкоцепных полимеров на микро- и мезоуровнях // Высокомолекулярные соединения. – 2003. – Т. 45, № 12. – С. 2137-2264.

24. Palmov V.A. Comparison of different approaches in viscoelastoplasticity for large strain // ZAMM. – 2000. – Vol. 80, no. 11-12. – P. 801-806. DOI
25. Пальмов В.А., Штайн Е. Разложение конечной упругопластической деформации на упругую и пластическую составляющие // Вестник ПГТУ. Математическое моделирование систем и процессов. – 2001. – № 9. – С. 110-126.
26. Свистков А.Л., Лауке Б. Дифференциальные определяющие уравнения несжимаемых сред при конечных деформациях // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, № 3. – С. 158-170. DOI
27. Трелоар Л. Физика упругости каучука. – М.: ИЛ, 1953. – 240 с.
28. Гуль В.Е., Кулезнев В.Н. Структура и механические свойства полимеров. – М.: Высшая школа, 1972. – 320 с.
29. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.
30. Иилинский А.Ю., Излев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
31. Prandtl L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern // Proc. 1st Int. Congress of Applied Mechanics, 22-26 April, Delft, the Netherlands, 1924. – S. 43-54.
32. Reuss A. Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie // ZAMM. – 1930. – Vol. 10, no. 2. – P. 266-274. DOI
33. Odqvist F.K.G. Mathematical theory of creep and creep rupture. – Stockholm: Darendon Press, 1966. – 170 p.
34. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
35. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев: Наукова думка, 1987. – 232 с.
36. Szabó L., Balla M. Comparison of some stress rates // Int. J. Solids Struct. – 1989. – Vol. 25, no. 3. – P. 279-297. DOI
37. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
38. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E. Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions // SIAM J. Optim. – 1998. – Vol. 9, no. 1. – P. 112-147. DOI

References

1. Fischer J.M. *Handbook of molded part shrinkage and warpage*. Plastics Design Library / William Andrew Inc., 2003. 263 p.
2. G'Sell C., Haudin J.-M. Sillion B., Billardon R. *Introduction a la mecanique des polymers* [Introduction to mechanics of polymers]. INPL, Vandoeuvre-les-Nancy, France, 1995. 430 p.
3. White J.L., Choi D. *Polyolefins: processing, structure development and properties*. Hanser Publishers, 2005. 271 p.
4. *Entsiklopediya Polimerov* [Encyclopedia of Polymers]. Moscow: Sovetskaya entsiklopediya, 1977. 1151 p.
5. Guseva M.A. *Struktura i fiziko-mekhanicheskie svoystva nanokompozitov na osnove nepolyarnogo polimera i sloevogo silikata* [The structure and mechanical properties of nanocomposites based on non-polar polymer and layer silicate]. Phd Dissertation, Institute of Petrochemical Synthesis RAS, Moscow. 161 p.
6. Meyer R.W. Pruitt L.A. The effect of cyclic true strain on the morphology, structure, and relaxation behavior of ultra high molecular weight polyethylene. *Polymer*, 2001, vol. 42, no. 12, pp. 5293-5306. DOI
7. Bergström J.S., Rinnac C.M., Kurtz S.M. An augmented hybrid constitutive model for simulation of unloading and cyclic loading behavior of conventional and highly crosslinked UHMWPE. *Biomaterials*, 2004, vol. 25, no. 11, pp. 2171-2178. DOI
8. Ayoub G., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M., Gloaguen J.M. Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers: application to a high density polyethylene. *Int. J. Plasticity*, 2010, vol. 26, no. 3, pp. 329-347. DOI
9. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mech. Mater.*, 2012, vol. 52, pp. 40-57. DOI
10. Drozdov A.D., Klitkou R., Christiansen J.C. Cyclic viscoplasticity of semicrystalline polymers with finite deformations. *Mech. Mater.*, 2013, vol. 56, pp. 53-64. DOI
11. Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. New York: Academic Press, 1971. 245 p.
12. Bland D.R. *The theory of linear viscoelasticity*. Pergamon Press, 1960. 125 p.
13. Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Metody prikladnoi vyazkoprugosti* [Methods of applied viscoelasticity]. Ekaterinburg: UB RAS, 2003. 411 p.
14. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, and applications]. Moscow: Nauka, 1986. 232 p.
15. Holzapfel G.A. On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1996, vol. 39, no. 22, pp. 3903-3926. DOI
16. Govindjee S., Reese S. A presentation and comparison of two large deformation viscoelasticity models. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1997, vol. 119, no. 3, pp. 251-255. DOI
17. Lion A. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: Experiments and theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 895-930. DOI
18. Haupt P., Lion A., Backhaus E. On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters. *Int. J. Solids Struct.*, 2000, vol. 37, no. 26, pp. 3633-3646. DOI
19. Reese S., Govindjee S. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, no. 26-27, pp. 3455-3482. DOI
20. Novokshanov R.S., Rogovoy A.A. Evolyutsionnye opredelyaiushchie sootnosheniya dlya konechnykh vyazkoprugikh deformatsii [Evolutionary constitutive equations for finite viscoelastic deformations]. *Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 2005, no. 4, pp. 122-140.
21. Garishin O.K., Svistkov A.L., Gerasin V.A., Guseva M.A. Simulation of the elastic-plastic behavior of polyolefin-based nanocomposites with a different structure of layered filler. *Polym. Sci., Ser. A*, 2009, vol. 51, no. 4, pp. 407-415. DOI
22. Garishin O.K., Gerasin V.A., Guseva M.A. A study of the elastoplastic properties of polymer-silicate nanocomposites with allowance for the change in their volumes during deformation. *Polym. Sci., Ser. A*, 2011, vol. 53, no. 12, pp. 1187-1197. DOI

23. Oleinik E.F. Plasticity of semicrystalline flexible-chain polymers at the microscopic and mesoscopic levels. *Polym. Sci., Ser. C*, 2003, vol. 45, no. 12, pp. 2137-2264.
24. Palmov V.A. Comparison of different approaches in viscoelastoplasticity for large strain. *ZAMM*, 2000, vol. 80, no. 11-12, pp. 801-806. DOI
25. Palmov V.A., Shtain E. Razlozhenie upругo-plasticheskoj deformatsii na upругuiu i plasticheskiu sostavliaiushchie [Decomposition of the elastic-plastic deformation on the elastic and plastic components]. *PSTU Mechanics Bulletin*, 2001, no. 9, pp. 110-126.
26. Svistkov A.L., Lauke B. Differential constitutive equations of incompressible media with finite deformations. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2009, vol. 50, no 3, pp. 493-503. DOI
27. Treloar L.R.G. *The physics of rubber elasticity*. Oxford University Press, USA, 1949. 244 p.
28. Gul V.E., Kuleznev V.N. *Struktura i mekhanicheskie svoystva polimerov* [Structure and mechanical properties of polymers]. Moscow: Vysshaya shkola, 1972. 320 p.
29. Pisarenko G.S., Mozharovskii N.S. *Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti* [Equations and boundary value problems in the theory of plasticity and creep]. Kiev: Naukova dumka, 1981. 496 p.
30. Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [The mathematical theory of plasticity]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p.
31. Prandtl L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern [Stress distribution in plastic bodies]. *Proc. 1st Int. Congress of Applied Mechanics, 22-26 April, Delft, the Netherlands, 1924*, pp. 43-54.
32. Reuss A. Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie [Accounting elastic shape changes in plasticity theory]. *ZAMM*, 1930, vol. 10, no. 2, pp. 266-274. DOI
33. Odqvist F.K.G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Stockholm: Darendon Press, 1966. 170 p.
34. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics*. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977. 280 p.
35. Levitas V.I. *Bol'shie upругo-plasticheskie deformatsii materialov pri vysokom davlenii* [Large elastic-plastic deformation of materials under high pressure]. Kiev: Naukova dumka, 1987. 232 p.
36. Szabó L., Balla M. Comparison of some stress rates. *Int. J. Solids Struct.*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 279-297. DOI
37. Sedov L.I. *A course in continuum mechanics*. Vol. 1. The Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.
38. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM J. Optim.*, 1998, vol. 9, no 1, pp. 112-147. DOI

Поступила в редакцию 10.04.2014; опубликована в электронном виде 24.06.2014

Сведения об авторах

Гаршин Олег Константинович, дфмн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: gar@icmm.ru
Корляков Антон Сергеевич, асп., ИМСС УрО РАН; e-mail: kkorlk@yandex.ru
Шадрин Владимир Васильевич, вед.инж., ИМСС УрО РАН; e-mail: shadrin@icmm.ru