

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.20

УДК 532.5.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ТРОЙНОЙ СМЕСИ В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Т.П. Любимова^{1,2}, Н.А. Зубова¹¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация²Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

Численно исследована линейная устойчивость механического равновесия тройной смеси в квадратной полости при действии силы тяжести и заданных вертикальных градиентах температуры и концентрации компонент. Границы полости считаются твердыми, непроницаемыми для вещества. Вертикальные границы теплоизолированы, на горизонтальных границах поддерживаются постоянные разные значения температуры. Рассмотрены тройные смеси с одним и тем же фиксированным положительным отношением разделения первой компоненты и различными отношениями разделения второй компоненты μ_2 . Построены зависимости критического значения числа Рейля и частоты критических возмущений от отношения разделения второй компоненты смеси. Найдено, что, в случае нагрева снизу при положительных и малых по модулю отрицательных значениях μ_2 как в бинарной, так и тройной смеси наблюдается монотонная неустойчивость, при отрицательных же значениях μ_2 , превышающих по модулю некоторое малое значение, – колебательная неустойчивость. При нагреве сверху и отрицательных значениях μ_2 имеет место монотонная неустойчивость. Проведено сравнение результатов, полученных для бинарной и тройной смесей. Найдено, что добавление в бинарную смесь третьей компоненты с положительным отношением разделения приводит к дестабилизации равновесия по отношению к монотонной и колебательной неустойчивости при нагреве снизу и к стабилизации равновесия по отношению к монотонной неустойчивости при нагреве сверху.

Ключевые слова: конвекция, многокомпонентная смесь, диффузия, термодиффузия, механическое равновесие, монотонная и колебательная неустойчивость, замкнутая полость

STABILITY OF TERNARY MIXTURES MECHANICAL EQUILIBRIUM IN A SQUARE CAVITY WITH VERTICAL TEMPERATURE GRADIENT

T.P. Lyubimova^{1,2} and N.A. Zubova¹¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation²Perm State University, Perm, Russian Federation

The linear stability of mechanical equilibrium in ternary mixtures in a square cavity under the action of gravity and subject to vertical temperature and concentration gradients is studied numerically. Cavity boundaries are assumed to be solid and impermeable to the substance. Lateral boundaries are thermally insulated, and horizontal boundaries are permanently maintained at different temperatures. Ternary mixtures with a fixed positive separation ratio of the first component and various separation ratios of the second component μ_2 are considered. The plots of the critical Rayleigh number and the critical perturbation frequency versus the separation ratio of the second component of the mixture are constructed. For both binary and ternary mixtures heated from below, the monotonic instability is observed at positive and negative small absolute values of μ_2 and the oscillatory instability at negative values μ_2 exceeding some small modulus value. In the case of the mixture heated from above at negative values of μ_2 there takes place monotonic instability. The results obtained for binary and ternary mixtures are compared. It has been found that the addition of a third component of a binary mixture with a positive separation ratio causes destabilization of monotonic and oscillatory instabilities for heating from below and stabilization of the monotonic instability for heating from above.

Key words: convection, multi-component mixture, diffusion, thermal diffusion, mechanical equilibrium, monotonic and oscillatory instability, closed cavity

1. Введение

Конвективная устойчивость многокомпонентных систем, к которым относятся реальные жидкости и газы, представляет собой слабоизученное направление. Связано это с тем, что в многокомпонентных смесях перенос массы произвольной компоненты может быть вызван не только градиентом концентрации самой компоненты, но и перекрестной диффузией и термодиффузией, что сильно осложняет изучение поведения подобных смесей. Конвективные явления играют важную роль во многих природных и промышленных процессах. В частности, от диффузионных и термодиффузионных (при наличии геотермального градиента) процессов зависит природный состав залежей углеводородов. Термодиффузия используется для разделения изотопов в жидких и газовых смесях, которые включают коллоиды, макромолекулы или наножидкости, а также в других процессах разделения.

Конвективная устойчивость бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонент, рассмотрена в монографии [1]. В главе 7 этой монографии разбирается монотонная и колебательная неустойчивость в случае, когда в равновесии отличны от нуля и не зависимы друг от друга потоки тепла и вещества.

В [2] содержится обзор работ по конвективной неустойчивости в плоском слое бинарной смеси в рамках линейной, слабонелинейной и нелинейной теорий. Для линейной задачи термоконцентрационной конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое, нагреваемом сверху, в [3] получена зависимость времени возникновения конвекции от концентрационного числа Релея. В [4] обсуждаются конвективные колебания конечной амплитуды, вызванные эффектом Соре, в горизонтальном слое коллоида. В монографии [5] представлены результаты решения задачи устойчивости механического равновесия бинарной и тройной смесей с эффектом Соре в плоском слое с твердыми и свободными границами. Устойчивость равновесия в слое тройной смеси изучалась в [6]. Линейный анализ устойчивости горизонтального слоя тройной смеси вода–изопропанол–этанол, нагреваемого сверху, в предположении отсутствия перекрестных эффектов проведен в [7].

На практике часто приходится иметь дело с замкнутыми полостями. В частности, описываемое в настоящей статье исследование осуществляется в рамках подготовки космического эксперимента по определению коэффициентов диффузии и термодиффузии тройной смеси. Эксперимент будет проводиться в замкнутой полости, поэтому возникает необходимость определения границ устойчивости многокомпонентной среды в области с такой геометрией.

2. Постановка задачи

Рассмотрим термоконцентрационную конвекцию в квадратной полости с длиной стороны L , заполненной однородной жидкой смесью из n компонент. Плотность смеси линейно зависит от температуры T и концентраций составляющих ее компонент C_i ($i = 1, \dots, n-1$):

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}(C - C_0)), \quad (1)$$

где ρ_0 , $C_0 = (C_{10}, \dots, C_{n-10})$ и T_0 — начальные плотность, вектор концентраций и температура смеси; $\beta_T = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)|_C$ — коэффициент теплового расширения; $\mathbf{B} = \text{diag}\{\beta_{C_1}, \dots, \beta_{C_{n-1}}\}$ — диагональная матрица коэффициентов концентрационного расширения (такая, что $\beta_{C_i} = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial C_i)|_{T, C_j}$, $j = 1, \dots, n-1, i = 1, \dots, n-1, j \neq i$); $C = (C_1, \dots, C_{n-1})$ — вектор концентраций; $\mathbf{I} = (1, \dots, 1)$ — единичный вектор.

Для описания свободной термоконцентрационной конвекции смеси воспользуемся нестационарными уравнениями движения в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T(T - T_0) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}(C - C_0)), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \chi \nabla^2 T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \mathbf{D} \nabla^2 C + \mathbf{D}_T \nabla^2 T, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

Здесь: \mathbf{u} — вектор скорости; p — давление; \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения; ν — вязкость смеси; χ — температуропроводность; \mathbf{D} — матрица коэффициентов молекулярной диффузии; \mathbf{D}_T — вектор коэффициентов термодиффузии.

Предположим, что полость имеет твердые, непроницаемые для вещества границы, вертикальные границы теплоизолированы, а на горизонтальных границах поддерживаются постоянные разные значения температуры.

Если матрицу коэффициентов молекулярной диффузии привести к диагональному виду, то можно исключить перекрестные диффузионные члены в уравнениях (2)–(5), что позволит уменьшить число управляющих параметров задачи [Любимов Д.В. Частное сообщение, 2008], [8]. Для этого введем новую концентрацию

$$\hat{C} = \mathbf{A}^{-1} C, \quad (6)$$

где \mathbf{A} — матрица преобразования. Обратный переход осуществляется как

$$C = \mathbf{A} \hat{C}. \quad (7)$$

С учетом (6), (7) получаем уравнение состояния (1) в виде:

$$\rho(T, \hat{C}) = \rho_0 \left[1 - \beta_T (T - T_0) - \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{B}} (\hat{C} - \hat{C}_0) \right].$$

Уравнения свободной конвекции смеси после преобразования принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g} \left(\beta_T (T - T_0) + \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{B}} (\hat{C} - \hat{C}_0) \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \\ \frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{C} &= \hat{\mathbf{D}} \nabla^2 \hat{C} + \hat{\mathbf{D}}_T \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{D}}_T$ — новые коэффициенты концентрационного расширения, диффузии и термодиффузии соответственно.

Выберем в качестве единиц измерения длины — L , скорости — ν/L , времени — L^2/ν , давления — $\rho_0 \nu^2/L^2$, температуры — отклонение от равновесного значения $\Delta T = T - T_0$, концентрации — отклонение от равновесного значения $\beta_T \Delta T \hat{\mathbf{B}}^{-1}$. Запишем уравнения свободной конвекции смеси в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Ra Pr}^{-1} (T + \mathbf{I} \cdot \hat{C}) \boldsymbol{\gamma}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{C} = \mathbf{SC} (\nabla^2 \hat{C} - \mathbf{M} \nabla^2 T), \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (8)–(11) содержат следующие безразмерные комплексы: $\mathbf{M} = -\beta_T^{-1} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\mathbf{D}}_T$ — вектор параметров разделения размерностью $(n-1)$; $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\text{Ra} = g\beta_T \Theta L^3 / (\nu\chi)$ — число Релея, где Θ — характерная разница температур; $\mathbf{SC} = \nu^{-1} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}}^{-1}$ — матрица безразмерных параметров размерностью $(n-1) \times (n-1)$, $\{\mathbf{SC}\}_{ij} = (\hat{\beta}_{C_i} / \hat{\beta}_{C_j}) \text{Sc}_{ij}^{-1}$, где $i, j = 1, \dots, n-1$, $\text{Sc}_{ii} = \nu / \hat{D}_{ii}$ — числа Шмидта; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вертикальный вектор.

На границах поставим условия прилипания, отсутствия диффузионного потока компонентов; на горизонтальных границах зададим температуру, на вертикальных — отсутствие потока тепла:

$$x = 0, 1: \quad \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$y = 0, 1: \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = \pm 1/2, \quad \frac{\partial \hat{C}}{\partial y} - \mathbf{M} \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Задача (8)–(13) допускает решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\mathbf{u}_s = 0, \quad p_s = \frac{\text{Ra}(\mathbf{M} + 1)}{2\text{Pr}} (y - y^2), \quad T_s = \frac{1}{2} - y, \quad \hat{C}_s = \mathbf{M} \left(\frac{1}{2} - y \right), \quad (14)$$

где $\mathbf{M} = \mu_1 + \dots + \mu_{n-1}$ есть суммарное отношение разделения. Случай $\text{Ra} > 0$ соответствует подогреву снизу, $\text{Ra} < 0$ — подогреву сверху.

Интерес представляют условия, при которых механическое равновесие нарушается и возникает конвективное движение. Пусть поля скорости, температуры и концентрации есть суммы параметров основного состояния (14) и некоторых малых возмущений:

$$(\mathbf{u}, p, T, \hat{\mathbf{C}}) = (\mathbf{u}_s, p_s, T_s, \hat{\mathbf{C}}_s) + (\mathbf{u}', p', T', \hat{\mathbf{C}}'). \quad (15)$$

Линеаризованные уравнения для малых возмущений основного состояния (14) имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{u}' + \text{Ra Pr}^{-1} (T' + \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{C}}') \mathbf{e}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) T_s = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T', \quad (17)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{C}}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \hat{\mathbf{C}}_s = \mathbf{SC} (\nabla^2 \hat{\mathbf{C}}' - \mathbf{M} \nabla^2 T'), \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (19)$$

Ограничимся в (15) рассмотрением двумерных возмущений и введем функцию тока и завихренность как $\mathbf{u}'_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\mathbf{u}'_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\varphi = -\Delta \psi$. Уравнения для возмущений (16)–(19) с учетом (14), записанные в терминах функции тока и завихренности, становятся следующими:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + \text{Ra Pr}^{-1} \left(\frac{\partial T'}{\partial x} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}'}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T_s}{\partial y} = \text{Pr}^{-1} \Delta T', \quad (21)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{C}}'}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}_s}{\partial y} = \mathbf{SC} (\Delta \hat{\mathbf{C}}' - \mathbf{M} \Delta T'), \quad (22)$$

$$\varphi = -\Delta \psi. \quad (23)$$

Перепишем граничные условия (12), (13) для возмущений:

$$x = 0; 1: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial T'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}'}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

$$y = 0; 1: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = T' = \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}'}{\partial y} - \mathbf{M} \frac{\partial T'}{\partial y} = 0. \quad (25)$$

В качестве внешних воздействий, вызывающих конвекцию, возьмем нормальные возмущения вида $e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \lambda_r + i\omega$ — комплексный декремент, λ_r — действительная часть декремента, ω — круговая частота.

3. Описание последовательности решения

Задача (20)–(25) реализована с помощью пакета программ, предназначенного для исследования устойчивости многомерных течений [9]. Решалась обобщенная линейная задача на собственные значения $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}$, которая получилась в результате дискретизации уравнений и граничных условий исходной задачи с помощью метода конечных разностей. Здесь: \mathbf{A} — разреженная несимметричная комплекснозначная матрица; \mathbf{B} — вырожденная диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят числа 0, ± 1 ; λ — искомое собственное значение (декремент возмущений); \mathbf{x} — собственный вектор, составленный из возмущений скорости (давления, температуры — в зависимости от задачи). Исходные уравнения (20)–(23) с граничными условиями (24), (25) дискретизовались на квадратной сетке с равномерным пространственным шагом $h = 0,0256$. Для записи производных в узлах сетки использовались конечные разности второго порядка. Уравнениям (20)–(23) отвечают следующие конечно-разностные аналоги:

$$\lambda \frac{\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\Phi_{i-1j}^n + \Phi_{i+1j}^n + \Phi_{ij-1}^n + \Phi_{ij+1}^n - 4\Phi_{ij}^n) + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{1}{2h} (T_{i+1j}^n - T_{i-1j}^n + \hat{\mathbf{C}}_{1i+1j}^n - \hat{\mathbf{C}}_{1i-1j}^n + \hat{\mathbf{C}}_{2i+1j}^n - \hat{\mathbf{C}}_{2i-1j}^n),$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\tau} &= \frac{1}{h^2} \frac{1}{\text{Pr}} (T_{i-1j}^n + T_{i+1j}^n + T_{ij-1}^n + T_{ij+1}^n - 4T_{ij}^n) + \frac{1}{2h} (\psi_{i+1j}^n - \psi_{i-1j}^n) (T_{s\ ij+1}^n - T_{s\ ij-1}^n), \\ \lambda \frac{\hat{C}_{1\ ij}^{n+1} - \hat{C}_{1\ ij}^n}{\tau} &= \left(\left(\frac{\hat{C}_{1\ i-1j}^n - 2\hat{C}_{1\ ij}^n + \hat{C}_{1\ i+1j}^n}{h_x^2} + \frac{\hat{C}_{1\ ij-1}^n - 2\hat{C}_{1\ ij}^n + \hat{C}_{1\ ij+1}^n}{h_y^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_1 \left(\frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_y^2} \right) \right) \frac{1}{\text{Sc}_1} + \frac{\psi_{i+1j}^n - \psi_{i-1j}^n}{2h_x} \cdot \frac{\hat{C}_{s1\ ij+1}^n - \hat{C}_{s1\ ij-1}^n}{2h_y}, \\ \lambda \frac{\hat{C}_{2\ ij}^{n+1} - \hat{C}_{2\ ij}^n}{\tau} &= \left(\left(\frac{\hat{C}_{2\ i-1j}^n - 2\hat{C}_{2\ ij}^n + \hat{C}_{2\ i+1j}^n}{h_x^2} + \frac{\hat{C}_{2\ ij-1}^n - 2\hat{C}_{2\ ij}^n + \hat{C}_{2\ ij+1}^n}{h_y^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_2 \left(\frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_y^2} \right) \right) \frac{1}{\text{Sc}_2} + \frac{\psi_{i+1j}^n - \psi_{i-1j}^n}{2h_x} \cdot \frac{\hat{C}_{s2\ ij+1}^n - \hat{C}_{s2\ ij-1}^n}{2h_y}, \\ \frac{\psi_{i-1j}^n - 2\psi_{ij}^n + \psi_{i+1j}^n}{h_x^2} + \frac{\psi_{ij-1}^n - 2\psi_{ij}^n + \psi_{ij+1}^n}{h_y^2} &= -\Phi_{i,j}^n. \end{aligned}$$

Граничные условия (24), (25) в конечно-разностной форме выглядят так:

$$\begin{aligned} \Psi_{1j} &= \Psi_{Nj} = \Psi_{i1} = \Psi_{iN} = 0, \\ T'_{1j} &= T'_{2j}, \quad T'_{Nj} = T'_{N-1j}, \quad T'_{i1} = T'_{iN} = 0, \\ \hat{C}'_{11j} &= \hat{C}'_{12j}, \quad \hat{C}'_{1Nj} = \hat{C}'_{1N-1j}, \quad \hat{C}'_{i1} = \hat{C}'_{i2} - \mu_1 (T'_{i2} - T'_{i1}), \quad \hat{C}'_{iN} = \hat{C}'_{iN-1} - \mu_1 (T'_{iN-1} - T'_{iN}), \\ \hat{C}'_{21j} &= \hat{C}'_{22j}, \quad \hat{C}'_{2Nj} = \hat{C}'_{2N-1j}, \quad \hat{C}'_{2i1} = \hat{C}'_{2i2} - \mu_2 (T'_{i2} - T'_{i1}), \quad \hat{C}'_{2iN} = \hat{C}'_{2iN-1} - \mu_2 (T'_{iN-1} - T'_{iN}), \\ \Phi_{1j} &= -\frac{2}{h^2} \Psi_{2j}, \quad \Phi_{Nj} = -\frac{2}{h^2} \Psi_{N-1j}, \quad \Phi_{i1} = -\frac{2}{h^2} \Psi_{i2}, \quad \Phi_{iN} = -\frac{2}{h^2} \Psi_{iN-1}. \end{aligned}$$

В ядро пакета прикладных программ заложено решение на собственные значения обобщенной линеаризованной конечно-разностной задачи. Однако возможности пакета в целом значительно шире. Он позволяет осуществлять поиск комплексных невырожденных собственных значений и соответствующих собственных векторов, определять нейтральную поверхность в пространстве параметров исходя из условия равенства нулю действительной части главного собственного значения, находить минимальное критическое значение параметров и соответствующее минимальное волновое число как глобальный минимум нейтральной кривой.

Для решения спектральной задачи $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}$ используется следующий вариант метода Ньютона–Рафсона [10]:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} - \lambda_0 \mathbf{Bx} = \Delta \lambda \cdot \mathbf{Bx}_0, \\ \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (\text{или } \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = 1), \end{cases}$$

где искомое решение и приращение представляются, соответственно, как \mathbf{x} и $\Delta \mathbf{x}$, а \mathbf{x}_0 и λ_0 — приближенный собственный вектор и собственное значение. Решение должно быть нормировано с помощью условия $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = 1$, где \mathbf{e} — произвольно выбранный невырожденный вектор.

4. Результаты

Расчеты проводились для тройной смеси со следующими параметрами: числом Прандтля $\text{Pr} = 10$, числами Шмидта $\text{Sc}_1 = 100$, $\text{Sc}_2 = 1000$ и отношением разделения для первой компоненты смеси $\mu_1 = 0,3$. Выбранные параметры являются типичными для жидких смесей.

В смесях с эффектом Соре молекулы компоненты с отрицательным эффектом термодиффузии (отрицательным отношением разделения) под действием градиента температуры перемещаются в более нагретую часть полости, а молекулы компоненты с положительным эффектом — в холодную часть. Если действие силы тяжести отсутствует, то конвективное движение в смеси не возникает, а наблюдается лишь термодиффузионное разделение компонент. При наличии силы тяжести конвективное движение появляется в том случае, когда тяжелая компонента смеси оказывается выше, чем легкая.

При малых значениях отношения чисел Шмидта тройной смеси диффузионные свойства второй компоненты значительно хуже, чем первой, и тип неустойчивости должен определяться знаком параметра разделения второй компоненты μ_2 . Поэтому исключим из тройной смеси первую компоненту и сначала обсудим случай получившейся бинарной смеси. Известно [1], что при нагреве сверху бинарных смесей градиент концентрации легкой компоненты, обладающей нормальным эффектом термодиффузии, направлен в сторону горячей границы, что приводит к устойчивости системы. При отрицательном эффекте термодиффузии возле горячей границы накапливается тяжелая компонента смеси, что влечет за собой монотонную неустойчивость. Здесь тонущий элемент жидкости, после уравнивания температуры в полости с температурой окружающей среды, будет иметь плотность, большую плотности среды, и продолжит погружение.

В случае нагрева снизу положительный эффект термодиффузии вызывает уменьшение критического значения числа Релея (далее критическое число Рэлея — Ra_c), так как градиент концентрации легкой компоненты направлен в сторону горячей границы. Поскольку плотность поднимающегося элемента жидкости всегда меньше плотности окружающей среды, он продолжит всплытие, несмотря на процессы диффузии и теплопроводности. Следовательно, при нагреве снизу бинарных смесей с положительными значениями параметра разделения μ в них реализуется монотонная неустойчивость.

Градиент концентрации легкой компоненты, обладающей отрицательным эффектом термодиффузии, направлен в сторону холодной границы, что способствует повышению Ra_c . Всплывающий элемент жидкости, как и в предыдущем случае, обладает меньшей плотностью, чем плотность окружающей среды, но после остывания его плотность становится больше плотности окружающей среды, и он оседает на нижнюю границу полости. Таким образом, при отрицательных значениях параметра разделения, меньших некоторого значения μ_* , за кризис равновесия ответственны колебательные возмущения. В [1] для определения значения μ_* в задаче исследования конвекции бинарной смеси в вертикальном слое при искусственных граничных условиях (заданной концентрации на границах) получено выражение, из которого следует, что при $Sc > Pr$ значение μ_* должно быть отрицательным, а при $Sc \gg Pr$ — отрицательным и близким к нулю. Доказать принцип монотонности и установить границы существования колебательных возмущений в случае непроницаемых для вещества границ авторам работы [1] не удалось. Обобщение принципа монотонности возмущений на случай многокомпонентной смеси с эффектом термодиффузии для тех же граничных условий, что и в [1], приведено в [5].

Расчеты авторов данной работы в задаче с постановкой для случая бинарной смеси ($\mu_1 = 0$) при значениях $Pr = 10$, $Sc = 1000$ (Рис. 1, штриховые линии), привели, несмотря на использование других, более физических условий для концентрации на границах, к результатам, которые хорошо согласуются с данными авторов монографии [1]; при этом критическое значение отношения разделения M_* составляло $M_* \approx -3 \cdot 10^{-5}$. Точке пересечения кривой 2 с осью ординат $\mu_2 = 0$ соответствует $Ra \approx 2540$, что также совпадает со значением числа Ra , полученным в [1] для однокомпонентной смеси.

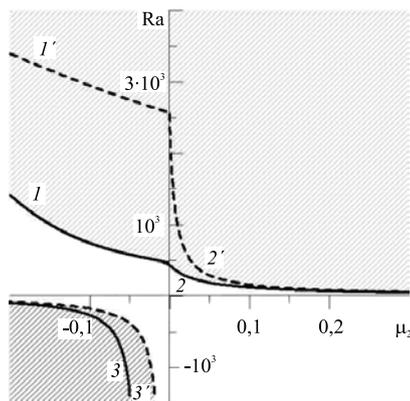


Рис. 1. Зависимость критического числа Релея Ra_c от отношения разделения μ_2 : сплошные линии – тройная смесь, штриховые линии – бинарная смесь при $Pr = 10$, $Sc_2 = 1000$; кривые 1 и 1' – границы колебательной неустойчивости; 2, 2' и 3, 3' – границы монотонной неустойчивости; заштрихованы области неустойчивости

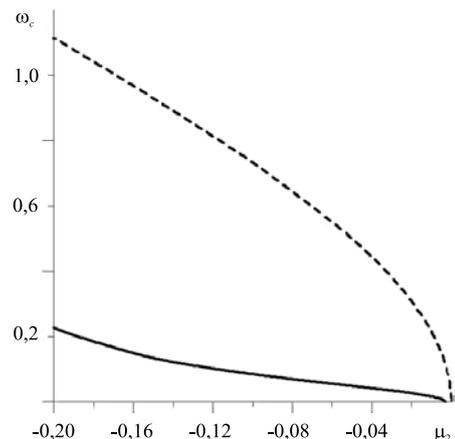


Рис. 2. Зависимость критической круговой частоты ω_c от отношения разделения μ_2 ; сплошная линия – тройная смесь, штриховая линия – бинарная смесь при $Pr = 10$, $Sc_2 = 1000$

Авторские результаты расчетов для тройной смеси с выбранными параметрами показаны на рисунке 1 (сплошные линии). Как сказано выше, тип неустойчивости определяется знаком параметра разделения второй компоненты μ_2 , поэтому критическое число Релея приведено в зависимости от отношения разделения второй компоненты μ_2 . Видно, что в тройной смеси, как и в случае бинарной смеси, наблюдаются колебательная неустойчивость при нагреве снизу и монотонная неустойчивость при нагреве снизу и сверху. Граница между монотонной и колебательной неустойчивостями в этом случае находится около значения $\mu_2 \approx 0$. Расчеты при числах Шмидта $Sc_1 = 100$ и $Sc_2 = 1000$ дали в точке ответвления колебательной ветви от монотонной значение $\mu_2 \approx -0,003$, что достаточно близко к нулю. Таким образом, в тройной смеси в случае нагрева снизу ($Ra > 0$) при $\mu_2 < -0,003$ наиболее опасными являются колебательные возмущения, а при $\mu_2 > -0,003$ — монотонные возмущения.

При положительном эффекте термодиффузии второй компоненты смеси система подвергается сильному дестабилизирующему воздействию, вызванному градиентами температуры и концентраций обеих компонент смеси. В области колебательной неустойчивости градиент температуры и градиент концентрации первой компоненты расшатывают систему, а градиент концентрации второй компоненты повышает ее устойчивость. При росте $|\mu_2|$ в области $M < 0,3$ стабилизирующее влияние отрицательного эффекта термодиффузии второй компоненты смеси также растет, что сопровождается ростом критического значения числа Релея.

При нагреве сверху ($Ra < 0$) за неустойчивость ответственны монотонные возмущения. Значения $M > 0,3$ соответствуют положительному эффекту термодиффузии обеих компонент смеси, поэтому неустойчивость не наблюдается. При $M < 0,3$ первая компонента смеси имеет положительный эффект термодиффузии (градиент концентрации является стабилизирующим), а вторая компонента — отрицательный (градиент концентрации играет роль дестабилизатора). Это вызывает неустойчивость механического равновесия смеси только при определенных условиях. Зависимость критической круговой частоты колебаний от M представлена на рисунке 2.

Как видно из рисунка 1, добавление к бинарной смеси компоненты с положительным эффектом термодиффузии ($\mu_1 = 0,3$) приводит к дестабилизации монотонной и колебательной неустойчивостей при нагреве снизу и к стабилизации монотонной неустойчивости при нагреве сверху. Это объясняется приведенными выше рассуждениями для бинарной смеси.

5. Заключение

В работе представлены результаты численного исследования линейной устойчивости механического равновесия тройной смеси в квадратной полости с твердыми, непроницаемыми для вещества границами в поле силы тяжести при вертикальном градиенте температуры. Приведение матрицы коэффициентов диффузии смеси к диагональному виду позволило исключить перекрестные диффузионные эффекты и уменьшить тем самым число управляющих параметров. Расчеты осуществлялись с помощью пакета программ для исследования устойчивости многомерных течений. Прослежены зависимости критических параметров, характеризующих устойчивость, от суммарного отношения разделения смеси. Получены границы монотонной и колебательной неустойчивостей при нагреве снизу и граница монотонной неустойчивости при нагреве сверху, а также структура возмущений функции тока, температуры и концентраций компонент смеси.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Пермского края (Соглашение № С-26/212).

Литература

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
2. Lücke M., Barten W., Büchel P., Fütterer C., Hollenger St., Jung Ch. Pattern formation in binary fluid convection and in system with throughflow // Lecture Notes in Physics. – 1998. – Vol. 55. – P. 127-196. DOI
3. Kim M.C., Choi C.K., Yeo J.-K. The onset of Soret-driven convection in a binary mixture heated from above // Phys. Fluids. – 2007. – Vol. 19, no. 8. – 084103. DOI
4. Shliomis M.I., Souhar M. Self-oscillatory convection caused by the Soret effect // Europhysics Letters. – 2000. – Vol. 49, no. 1. – P. 55-61. DOI
5. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. – М.: Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2012. – 215 с.
6. Cox S.M., Moroz I.M. Multiple bifurcations in triple convection with non-ideal boundary conditions // Physica D. – 1996. – Vol. 93, no. 1-2. – P. 1-22. DOI
7. Larre J.P., Platten J.K., Chavepeyer G. Soret effects in ternary systems heated from below // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1997. – Vol. 40, no. 3. – P. 545-555. DOI

8. Ryzhkov I.I., Shevtsova V.M. Long-wave instability of a multicomponent fluid layer with the Soret effect // *Phys. Fluids*. – 2009. – Vol. 21, no. 1. – 014102 [DOI](#)
9. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Morozov V.A. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows // *Bulletin of Perm University. Information systems and technologies*. – 2001. – No. 5. – P. 74-81.
10. Whittaker E.T., Robinson G. The Newton-Raphson method // *The calculus of observations: A treatise on numerical mathematics*. – New York: Dover, 1967. – P. 84-87.

References

1. Gershuny G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Konvektivnaya ustojchivost' neshimaemoj zhidkosti* [Convective stability of incompressible fluid]. Moscow, Nauka, 1972. 392 p.
2. Lücke M., Barten W., Büchel P., Fütterer C., Hollenger St., Jung Ch. Pattern formation in binary fluid convection and in system with throughflow. *Lecture Notes in Physics*, 1998, vol. 55, pp. 127-196. [DOI](#)
3. Kim M.C., Choi C.K., Yeo J.-K. The onset of Soret-driven convection in a binary mixture heated from above. *Phys. Fluids*, 2007, vol. 19, no. 8, 084103. [DOI](#)
4. Shliomis M.I., Souhar M. Self-oscillatory convection caused by the Soret effect. *Europhysics Letters*, 2000, vol. 49, no. 1, pp. 55-61. [DOI](#)
5. Ryzhkov I.I. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость [Thermal diffusion in mixtures: equations, symmetries and solutions and their stability]. – Krasnoyarsk: Institute of Computational Modelling SB RAS, 2012. 215 p.
6. Cox S.M., Moroz I.M. Multiple bifurcations in triple convection with non-ideal boundary conditions. *Physica D*, 1996, vol. 93, no. 1-2, pp. 1-22. [DOI](#)
7. Larre J.P., Platten J.K., Chavepeyer G. Soret effects in ternary systems heated from below. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1997, vol. 40, no. 3, pp. 545-555. [DOI](#)
8. Ryzhkov I.I., Shevtsova V.M. Long-wave instability of a multicomponent fluid layer with the Soret effect. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, no. 1, 014102. [DOI](#)
9. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Morozov V.A. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows. *Bulletin of Perm University. Information systems and technologies*, 2001, no. 5, pp. 74-81.
10. Whittaker E.T., Robinson G. The Newton-Raphson method. *The calculus of observations: A treatise on numerical mathematics*, New York: Dover, 1967. Pp. 84-87.

Поступила в редакцию 10.04.2014; опубликована в электронном виде 24.06.2014

Сведения об авторах

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф., зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: lyubimovat@mail.ru

Зубова Надежда Алексеевна, инж., ИМСС УрО РАН; e-mail: yanca@yandex.ru