

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.2.16](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.2.16)
УДК 532.5.032

ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИЙ

А.А. Алабужев

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

В работе рассматриваются собственные и вынужденные колебания цилиндрического газового пузырька, окруженного несжимаемой жидкостью со свободной внешней недеформируемой поверхностью – поверхностью, на которой мало поверхностное натяжение и его можно не принимать во внимание. Пузырек ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми плоскостями. На систему действует внешнее однородное пульсационное поле давления. Динамика контактной линии учитывается с помощью эффективного граничного условия: скорость движения контактной линии предполагается пропорциональной отклонению краевого угла от равновесного значения, равного 90° . Изучена осесимметричная мода собственных колебаний; исследована зависимость частот и декрементов затухания от параметров задачи. Показано существование «антирезонансных» частот, то есть таких значений внешних частот, при которых поверхность пузырька не отклоняется от равновесного состояния.

Ключевые слова: цилиндрический газовый пузырек, динамика контактной линии, колебания

BEHAVIOR OF A CYLINDRICAL BUBBLE UNDER VIBRATIONS

A.A. Alabuzhev

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation
Perm State University, Perm, Russian Federation*

Eigen and forced vibrations of a cylindrical gas bubble surrounded by an incompressible fluid with a free non-deformable external interface are investigated. The bubble is bounded by two parallel solid planes. The system is subjected to an external vibration field. The contact line dynamics is taken into account by an effective boundary condition, and the contact line velocity is assumed to be proportional to deviation of the contact angle from the equilibrium value. The coefficient of proportionality, so-called wetting parameter (Hocking's constant), characterizes the properties of the fluid and the substrate material. The equilibrium contact angle is right. An axially symmetric mode of eigen oscillations is studied; the dependence of frequencies and decrements on problem parameters is investigated. It has been found that for the main even mode of eigen oscillations (which describes the radial compression of the bubble) the frequency of eigen oscillations can vanish in some wetting parameter interval. The length of this interval increases with increasing ratio of the equilibrium bubble radius to the height. The eigen frequencies of other modes decrease with increasing Hocking's constant. The lowest natural frequency is observed for the freely sliding bubble. The existence of «anti-resonance» frequencies is demonstrated, i.e. the values of external frequencies when the bubble interface does not deviate from the equilibrium value.

Key words: cylindrical gas bubble, contact line dynamics, forced oscillations, eigen oscillations

1. Введение

Нестационарное движение контактной линии (речь идет о линии контакта трех несмешивающихся фаз — твердой, жидкой и газообразной) встречается во многих природных и технологических процессах и привлекает к себе внимание благодаря разнообразию сопровождающих его эффектов [1, 2]. Одним из направлений исследований является изучение возможностей управления каплями на подложке, например, с помощью вибраций [3–5], или электрического поля [6–8] или поверхностных свойств подложки [9, 10]. Рассматриваются и другие системы с каплями, например, сферическая капля жидкости, закрепленная с помощью кольца в экваториальной плоскости [11, 12]. К другому направлению относится исследование разрывов тонких пленок [13–15] — образование сухих пятен или отдельных капель, что может привести к негативным последствиям. Так, образование сухих пятен ухудшает качество получаемого покрытия; свободные от жидкости участки поверхности практически исключаются из процесса теплообмена, что резко снижает эффективность теплообменников и может привести к выводу их из строя. Такие объекты (сухие пятна, капли и так далее) обладают линией контакта на границе раздела трех сред, поэтому очень важно понять поведение контактной линии при наличии внешнего воздействия. Отметим также, что контактная линия имеет место и при других вариациях взаимодействия трех несмешивающихся сред, например твердая–жидкая–жидкая.

Одно из наиболее часто используемых эффективных граничных условий, описывающих динамику контактной линии, впервые было применено в [16]. В этой работе изучалось затухание стоячих волн на поверхности жидкости, находящейся между двумя вертикальными стенками. Указанное условие предполагает линейную связь между скоростью движения контактной линии и отклонением краевого угла от равновесного значения:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*, \quad (1)$$

где ζ^* — отклонение поверхности жидкости от равновесного положения; Λ^* — феноменологическая постоянная (постоянная Хокинга); \mathbf{k} — вектор нормали к твердой поверхности. Условие (1) приведено для прямого равновесного краевого угла, но его можно записать и для произвольного значения. Отметим, что условия фиксированной контактной линии ($\zeta^* = 0$) и постоянного краевого угла ($\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$) являются предельными случаями граничного условия (1). В [16] показано, что условие (1) всегда приводит к затуханию колебаний, за исключением двух предельных случаев, указанных выше. Затухание, в первую очередь, обусловлено взаимодействием движущейся контактной линии с неровностями (шероховатостями) ограничивающих поверхностей. Полученные в [16] теоретические результаты качественно совпали с результатами экспериментов. Кроме того, шлифовка поверхности вертикальных стенок увеличила параметр Λ^* в несколько раз, то есть параметр Λ^* характеризует не только взаимодействие жидкости и стенок, но еще и качество обработки поверхности стенок.

В [17] изучались собственные колебания полусферического пузырька на твердой подложке и вынужденные колебания под действием продольных вибраций. Динамика контактной линии учитывалась через краевое условие (1). В [18] применялось более сложное граничное условие, моделирующее гистерезис краевого угла [19]. Для полусферической капли на подложке аналогичные исследования осуществлялись в [20, 21].

Поведению капли сжимаемой жидкости на твердой подложке, совершающей осесимметричные вибрации с акустической частотой, посвящена работа [22]. Получены решения без учета поверхностных сил и при малом поверхностном натяжении. Их сравнение показало, что при наличии поверхностных сил появляются мелкомасштабные течения вблизи поверхности капли.

В [23] рассматривались собственные колебания цилиндрической капли несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью и ограниченной в осевом направлении твердыми плоскостями. Для описания движения контактной линии ставилось эффективное граничное условие (1). Поведение сжатой капли, которая в равновесии имела форму фигуры вращения (равновесный краевой угол был отличен от прямого), изучалось в [24].

В данной работе обсуждается поведение цилиндрического пузырька, зажато между двумя плоскими параллельными пластинами, под действием вибраций.

2. Постановка задачи

Газовый пузырек окружен несжимаемой жидкостью плотностью ρ_e^* . Здесь и в дальнейшем величины с индексом i относятся к пузырьку, e — к окружающей жидкости. Система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (Рис. 1), расстояние между которыми равняется h^* . В отсутствие

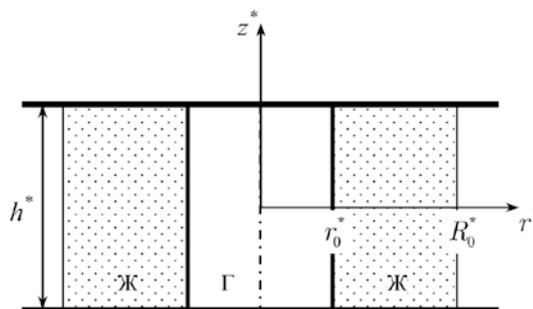


Рис. 1. Геометрия задачи; Г – газ, Ж – жидкость.

внешних сил пузырек имеет форму цилиндра радиусом r_0^* . Краевой угол между боковой поверхностью пузырька и твердыми плоскостями в равновесии составляет $\pi/2$. На расстоянии R_0^* от оси симметрии жидкость, окружающая пузырек, ограничена свободной поверхностью. На систему действует однородное пульсационное поле давления с амплитудой A^* и частотой ω^* . Движение жидкости считаем потенциальным, вязким затуханием пренебрегаем.

В силу симметрии задачи цилиндрическую систему координат (r^*, α^*, z^*) , в которой поверхность

капли описывается уравнением: $r^* = r_0^* + \zeta^*(z^*, \alpha^*, t^*)$, где $\zeta^*(z^*, \alpha^*, t^*)$ — отклонение поверхности от равновесного положения. Кроме этого, выберем в качестве единиц измерения времени $\sqrt{\rho_e^* r_0^{*3} / \sigma^*}$, радиальной координаты — r_0^* , осевой координаты — h^* , отклонения поверхности — A^* , скорости — $A^* \sqrt{\sigma^* / \rho_e^* r_0^{*3}}$, давления — $A^* \sigma^* / r_0^{*2}$, где σ^* — коэффициент поверхностного натяжения.

Давление жидкости может быть представлено с помощью безразмерного уравнения Бернулли, а потенциал скорости — уравнением Лапласа (задача линеаризуется по малой амплитуде внешнего воздействия).

$$p_e = -\left(\frac{\partial\varphi_e}{\partial t} - \omega^2 e^{i\omega t}\right), \quad \Delta\varphi_e = 0. \quad (2)$$

Здесь: φ — потенциал скорости жидкости, $v = \nabla\varphi$; p_e — отклонение давления жидкости от равновесного значения; $t = t^* \sqrt{\sigma^*/(\rho_e^* r_0^{*3})}$ — безразмерное время; $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_e^* r_0^{*3}/\sigma^*}$ — безразмерная частота внешнего воздействия; i — мнимая единица. Внешняя сила (2) возбуждает только движение жидкости, которое не зависит от азимутального угла α^* , поэтому будем изучать только осесимметричные моды колебаний.

Газ в пузырьке полагаем невесомым, а параметры его состояния — политропными (показатель политропы n_p). Суммарное давление газа в пузырьке подчиняется условию:

$$(p_{g0} + p_i)V^{n_p}(t) = p_0V_0^{n_p}.$$

Здесь: p_{g0} — безразмерное равновесное давление газа в пузырьке, $p_{g0} = P_g^* r_0^*/\sigma^*$; P_g^* — размерное равновесное давление газа в пузырьке; p_i — пульсационное давление в пузырьке; p_0 — давление газа в состоянии равновесия; $V_0 = \pi$ — безразмерный равновесный объем пузырька, $V(t) = V_0(1 + 2\varepsilon\langle\zeta\rangle)$; $\zeta = \zeta(z, t)$ — безразмерное отклонение поверхности от равновесного значения; $\langle\zeta\rangle = (2\pi)^{-1} \int_S \zeta dS$ — осредненное по поверхности пузырька $S = S(z)$ отклонение поверхности. В результате для пульсационного давления газа в пузырьке получаем выражение

$$p_i = -2n_p P_g^* r_0^*/\sigma^* \langle\zeta\rangle \equiv -P_0 \langle\zeta\rangle. \quad (3)$$

Сформулируем граничные условия задачи:

– на поверхности раздела пузырек–жидкость выполним условие баланса нормальных напряжений и кинематическое граничное условие:

$$r = 1: \quad [p] = \zeta + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}, \quad (4)$$

$r = r^*/r_0^*$, $z = z^*/h^*$ — безразмерные координаты; квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и пузырьком;
– на твердых поверхностях поставим условия непротекания:

$$z = \pm 1/2: \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

– скорость движения контактной линии считаем пропорциональной отклонению контактного угла от равновесного значения [1]:

$$z = \pm 1/2, r = 1: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \quad (6)$$

– предполагаем, что поверхностное натяжение на внешней поверхности жидкости достаточно мало и им можно пренебречь:

$$r = R_0: \quad \varphi_e = 0. \quad (7)$$

Необходимо установить величину потенциала скорости жидкости, отклонения боковой поверхности пузырька от равновесного состояния и поле давления в жидкости и пузырьке.

Краевая задача (2)–(7), в дополнение к введенным, содержит следующие безразмерные параметры: малую относительную амплитуду $\varepsilon = A^*/r_0^*$, параметр смачивания $\lambda = \Lambda^*/\sqrt{\rho_e^* r_0^*/\sigma^*}$, геометрический параметр $b = r_0^*/h^*$, радиус внешней поверхности $R_0 = R_0^*/r_0^*$.

3. Собственные колебания

Сначала рассмотрим собственные колебания цилиндрического газового пузырька. Решение задачи (2)–(7) будем искать в виде рядов Фурье по собственным функциям уравнения Лапласа (2). Для потенциала φ_e и отклонения поверхности ζ запишем решения следующим образом:

$$\varphi_e(r, z, t) = i \left(a_0 (\ln R_0 - \ln r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k R_k^{ie}(r) + b_k R_k^{ee}(r)) \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k R_k^{io}(r) + d_k R_k^{eo}(r)) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{i\Omega t}, \quad (8)$$

$$\zeta(z, t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos(2\pi k z) + h_0 \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} g_k \sin((2k+1)\pi z) + h_1 \sin\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i\Omega t}, \quad (9)$$

где Ω — частота собственных колебаний; k — волновое число; $R_k^{ie}(r) = I_0(2k\pi br)$, $R_k^{io}(r) = I_0((2k+1)\pi br)$, $R_k^{ee}(r) = K_0(2k\pi br)$, $R_k^{eo}(r) = K_0((2k+1)\pi br)$, I_0 , K_0 — модифицированные функции Бесселя; $a_k, b_k, c_k, d_k, f_k, g_k, h_0, h_1$ — неизвестные амплитуды. Вид решения (9) выбран таким, что его второе слагаемое является частным решением уравнения баланса нормальных напряжений (4). Первые суммы в (8) и (9) являются суммами четных мод собственных колебаний, а вторые — нечетных. Под четностью будем подразумевать четность функций относительно смены знака координаты z .

Подставляя решения (8), (9) в задачу (2)–(7) и отбрасывая член с ω^2 в уравнении (2), получаем спектрально-амплитудную задачу, собственными числами которой являются частоты Ω собственных колебаний. Из решения этой задачи следует, что собственные числа находятся из уравнений:

– четные моды

$$i\Omega \left(\left(\Omega^2 - \frac{P_0}{\ln R_0} \right) \frac{C_0}{\Omega_0^2 - \Omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \Omega^2} + \cos \frac{1}{2b} \right) - \frac{\lambda}{b} \sin \frac{1}{2b} = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{P_0 - 1}{\ln R_0}, \quad \Omega_{ek}^2 = \frac{4\pi^2 k^2 b^2 - 1}{F_{ek}} \left(R_{kr}^{ee}(1) \frac{R_k^{ie}(R_0)}{R_k^{ee}(R_0)} - R_{kr}^{ie}(1) \right), \quad F_{ek} = R_k^{ie}(1) - R_k^{ee}(1) \frac{R_k^{ie}(R_0)}{R_k^{ee}(R_0)},$$

$$C_0 = 2b \sin\left(\frac{1}{2b}\right), \quad C_k = -\frac{4b(-1)^k}{4\pi^2 k^2 b^2 - 1} \sin\left(\frac{1}{2b}\right);$$

– нечетные моды

$$i\Omega \left(\Omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \Omega^2} + \sin \frac{1}{2b} \right) + \frac{\lambda}{b} \cos \frac{1}{2b} = 0. \quad (11)$$

$$\Omega_{ok}^2 = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1}{F_{ok}} \left(R_{kr}^{eo}(1) \frac{R_k^{io}(R_0)}{R_k^{eo}(R_0)} - R_{kr}^{io}(1) \right), \quad F_{ok} = R_k^{io}(1) - R_k^{eo}(1) \frac{R_k^{io}(R_0)}{R_k^{eo}(R_0)},$$

$$S_k = \frac{4b(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1} \cos\left(\frac{1}{2b}\right).$$

Здесь: $\Omega_0, \Omega_{ok}, \Omega_{ek}$ — частоты собственных колебаний пузырька со свободно скользящей контактной линией (то есть при $\lambda \rightarrow \infty$); $R_{kr}^{ie}(r) = \partial R_k^{ie}(r) / \partial r$, $R_{kr}^{ee}(r) = \partial R_k^{ee}(r) / \partial r$, $R_{kr}^{io}(r) = \partial R_k^{io}(r) / \partial r$, $R_{kr}^{eo}(r) = \partial R_k^{eo}(r) / \partial r$, C_k и S_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\cos(z/b)$ и $\sin(z/b)$ по базисным функциям $\cos(2\pi k z)$ и $\sin((2k+1)\pi z)$ соответственно. Уравнения (10), (11) решались численно методом секущих.

Нетрудно убедиться, что комплексные алгебраические уравнения (10) и (11) имеют комплексные решения, которые свидетельствуют, что колебания затухают вследствие диссипации энергии собственных колебаний, вызванной взаимодействием движущейся линии контакта с твердой подложкой. Полученные

уравнения (10), (11) качественно похожи на аналогичные уравнения для нахождения частот собственных колебаний цилиндрической капли несжимаемой жидкости [23]. Сжимаемость пузырька учитывается только в первом слагаемом (10), характеризующем радиальную моду собственных колебаний, волновое число которой равно нулю.

На рисунке 2 показаны собственные частоты и декременты затухания радиальной моды собственных колебаний от постоянной Хокинга при различных параметрах задачи. Отметим, что для $\text{Re}(\Omega)$ строится только одно решение, сопряженное ему решение (четное относительно оси абсцисс) на графиках не приводится. С увеличением объема внешней жидкости частота (Рис. 2а) и декремент затухания (Рис. 2г) радиальной моды уменьшаются. С увеличением же давления газа P_0 в пузырьке частота растет (Рис. 2б), а декремент затухания уменьшается (Рис. 2д). Из рисунков 2г, д видно, что максимальное затухание происходит при конечных значениях λ .

Кроме колебательного (периодического) режима существует еще и монотонный (аперриодический) режим, при котором корни уравнения (10) имеют только мнимую часть (Рис. 2ж). Эти два режима не взаимодействуют до тех пор, пока частота колебательного режима не обращается в ноль.

Из рисунка 2 видно, что при колебательном режиме частота монотонно уменьшается с увеличением λ , а декремент затухания имеет максимум при конечном капиллярном параметре, стремясь к нулю при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$. Для монотонного режима инкремент затухания нарастает с увеличением λ . В первом случае (при $\lambda \rightarrow 0$) для четных мод справедливы соотношения:

– колебательный режим

$$\Omega_{\text{Im}} \left(\left(\Omega_{\text{Re}}^2 - \frac{P_0}{\ln R_0} \right) \frac{\Omega_0^2 + \Omega_{\text{Re}}^2}{(\Omega_0^2 - \Omega_{\text{Re}}^2)^2} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\Omega_{ek}^2 + \Omega_{\text{Re}}^2) C_k}{(\Omega_{ek}^2 - \Omega_{\text{Re}}^2)^2} + \cos \frac{1}{2b} \right) + \frac{\lambda}{b} \sin \frac{1}{2b} = 0,$$

здесь $\Omega = \Omega_{\text{Re}} + i\Omega_{\text{Im}}$ и частота Ω_{Re} определяются из уравнения

$$\left(\Omega_{\text{Re}}^2 - \frac{P_0}{\ln R_0} \right) \frac{C_0}{\Omega_0^2 - \Omega_{\text{Re}}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega_{\text{Re}}^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \Omega_{\text{Re}}^2} + \cos \frac{1}{2b} = 0;$$

– монотонный режим

$$\Omega_{\text{Im}} \left(\cos \left(\frac{1}{2b} \right) - \frac{P_0 C_0}{\Omega_0^2 \ln R_0} \right) + \frac{\lambda}{b} \sin \frac{1}{2b} = 0.$$

Во втором случае (при $\lambda \rightarrow \infty$) коэффициенты затухания имеют вид:

– колебательный режим

$$\left(\Omega_{\text{Re}}^2 - \frac{P_0}{\ln R_0} \right) C_0 - \frac{2\lambda \Omega_{\text{Im}}}{b} \sin \left(\frac{1}{2b} \right) = 0, \quad \Omega_{\text{Re}}^2 (-1)^k C_k - \frac{2\lambda \Omega_{\text{Im}}}{b} \sin \left(\frac{1}{2b} \right) = 0,$$

а собственные частоты колебаний капли, в этом случае, совпадают с собственными частотами свободно скользящей контактной линии Ω_0 и Ω_{ek} ($k=1,2,3,\dots$);

– монотонный режим

$$\Omega_{\text{Im}} \left(\frac{\Omega_{\text{Im}}^2}{\Omega_0^2 + \Omega_{\text{Im}}^2} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{\text{Im}}^2 (-1)^k C_k}{\Omega_{ek}^2 + \Omega_{\text{Im}}^2} \right) - \frac{\lambda}{b} \sin \frac{1}{2b} = 0.$$

На рисунках 2в, з показана частота радиальной моды при различных значениях геометрического параметра b . Начиная с некоторого значения b , возникает интервал значений параметра λ , на котором частота радиальной моды обращается в ноль. Этот интервал увеличивается с ростом значений b . Декремент затухания (Рис. 2е, ж, и) на этом интервале имеет три значения, а границы интервала соответствуют точкам ветвления спектра I и II (Рис. 2и).

С увеличением безразмерного геометрического параметра b частота радиальной моды растет (Рис. 2д) как при малых, так и конечных λ , но не зависит от b при больших λ (см. выражение для Ω_0^2). Это связано с тем, что при увеличении b уменьшается высота h^* по отношению к равновесному размерному

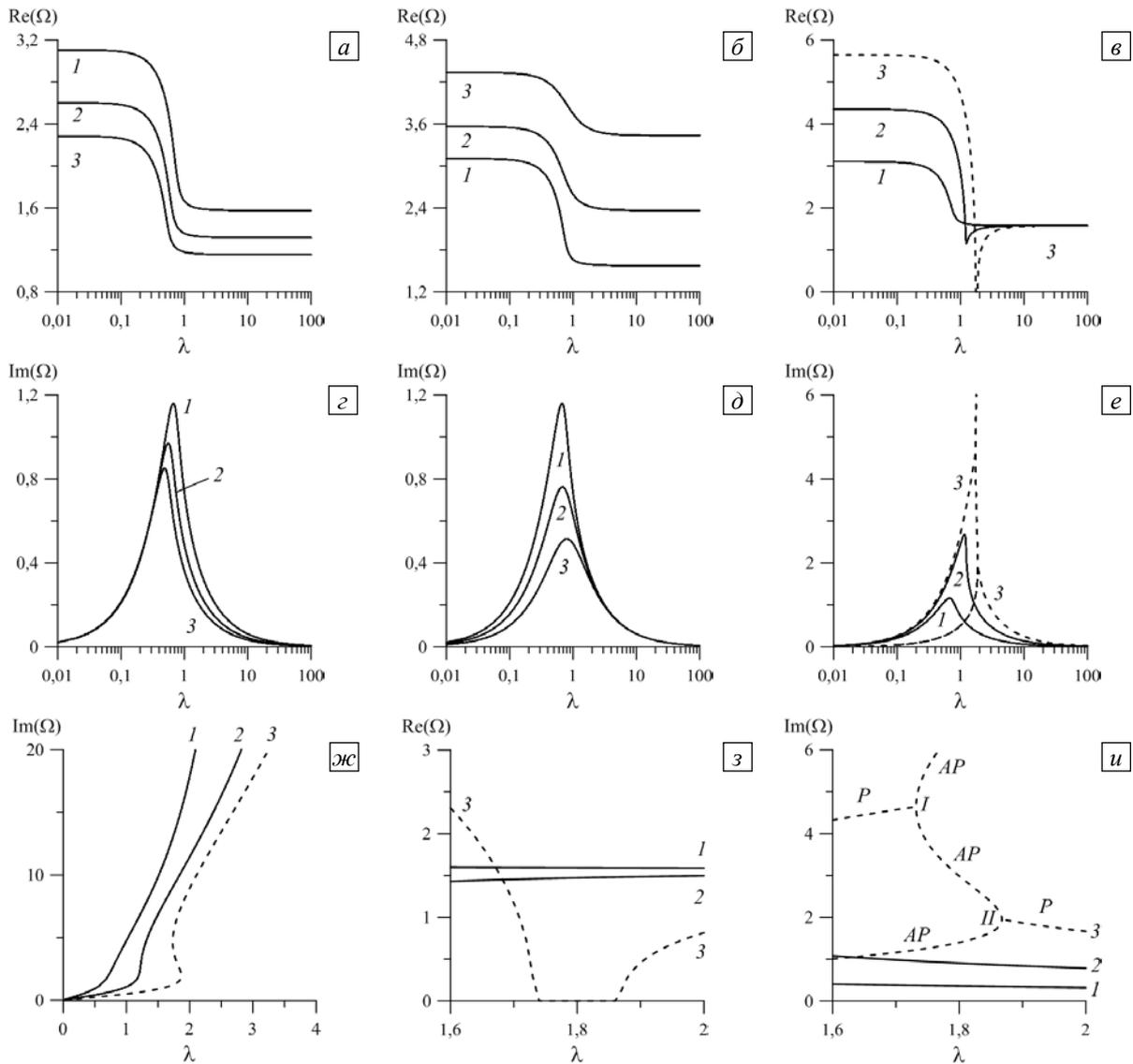


Рис. 2. Зависимости частоты ($\text{Re}(\Omega)$) и декремента затухания ($\text{Im}(\Omega)$) радиальной моды от параметра смачивания λ : (а, з) – при $b=1, P_0=5$ и различных значениях R_0 : 5 (кривая 1), 10 (2), 20 (3); (б, д) – при $b=1, R_0=5$ и различных значениях P_0 : 5 (кривая 1), 10 (2), 20 (3); (в, е-и) – при $P_0=5, R_0=5$ и различных значениях b : 1 (кривая 1), 1,5 (2), 2 (3); на фрагменте (и) римские цифры обозначают точки ветвления спектра, P – колебательный (периодический) режим, AP – монотонный (аперриодический)

радиусу r_0^* , что приводит к уменьшению характерных длин капиллярных волн, которые распространяются вдоль поверхности раздела. А уменьшение длины волны, согласно дисперсионному соотношению [25], соответствует увеличению волнового числа и частоты таких волн. При больших значениях λ контактная линия движется свободно, краевой угол не меняется, поэтому от осевой координаты z (и, соответственно, от высоты капли h^*) обусловленность отсутствует. Подобные явления были обнаружены при изучении собственных колебаний цилиндрической капли несжимаемой жидкости для основных частот мод с азимутальным волновым числом $m \geq 2$ [23].

Все четные моды, за исключением радиальной моды собственных колебаний, описывают изменение формы пузырька, и в дальнейшем будем называть их поверхностными. Частоты этих мод слабо подчинены параметрам сжимаемости. На рисунке 3а показаны зависимости частоты первой гармоники $k=1$ от λ (см. выражение (10)) при разных значениях давления P_0 . Декремент затухания для этой моды приведен на рисунке 3в. Все линии сливаются и значения декремента затухания при разных P_0 не отличаются друг от друга. Значение частоты растет с увеличением b (Рис. 3б) аналогично изменению частоты нулевой моды.

Существует довольно интересное явление — пересечение частот соседних мод собственных колебаний: ветвь частоты радиальной моды проходит поперек ветви частоты поверхностной моды. Рисунок 4 содержит зависимости частоты и декремента затухания собственных колебаний двух первых мод

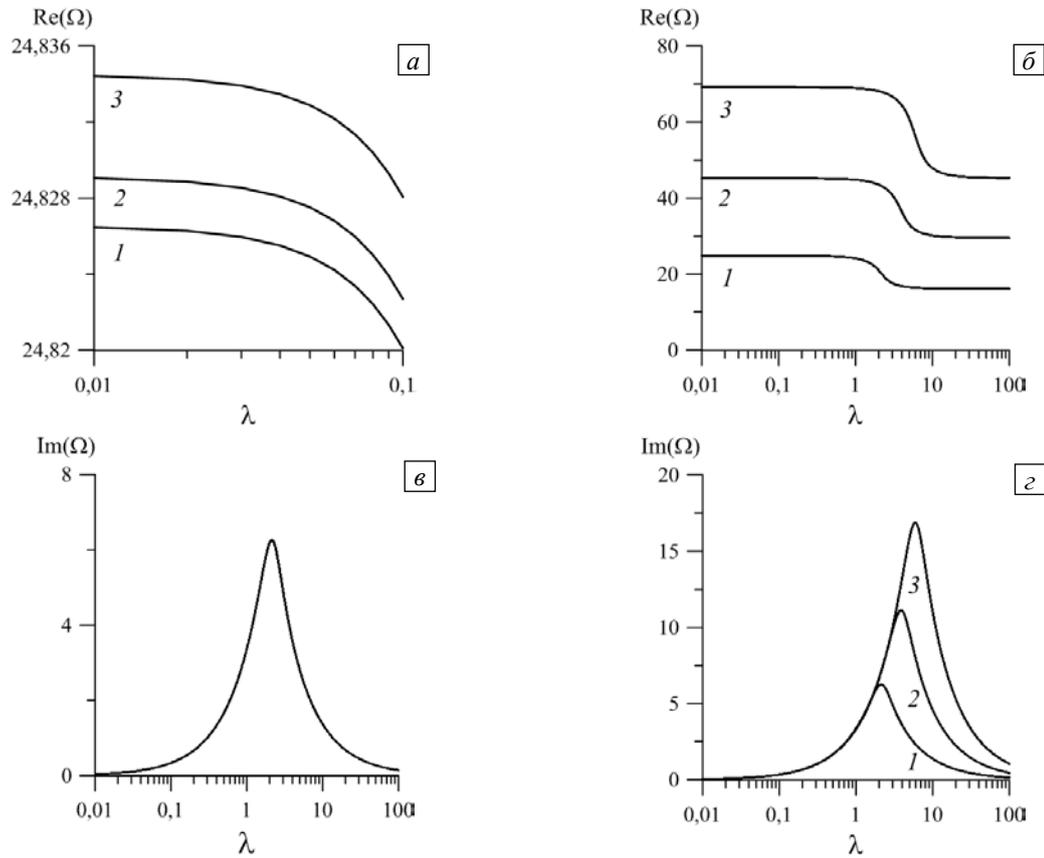


Рис. 3. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega)$ и декремента затухания $\text{Im}(\Omega)$ первой четной моды от параметра смачивания λ : (а, в) – при $b=1, R_0=5$ и различных значениях P_0 : 5 (кривая 1), 20 (2), 50 (3); (б, г) – при $R_0=5, P_0=5$ и различных значениях b : 1 (кривая 1), 1,2 (2), 1,5 (3)

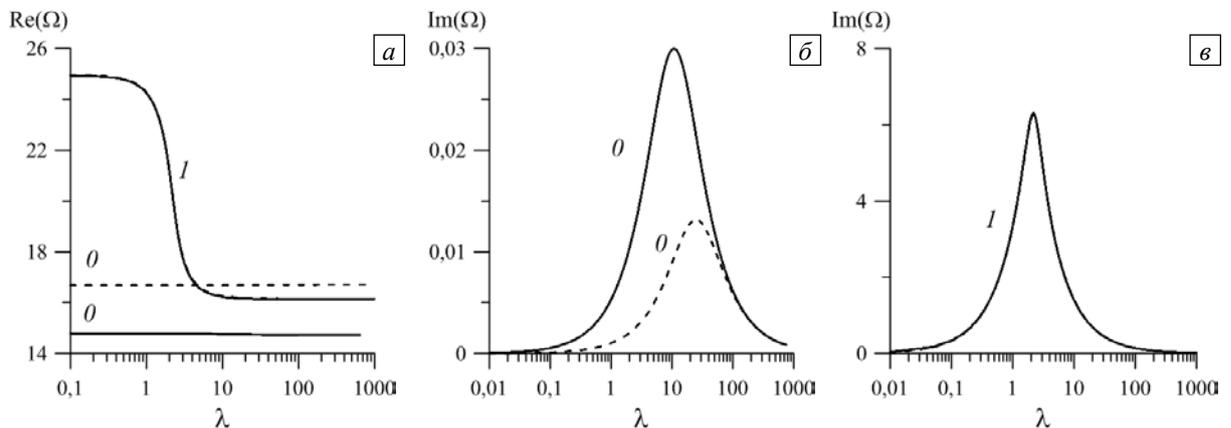


Рис. 4. Зависимости частоты $\text{Re}(\Omega)$ (а) и декремента затухания $\text{Im}(\Omega)$ (б, в) двух первых мод – объемной (0) и первой (1), от параметра λ при $b=1, R_0=5$ для разных значений давления P_0 : 350 (сплошная линия), 450 (штриховая линия)

(нулевой и первой) от параметра λ для двух разных значений давления P_0 . При малых и конечных значениях λ ($\lambda=0,5$ на Рис. 5а) ветви частот, в отличие от ветвей декрементов затухания, не пересекаются (Рис. 5б). При $\lambda=10$ кривые скрещиваются, и значения частот фактически совпадают со значениями Ω_0 и Ω_{01} (Рис. 5а), но пересечения декрементов затухания не наблюдается (Рис. 5б). Следовательно, несмотря на равенство частот в общей точке, радиальные колебания и колебания формы остаются различными режимами с разными декрементами затухания. Похожее явление, свойственное кривым частот, было обнаружено для полусферического пузырька на подложке [17] (случай без диссипации рассмотрен, например, в [26]). Как уже отмечалось, частоты мод колебаний формы слабо зависят от P_0 , поэтому на рисунке 4а кривые для частоты первой моды при $P_0=350$ и $P_0=450$ фактически сливаются друг с другом (аналогично ведут себя и кривые декрементов затухания на Рис. 4в).

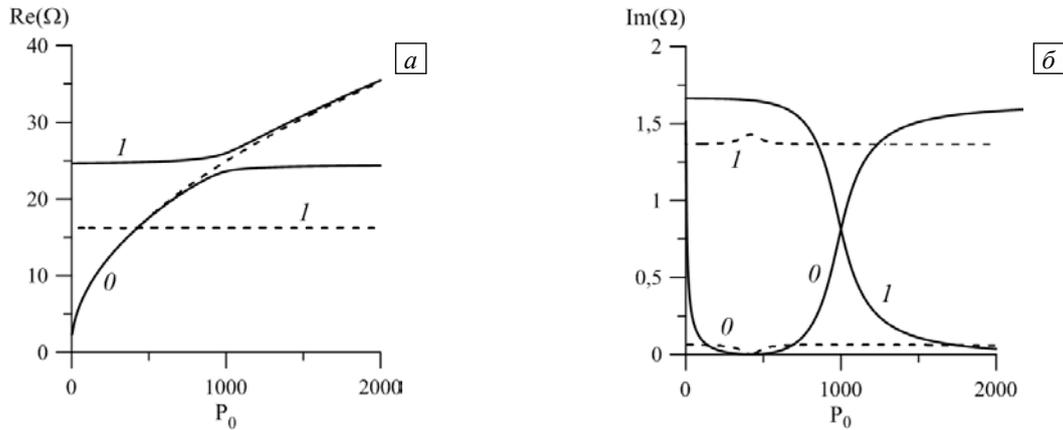


Рис. 5. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega)$ (а) и декремента затухания $\text{Im}(\Omega)$ (б) двух первых мод – объемной (0) и первой (1), от давления P_0 при $b = 1$, $R_0 = 5$ и разных значениях параметра λ : 0,5 (сплошная линия), 10 (штриховая линия)

Частоты нечетных мод (11) от значения P_0 не зависят, то есть газовый пузырек ведет себя как капля несжимаемой жидкости. Качественно характеры частот и декрементов затухания нечетных мод аналогичны случаю четных мод (Рис. 3б и з). Отметим, что для основной частоты существует отрезок значений λ , где она обращается в ноль. Однако этот отрезок, в отличие от основной частоты четных мод, уменьшается с увеличением значения геометрического параметра b . Такой же эффект был обнаружен для цилиндрической капли [23].

4. Вынужденные колебания

Следуя логике решения задачи собственных колебаний (8), (9), в случае вынужденных колебаний запишем решения для потенциала φ_e и отклонения поверхности ζ следующим образом:

$$\varphi_e(r, z, t) = i \left(a_0 (\ln R_0 - \ln r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k R_k^{ie}(r) + b_k R_k^{ee}(r)) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\omega t}, \tag{12}$$

$$\zeta(z, t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(2\pi k z) + d \cos\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i\omega t}. \tag{13}$$

Легко показать, что действующая внешняя вибрационная сила (2) возбуждает только четные гармоники, по которым и раскладываются решения (12), (13). Подставляя их в уравнения (2)–(7), получим выражения для неизвестных амплитуд a_k , b_k , c_k и d :

$$d = \frac{\omega^2 \ln(R_0)}{(\Omega_0^2 - \omega^2) \left(\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 \ln(R_0) - P_0}{(\Omega_0^2 - \omega^2) \ln(R_0)} C_0 + \cos \frac{1}{2b} - \frac{\lambda}{i\omega b} \sin \frac{1}{2b} \right)}, \tag{14}$$

$$c_0 = \frac{(\omega^2 - P_0 / \ln(R_0)) C_k d - \omega^2}{\Omega_0^2 - \omega^2}, \quad c_k = \frac{(-1)^k \omega^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2},$$

$$a_0 = -\omega(c_0 + C_0 d), \quad a_k = \omega(c_k + C_k d) F_{ek}^{-1}, \quad b_k = -a_k e^{-R_0} \frac{R_k^{ie}(R_0)}{R_k^{ee}(R_0)}.$$

Введем обозначение $\zeta_0 = \max(|\zeta|_{z=0})$ — максимальное отклонение поверхности пузырька от равновесного

положения. Аналогично, для максимального отклонения на твердой поверхности — $\zeta_s = \max(|\zeta|_{z=1/2})$.

Поведение ζ_0 и ζ_s как функций частоты внешнего воздействия показано на рисунках 6 и 7. Первый максимум соответствует частоте радиальной моды. Максимальные значения возникают при линейном резонансе.

При конечных значениях параметра λ диссипация взаимодействия, обусловленная движением контактной линии, максимальна (Рис. 6, 7). Это соответствует результатам, показанным ранее для зависимостей декрементов затухания собственных колебаний от значений λ (например, Рис. 2з).

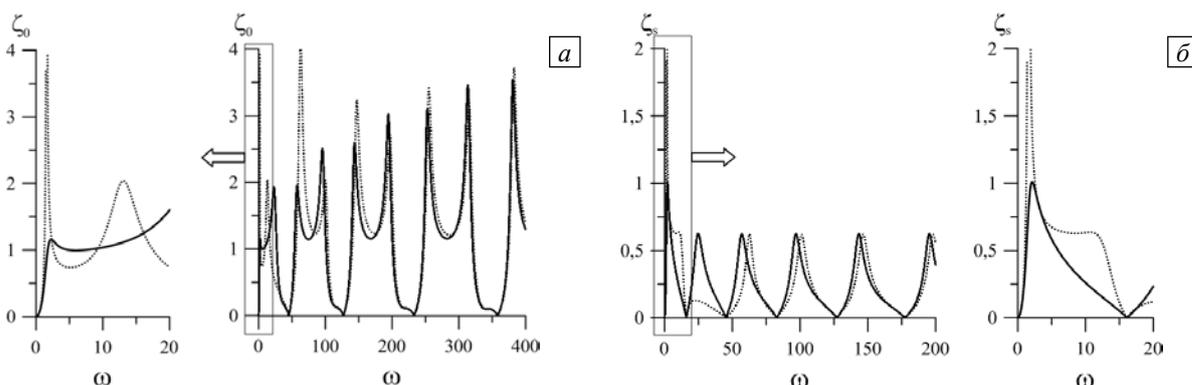


Рис. 6. Максимальное отклонение боковой поверхности пузырька от равновесного значения в середине слоя ζ_0 и на твердой плоскости ζ_s от частоты внешнего воздействия ω при $b=1, R_0=5, P_0=5, \lambda=0,1$ (пунктирная линия), $\lambda=1$ (сплошная линия); в рамку взяты начальные участки кривых, показанные на рисунке в увеличенном масштабе

Существуют «антирезонансные» частоты, при которых отклонение боковой поверхности пузырька от равновесного значения отсутствует. При этом количество таких частот для ζ_0 (Рис. 6а) в 2 раза меньше, чем для ζ_s (Рис. 6б).

Отметим, что антирезонансные частоты обнаружены и при исследовании поведения полусферической капли или пузырька на подложке [18, 21], а также цилиндрической капли при осесимметричных вибрациях. Но при отклонении поверхности полусферической капли (и пузырька) в полюсе [18, 21] антирезонансные частоты отсутствуют. Диссипативные эффекты учитываются только при движении контактной линии по твердой плоскости, поэтому максимальное отклонение на ней не растет с увеличением частоты, а принимает наибольшее значение в середине слоя.

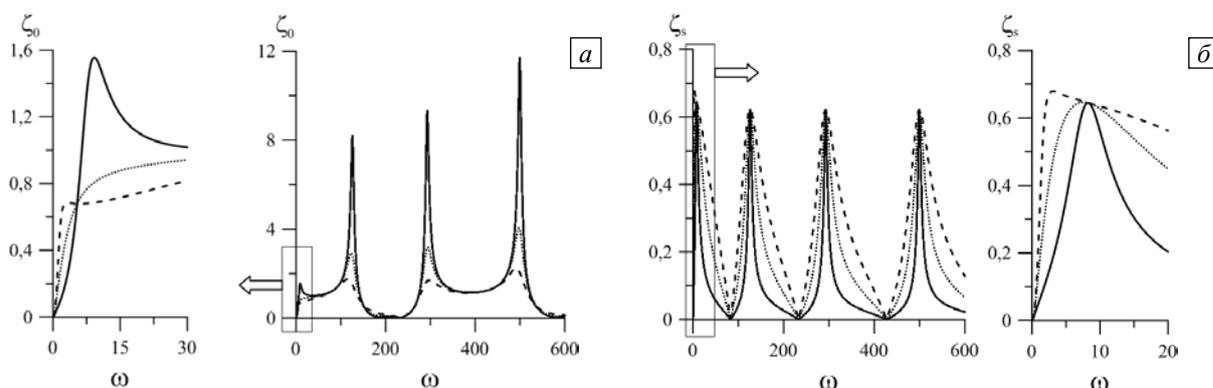


Рис. 7. Максимальное отклонение боковой поверхности пузырька от равновесного значения в середине слоя ζ_0 и на твердой плоскости ζ_s от частоты внешнего воздействия ω при $b=3, R_0=5, P_0=5$ и разных λ : 1 (сплошная линия), 3 (пунктирная линия), 6 (штриховая линия); в рамку взяты начальные участки кривых, показанные на рисунке в увеличенном масштабе

На рисунке 7 построены отклонения поверхности цилиндрического пузырька для трех значений λ , при этом $\lambda=3$ принадлежит интервалу, на котором обращается в нуль основная частота собственных колебаний (Рис. 2в). Два других значения λ располагаются слева и справа от этого интервала. Из построенных в укрупненном масштабе начальных участков графиков рисунка 7 видно, что при $\lambda=3$ отсутствует характерный максимум вблизи частоты радиальной моды собственных колебаний, который имеется при $\lambda=1$ и $\lambda=6$. Во всех остальных случаях характерный резонансный максимум присутствует (Рис. 7). С увеличением λ резонансный максимум возникает на более низких частотах, что связано с уменьшением частоты собственных колебаний при росте λ . Как уже отмечалось выше, рост λ приводит к снижению амплитуды вибраций при резонансе (Рис. 7а).

5. Заключение

Рассмотрены собственные и вынужденные колебания цилиндрического газового пузырька, окруженного жидкостью со свободной поверхностью и находящегося между двумя твердыми плоскостями. Учитывалась динамика контактной линии: скорость ее движения предполагалась пропорциональной отклонению контактного угла от равновесного значения. Коэффициент

пропорциональности, так называемый параметр смачивания (постоянная Хокинга), характеризовал свойства жидкости и материала подложки. Равновесный краевой угол был прямым.

Найдено, что частота радиальной моды может обращаться в нуль на некотором интервале значений λ . Длина этого интервала растет с увеличением параметра b . Эта частота уменьшается с увеличением R_0 — радиуса свободной поверхности окружающей пузырек жидкости, и увеличивается с ростом P_0 — давления газа в пузырьке. Частоты четных мод, кроме радиальной, и частоты нечетных мод слабо обуславливаются значениями P_0 .

Показано, что увеличение постоянной Хокинга приводит к уменьшению частоты собственных колебаний. Наименьшую собственную частоту имеет свободно скользящий по твердым поверхностям пузырек.

При исследовании вынужденных колебаний обнаружено существование антирезонансных частот, то есть таких значений частот внешнего воздействия, при которых поверхность пузырька не отклоняется от равновесного значения. Аналогичный эффект был получен ранее при осесимметричных колебаниях полусферической капли [21] или пузырька на подложке [18], а также цилиндрической капли. Однако для отклонений поверхности полусферической капли в полусе антирезонансные частоты отсутствовали, а для цилиндрической капли отклонение поверхности было нулевым в центре слоя при любых значениях частоты.

Для отклонения поверхности цилиндрического пузырька — объекта изучения в настоящей работе, в центре слоя антирезонансные частоты существуют, но их в два раза меньше, чем для отклонения контактной линии. При этом значения антирезонансных частот не зависят от параметра λ .

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (проект № 12-01-31366_мол-а).

Литература

1. *Де Жен П.Ж.* Смачивание: статика и динамика // УФН. – 1987. – Т. 151, № 4. – С. 619-681. DOI
2. *Daniel S., Chaudhury M.K., de Gennes P.-G.* Vibration-actuated drop motion on surfaces for batch microfluidic processes // *Langmuir*. – 2005. – V. 21, no. 9. – P. 4240-4248. DOI
3. *Mettu S., Chaudhury M.K.* Vibration spectroscopy of a sessile drop and its contact line // *Langmuir*. – 2012. – V. 28, no. 39. – P. 14100-14106. DOI
4. *Noblin X., Buguin A., Brochard-Wyart F.* Vibrated sessile drops: Transition between pinned and mobile contact line oscillations // *Eur. Phys. J. E.* – 2004. – V. 14, no. 4. – P. 395-404. DOI
5. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шкляев С.В.* Неосесимметричные колебания полусферической капли // МЖГ. – 2004. – № 6. – С. 8-20. DOI
6. *Mugele F., Baret J.-C.* Electrowetting: from basics to applications // *J. Phys.: Condens. Matter*. – 2005. – V. 17, no. 28, pp. 705-774. DOI
7. *Oh J.M., Ko S.H., Kang K.H.* Shape oscillation of a drop in ac electrowetting // *Langmuir*. – 2008. – V. 24, no. 15. – P. 8379-8386. DOI
8. *Chen J., Yu Y., Li J., Lai Y., Zhou J.* Size-variable droplet actuation by interdigitated electrowetting electrode // *Appl. Phys. Lett.* – 2012. – V. 101. – 234102. DOI
9. *Goohpattader P.S., Mettu S., Chaudhury M.K.* Stochastic rolling of a rigid sphere in weak adhesive contact with a soft substrate // *Eur. Phys. J. E.* – 2011. – V. 34, no. 11. – P. 120. DOI
10. *Luo M., Gupta R., Frechette J.* Modulating contact angle hysteresis to direct fluid droplets along a homogenous surface // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. – 2012. – V. 4, no. 2. – P. 890-896. DOI
11. *Bostwick J.B., Steen P.H.* Coupled oscillations of deformable spherical-cap droplets. Part 1. Inviscid motions // *J. Fluid Mech.* – 2013. – V. 714. – P. 312-335. DOI
12. *Bostwick J.B., Steen P.H.* Coupled oscillations of deformable spherical-cap droplets. Part 2. Viscous motions // *J. Fluid Mech.* – 2013. – V. 714. – P. 336-360. DOI
13. *Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G.* Long-scale evolution of thin liquid films // *Rev. Mod. Phys.* – 1997. – V. 69. – P. 931-980. DOI
14. *Craster R.V., Matar O.K.* Dynamics and stability of thin liquid films // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – V. 81. – P. 1131-1198. DOI
15. *Shklyaev S., Khenner M., Alabuzhev A.A.* Enhanced stability of a dewetting thin liquid film in a single-frequency vibration field // *Phys. Rev. E.* – 2008. – V. 77. – 036320. DOI
16. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V. 179. – P. 253-266. DOI
17. *Shklyaev S., Straube A.V.* Linear oscillations of a compressible hemispherical bubble on a solid substrate // *Phys. Fluids*. – 2008. – V. 20. – 052102. DOI
18. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyaev S.* Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids*. – 2011. – V. 23. – 102105. DOI
19. *Hocking L.M.* Waves produced by a vertically oscillating plate // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V. 179. – P. 267-281. DOI
20. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaev S.V.* Behavior of a drop on an oscillating solid plate // *Phys. Fluids*. – 2006. – V. 18. – 012101. DOI
21. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V.* Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids*. – 2009. – V. 21. – 072104. DOI

22. Иванцов А.О. Акустические колебания полусферической капли // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 3. – С. 16-23.
23. Алабушев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 78-86. DOI
24. Алабушев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 12-23. DOI
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 6. – 736 с.
26. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика: Физическая кинетика. – М.: Физматлит, 2007. – Т. 10. – 536 с.

References

1. De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 1985, vol. 57, pp. 827-863. DOI
2. Daniel S., Chaudhury M.K., de Gennes P.G. Vibration-actuated drop motion on surfaces for batch microfluidic processes. *Langmuir*, 2005, vol. 21, no. 9, pp. 4240-4248. DOI
3. Mettu S, Chaudhury M.K. Vibration spectroscopy of a sessile drop and its contact line. *Langmuir*, 2012, vol. 28, no. 39, pp. 14100-14106. DOI
4. Noblin X., Buguin A., Brochard-Wyart F. Vibrated sessile drops: Transition between pinned and mobile contact line oscillations. *Eur. Phys. J. E.*, 2004, vol. 14, no. 4, pp. 395-404. DOI
5. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Non-axisymmetric oscillations of a hemispherical drop. *Fluid Dyn.*, 2004, vol. 39, no. 6, pp. 851-862. DOI
6. Mugele F., Baret J.-C. Electrowetting: from basics to applications. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 2005, vol. 17, no. 28, pp. 705-774. DOI
7. Oh J.M., Ko S.H., Kang K.H. Shape oscillation of a drop in ac electrowetting. *Langmuir*, 2008, vol. 24, no. 15, pp. 8379-8386. DOI
8. Chen J., Yu Y., Li J., Lai Y., Zhou J. Size-variable droplet actuation by interdigitated electrowetting electrode. *Appl. Phys. Lett.*, 2012, vol. 101, 234102. DOI
9. Goohpattader P.S., Mettu S., Chaudhury M.K. Stochastic rolling of a rigid sphere in weak adhesive contact with a soft substrate. *Eur. Phys. J. E*, 2011, vol. 34, no. 11, p. 120. DOI
10. Luo M., Gupta R., Frechette J. Modulating contact angle hysteresis to direct fluid droplets along a homogenous surface. *ACS Appl. Mater. Interfaces*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 890-896. DOI
11. Bostwick J.B., Steen P.H. Coupled oscillations of deformable spherical-cap droplets. Part 1. Inviscid motions. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 714, pp. 312-335. DOI
12. Bostwick J.B., Steen P.H. Coupled oscillations of deformable spherical-cap droplets. Part 2. Viscous motions. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 714, pp. 336-360. DOI
13. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 1997, vol. 69, pp. 931-980. DOI
14. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, pp. 1131-1198. DOI
15. Shklyayev S., Khenner M., Alabuzhev A.A. Enhanced stability of a dewetting thin liquid film in a single-frequency vibration field. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 77, 036320. DOI
16. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253-266. DOI
17. Shklyayev S., Straube A.V. Linear oscillations of a compressible hemispherical bubble on a solid substrate. *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, 052102. DOI
18. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, 102105. DOI
19. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 267-281. DOI
20. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 012101. DOI
21. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 072104. DOI
22. Ivantsov A. O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Vestnik PGU. Serija: Fizika. – Bulletin of Perm State University. Physics*, 2012, no. 3, pp. 16-23.
23. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 686-693. DOI
24. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2012, vol. 53, no. 1, pp. 9-19. DOI
25. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics. Course of theoretical physics*, vol. 6. Butterworth-Heinemann, 1987. 551 p.
26. Lifshitz E.M., Pitaevskij L.P. *Physical kinetics. Course of theoretical physics*, vol. 10. Pergamon Press, 1981. 452 p.

Поступила в редакцию 23.11.2013; опубликована в электронном виде 24.06.2014

Сведения об авторе

Алабушев Алексей Анатольевич, кфмн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: alabuzhev@icmm.ru