

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.15

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

В.Л. Котов, Е.Ю. Линник

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,  
Нижегород, Российская Федерация*

Численно решена задача определения формы тела вращения, испытывающего минимальное полное сопротивление при внедрении в грунтовую среду. Для этого использованы одна из модификаций известного метода локальных вариаций и трехчленная квадратичная модель локального взаимодействия. Получено хорошее соответствие результатов при задании образующей тела вращения в виде параметрического полинома Безье и в виде кусочно-линейной кривой. Исследованы сходимость последовательных приближений при численном решении задачи параметрической оптимизации и погрешность нахождения силы сопротивления в зависимости от величины вариации параметров образующей. Проанализировано различие сил сопротивления внедрению у абсолютно-оптимальных тел и тел, имеющих вычисленные оптимальные формы, при различных длинах тела и характеристиках прочности среды. Показано, что аппроксимация образующей тела квадратичным полиномом Безье, применявшаяся ранее только в задачах аэродинамики, является удачной и при параметризации образующей тела, проникающего в грунт. Изложенный алгоритм может быть обобщен на случай расчета силы сопротивления внедрению в постановке задачи в рамках механики сплошных сред.

*Ключевые слова:* грунтовая среда, динамическое проникание, тело вращения, минимальное полное сопротивление, модель локального взаимодействия, параметрическая оптимизация, метод локальных вариаций

## NUMERICAL CALCULATION OF THE OPTIMUM SHAPE OF A BODY OF REVOLUTION MOVING AT STEADY SPEED IN THE SOIL ENVIRONMENT

V.L. Kotov and E.Yu. Linnik

*Research Institute of Mechanics of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

The problem of determining the optimum shape of a body of revolution with minimum drag penetrating into the soil is solved numerically by using a modified version of the method of local variations and a quadratic trinomial local interaction model. Good agreement has been reached between the results for the generatrix of a body of revolution in the form of a parametric Bezier polynomial and a piecewise linear curve. Convergence of successive approximation methods for the solution of a parametric optimization problem is studied. An error made in determining the drag force as a function of variations in the generatrix parameters is considered. The difference in drag forces between the bodies of absolutely optimal shapes and the bodies of calculated optimal shapes is analyzed for different body length and various strength characteristics of the medium. It is shown that the approximation of the body generatrix by the Bezier polynomial previously used only in the problems of aerodynamics can be successfully applied to parameterization of the generatrix of a body penetrating into the soil. The proposed algorithm can be generalized to calculate the drag force in the framework of continuum mechanics.

*Key words:* soil media, dynamic penetration, body of revolution, minimal drag, local interaction model, parametric optimization, method of local variations

### 1. Введение

Проблема оптимизации процессов удара и проникания жесткого тела имеет давнюю историю. Рассматривались различные постановки и решения с выбором в качестве целевых функций оптимальных характеристик самого тела и/или формы преграды, заданием формы ударника и/или преграды с минимальным сопротивлением или максимальной глубиной проникания (см., например, [1–3]). Обзоры [4, 5] свидетельствуют, что большинство применяемых методов моделирования, и особенно посвященные решению задач оптимизации формы тела, основано на гипотезе локальности [5–16]. Постановка задачи с использованием различных модификаций моделей локального взаимодействия позволяет найти форму абсолютно-оптимального тела (АОТ) [6, 7] — тела, сопротивление которого при достаточно общих ограничениях зависит лишь от скорости его движения и свойств среды. Но задача поиска среди пространственных конфигураций той образующей, которая создает в классе АОТ материальный объект с заданной площадью основания и максимально допустимой длиной, может иметь бесконечно много решений [8]. Все такие тела являются коническими, то есть нормаль к поверхности тела составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол, обуславливаемый скоростью тела и характеристиками грунта [9]. Использование гипотезы локальности при нахождении силы сопротивления внедрению в мягкий грунт острых конических и сферических тел продемонстрировано в работах [16–18].

Применение модификации модели локального взаимодействия для решения задачи расширения сферической полости [19–23] делает возможным учет динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу грунтовой среды в рамках трех- или двухчленной по скорости модели, содержащей инерционное, вязкое и прочностное слагаемые [19, 20]. При высоких скоростях движения осесимметричные АОТ имеют значительное удлинение [8, 9]. Если заданная длина искомого тела меньше длины абсолютно-оптимального конуса, то оптимальное тело, при отсутствии дополнительных ограничений на продольный контур [3], имеет притупление (плоский торец) [7, 10]. При превышении скоростью внедрения ударника значения скорости звука в грунтовой среде вклад вязкого и прочностного слагаемых уменьшается, контактное напряжение становится пропорциональным только квадрату скорости. В этом случае модель локального взаимодействия фактически содержит только один член, а форма оптимального тела не зависит ни от скорости его движения, ни от коэффициента модели [15]. Для определения радиуса торца и формы образующей оптимального тела необходимо прибегнуть к численным методам.

## 2. Методика численного решения задачи

В цилиндрических координатах рассматривается стадия развитого проникания ударника длиной  $L$  и радиусом миделевого сечения  $r = R$  при постоянной скорости внедрения  $V_0$  и условии, что обтекание искомой головной части ударника грунтом происходит безотрывно. Полное осевое сопротивление  $F$  проникающего тела описывается выражением [11]:

$$F = \sigma_0 R_0^2 + 2\pi \int_{R_0}^R \sigma_n r dr + 2\pi \int_{R_0}^R \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \sigma_\tau r dr, \quad \alpha = \sin \eta. \quad (1)$$

Здесь: первое слагаемое обусловлено напряжениями  $\sigma_0$ , действующими на передний плоский торец тела радиусом  $R_0$  (Рис. 1), второе и третье слагаемые — соответственно, нормальными ( $\sigma_n$ ) и касательными ( $\sigma_\tau$ ) напряжениями, возникающими на боковой поверхности тела.

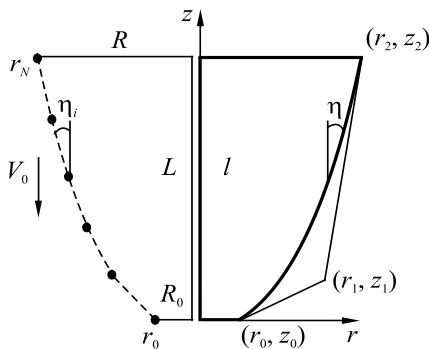


Рис. 1. Параметризация образующей искомого тела вращения

Напряжения  $\sigma_0$  и  $\sigma_n$  описываются трехчленной квадратичной моделью локального взаимодействия:  $\sigma_n = \rho_0 (AV_0^2 \alpha^2 + BV_0 \alpha + C)$ ,  $\sigma_0 = \rho_0 (AV_0^2 + BV_0 + C)$ ; касательные напряжения рассчитываются по закону Кулона с постоянной трения  $k_f$ :  $\sigma_\tau = k_f \sigma_n$ . В модели  $\rho_0$  — плотность грунта, коэффициент  $A$  отражает вклад инерционных сил, параметры  $B$  и  $C$  связаны с характеристиками внутреннего трения и прочности грунта соответственно [19, 20].

Перейдем в выражении (1) к безразмерным величинам:  $D = F / (\rho_0 V_0^2 SA)$ ,  $\sigma = \sigma_n / (\rho_0 V_0^2 A)$ ,  $r_0 = R_0 / R$ ,  $l = L / R$ ,  $\tilde{B} = B / (AV_0)$ ,  $\tilde{C} = C / (AV_0^2)$ , где  $S = \pi R^2$  — площадь миделя:

$$D(r) = (1 + \tilde{B} + \tilde{C}) r_0^2 + 2 \int_{r_0}^1 f(\alpha) r dr,$$

$$f(\alpha) = \left( 1 + k_f \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right) (\alpha^2 + \tilde{B}\alpha + \tilde{C}).$$

Необходимо отыскать такую выпуклую кривую  $r(z)$ ,  $r(l) = 1$ , описывающую форму головной части ударника, чтобы полное сопротивление  $D$  имело минимум:  $D(r) \rightarrow \min$ .

Приближенное решение на основе известного метода локальных вариаций [24, 25] предполагает сведение исходной задачи к задаче безусловной оптимизации (см. также [12, 13, 26]), то есть к нахождению набора координат  $(r_0, \dots, r_{N-1})$ , который представляет собой такую кусочно-линейную выпуклую

образующую тела вращения, при которой интегральная сила сопротивления внедрению  $D$  достигает минимума:

$$D(r_0, \dots, r_{N-1}) \rightarrow \min, \quad D = D_0 + \sum_1^N D_i, \quad (2)$$

$$D_0 = (1 + \tilde{B} + \tilde{C}) r_0^2, \quad D_i = \left( 1 + k_{\text{тр}} \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i} \right) (\alpha_i^2 + \tilde{B}\alpha_i + \tilde{C}) (r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad (i = \overline{1, N}),$$

где координаты  $z_i$  распределяются по длине тела с шагом  $\Delta z_i$ ,  $\alpha_i = \sin \eta_i = \Delta r_i / \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2}$ ,  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  $r_N = 1$ .

В работе [27] показана сходимость последовательных приближений при численном расчете формы оптимального тела и убывание погрешности определения силы сопротивления с ростом числа узлов образующей. Однако увеличение числа узлов свыше некоторого предела приводит к переполюснению разрядной сетки и невозможности продолжения счета. Кроме того, алгоритм на основе кусочно-линейного представления образующей не имеет эффективного обобщения на случай расчета силы сопротивления внедрению при постановке задачи в рамках механики сплошных сред. В этой связи предпочтительнее рассматривать аппроксимации образующей в классе полиномов или степенных функций, содержащих небольшое число искомых параметров оптимизации [28]. Далее приводится модификация алгоритма из [27] с учетом указанных соображений.

Вектор неизвестных параметров  $\mathbf{r} = \{r_i\}$  ( $i = \overline{0, N-1}$ ) сообщает функции (2) один из локальных экстремумов. Для их установления составляется система нелинейных уравнений

$$\mathbf{D}'(\mathbf{r}) = \{\partial D / \partial r_i\} = 0 \quad (i = \overline{0, N-1}). \quad (3)$$

Система (3) решается итерационным методом Ньютона, при этом используемые соотношения имеют вид

$$\mathbf{D}''(\mathbf{r}^k)(\mathbf{r}^{k+1} - \mathbf{r}^k) = -\mathbf{D}'(\mathbf{r}^k), \quad \mathbf{D}''(\mathbf{r}^k) = \left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_j} \right\}^k, \quad (4)$$

где  $k$  — номер итерации,  $\mathbf{D}''(\mathbf{r}^k)$  — симметричная матрица. Приращения компонент вектора координат на каждой итерации метода Ньютона (4) зависят от решения системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_j} \right\}^k \Delta r_j^{k+1} = - \left\{ \frac{\partial D}{\partial r_i} \right\}^k, \quad \Delta r_j^{k+1} = r_j^{k+1} - r_j^k \quad (i, j = \overline{0, N-1}). \quad (5)$$

Выражения для компонент левой и правой частей системы (5) в случае кусочно-линейного представления образующей содержатся в [27]. В данной работе приводятся только их конечно-разностные выражения

$$\frac{\partial D}{\partial r_i} = \frac{D_i^+ - D_i^-}{2\delta} + O(\delta^2), \quad \frac{\partial^2 D}{\partial r_i^2} = \frac{D_i^+ - 2D^0 + D_i^-}{\delta^2} + O(\delta^2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{D_i^+ + D_i^- - D_{ij}^{+-} - 2D^0 - D_{ij}^{-+} + D_j^- + D_j^+}{2\delta^2} + O(\delta^2),$$

$$D^0 = D(r_0, \dots, r_{N-1}), \quad D_i^+ = D(r_0, \dots, r_i + \delta, \dots, r_{N-1}), \quad D_{ij}^{+-} = D(r_0, \dots, r_i + \delta, \dots, r_j - \delta, \dots, r_{N-1}),$$

где  $\delta$  — безразмерная вариация радиальной координаты;  $O(\delta^2)$  — порядок точности.

Счет осуществляется до выполнения условия

$$\delta D^{k+1} = |D^{k+1} - D^k| / D^{k+1} < \varepsilon, \quad (7)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность.

Модифицированный таким образом алгоритм из [27] имеет единообразный порядок действий как при кусочно-линейном представлении образующей, так и при полиномиальном, когда компоненты вектора  $(r_0, \dots, r_{N-1})$  являются коэффициентами полинома. Для применения алгоритма необходимо также конкретизировать способ расчета интегральной силы сопротивления внедрению  $D$  в соотношении (2), поскольку для этого может использоваться как точный, так и приближенный метод вычисления интеграла. Заметим, что в общем случае симметричная матрица в уравнениях (4), (5) уже не будет трехдиагональной.

Рассмотрим для тела вращения с притуплением, имеющим радиус  $r_0$ , аппроксимацию образующей в форме параметрического полинома Безье второй степени [28]:

$$\begin{pmatrix} r(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = (1-s)^2 \begin{pmatrix} r_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + 2(1-s)s \begin{pmatrix} r_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} r_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1]. \quad (8)$$

С учетом поставленных ограничений — заданных значений радиуса основания и длины искомого оптимального тела, другие геометрические характеристики составляют  $r_2 = 1$ ,  $z_0 = 0$ ,  $z_2 = l$ . Вектор параметров  $\mathbf{r} = \{r_0; r_1; z_1\}$  содержит радиус притупления тела  $r_0$  и координаты вершины характеристического треугольника  $r_1$ ,  $z_1$  (Рис. 1). Тогда выражение для силы сопротивления внедрению (2), при учете ограничений в представлении образующей (8), запишется следующим образом:

$$D(\mathbf{r}) = (1 + \tilde{B} + \tilde{C})r_0^2 + 2 \int_0^1 f(\alpha) r(s) r' ds, \quad (9)$$

где

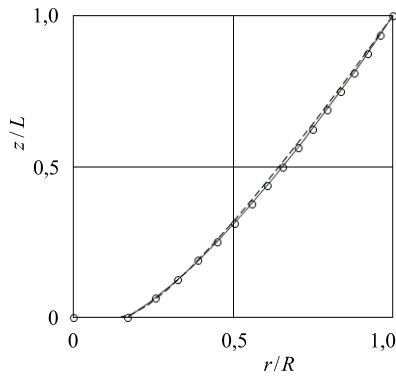
$$\begin{aligned} r(s) &= (1-s)^2 r_0 + 2(1-s)s r_1 + s^2, \quad r' = -2(1-s)r_0 + 2(1-2s)r_1 + 2s, \\ z(s) &= 2(1-s)s z_1 + s^2 l, \quad z' = 2(1-2s)z_1 + 2sl, \quad \alpha(s) = \left(1 + (z'/r')^2\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

### 3. Анализ сходимости итерационного процесса

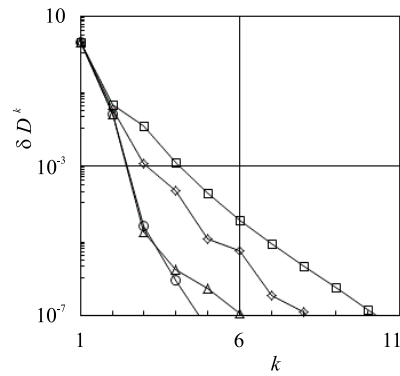
Для определения параметров квадратичной по скорости модели локального взаимодействия в работе применялась аппроксимация методом наименьших квадратов решения одномерной задачи расширения сферической полости в грунтовой среде, известного для диапазона скоростей проникания 100...400 м/с [21–23]. Значения параметров  $\tilde{B} = 0,17$ ,  $\tilde{C} = 0,01$  брались из [27] и соответствовали воздействию сухой песчаной смеси естественного состава. Коэффициент поверхностного трения принимался равным  $k_f = 0,3$ . Безразмерная длина ударника составляла  $l = \sqrt{5}$ , скорость проникания —  $V_0 = 400$  м/с.

Величина вариации параметров в конечно-разностных соотношениях (6) находилась при кусочно-линейном представлении образующей и 16 искомым узлах. Проводилось сравнение с результатами расчетов, проделанных с последовательным уменьшением  $\delta$  от 0,1 до 0,0001 (далее различие в координатах становилось несущественным); производные при этом отыскивались аналитически [27]. При вычислении параметров образующей в виде полинома Безье величина  $\delta$  принималась равной 0,0001.

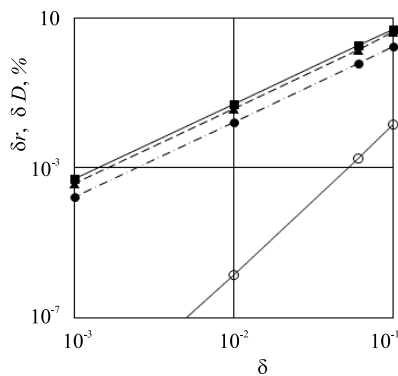
Результаты расчетов приведены на рисунке 2, где маркеры «○» соответствуют решению системы уравнений (3) с кусочно-линейным представлением образующей, сплошная и пунктирная линии — численным решениям с представлениями в форме Безье, полученным при различных начальных приближениях в итерационном методе Ньютона (4), (5). Из них локальному минимуму функции (2) соответствует только образующая, изображенная сплошной линией (все угловые миноры матрицы вторых производных  $\mathbf{D}''$  положительны). Вектор параметров этого решения имеет вид  $\{r_0 = 0,169; r_1 = 0,498; z_1 = 0,472\}$ . Другое численное решение  $\{0,141; 0,318; 0\}$ , изображенное пунктиром, локальным минимумом не является — угловые миноры матрицы  $\mathbf{D}''$  имеют разные знаки, и значение силы сопротивления для него несколько больше. Отметим также, что представленные в данной работе затупленные формы оптимального тела, проникающего в мягкую грунтовую среду, качественно соответствуют результатам других авторов [10–14], рассматривавших задачи проникания оптимальных тел в среды типа металла и бетона.



**Рис. 2.** Образующие оптимальных тел вращения: при кусочно-линейном представлении (маркеры  $\circ$ ) и в форме полинома Бэзе, соответствующего минимуму (2) (сплошная линия) и не соответствующего минимуму (штриховая линия)



**Рис. 3.** Изменение величины  $\delta D^k$  на  $k$ -й итерации для различных значений  $\delta$ : 0,1 (маркеры  $\square$ ); 0,06 ( $\diamond$ ); 0,01 ( $\Delta$ ); 0,001 ( $\circ$ )



**Рис. 4.** Изменение относительной погрешности определения параметров образующей (темные маркеры  $\bullet$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$  соответствуют  $i=0,1,2$  и силы сопротивления (светлые маркеры) в зависимости от величины  $\delta$

Оба численных решения установлены в результате реализации сходящегося итерационного процесса, при этом величина  $\delta D^k$  (см. формулу (7)), убывает с ростом числа итераций  $k$ . Как показано на рисунке 3, итерационный процесс в случае приближенного вычисления производных сходится достаточно быстро. Отмечается некоторый рост скорости сходимости с уменьшением  $\delta$  от 0,1 до 0,001.

На рисунке 4 в логарифмической шкале приведены относительные погрешности определения компонент вектора параметров  $\mathbf{r}$  образующей в форме полинома Бэзе  $\delta r_i = |r_i^* - r_i| / r_i^* \cdot 100$  ( $i=0,1,2$ ) и силы сопротивления  $\delta D$  в зависимости от величины вариации параметров  $\delta$ . В качестве величин, помеченных символом «\*», принимались их численные значения, полученные при  $\delta=0,0001$ . Видно, что безразмерная сила сопротивления имеет

относительную погрешность менее 0,2% уже при  $\delta=0,1$ ; погрешность нахождения параметров полинома является величиной порядка 1% при  $\delta=0,06$ .

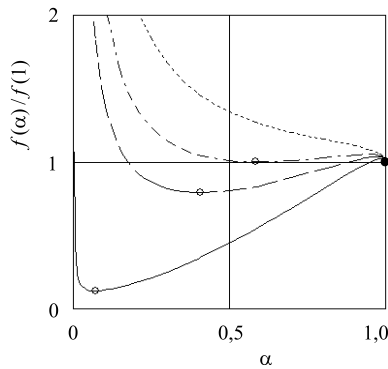
#### 4. Сравнение силы сопротивления внедрению тела с вычисленной конфигурацией и абсолютно- оптимального тела

Проведем сравнение силы сопротивления внедрению оптимального тела с заданными длиной и площадью основания, обладающего сопротивлением абсолютно-оптимального конуса. Методика построения АОТ и подробный параметрический анализ приведены в работах [6–9]. Согласно [8, 9] минимум сопротивления достигается телами, имеющими постоянный угол  $\alpha^*$  между внешней нормалью к боковой поверхности и осью вращения тела, при котором функция  $f(\alpha)$  в соотношениях (2) достигает минимума на отрезке  $[0, 1]$ . При постоянной скорости внедрения, как в рассматриваемой задаче, величина  $\alpha^*$  обуславливается только параметрами среды. К абсолютно-оптимальным телам вращения относится и круговой конус с заданной площадью основания.

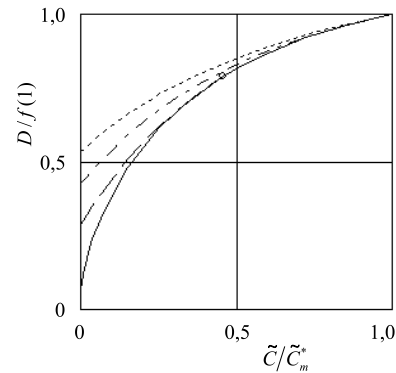
Рассмотрим далее поведение силы сопротивления (2) в зависимости от изменения безразмерного параметра модели  $\tilde{C}$ , характеризующего прочность среды. Известно [8, 9], что с ростом  $\tilde{C}$  происходит увеличение значения как  $\alpha^*$ , так и  $f(\alpha^*)$ . При значении  $\tilde{C} = \tilde{C}_i$  и, соответственно,  $\alpha^* = \alpha_i^*$  сопротивление АОТ будет равняться сопротивлению конуса с заданной длиной  $l$ . Вычисленным оптимальным телом, определяемым по формулам (3)–(7), также будет конус. При  $\tilde{C} = \tilde{C}_m^*$  ( $\alpha^* = \alpha_m^*$ ) выполняется соотношение  $\min_{\alpha \in [0,1]} f(\alpha) = f(\alpha_m^*) = f(1)$ , то есть локальный и краевой экстремумы функции  $f(\alpha)$  совпадают. Абсолютно-оптимальными телами в этом случае будут: конус длиной  $l = l_m$ ; цилиндр с плоским передним торцом; все промежуточные конфигурации, заключенные между произвольными поперечными сечениями

конического тела и его поверхностью. Сопротивление таких тел будет составлять  $D = f(1)$ . Наконец, при  $\tilde{C} > \tilde{C}_m^*$  АОТ станет тело с плоским передним торцом [8, 9]. При заданных выше параметрах задачи  $l = \sqrt{5}$  и  $\tilde{C} = 0,01$  получено  $\alpha^* = 0,07$ ; рассчитанное значение  $\alpha^* = \sin \eta = 0,41$  соотносится с  $\tilde{C}_i = 0,6$ , предельное  $\alpha_m^* = 0,58$  отвечает предельной же величине  $\tilde{C}_m^* = 1,31$ .

На рисунке 6 приведены кривые силы сопротивления внедрению, отнесенной к величине  $f(1)$ , соответствующей  $\tilde{C} = \tilde{C}_m^*$ , в зависимости от параметра прочности среды  $\tilde{C}/\tilde{C}_m^*$ . Как видно из рисунка, сопротивление оптимального тела заданной безразмерной длины (удлинения)  $l = \sqrt{5}$  (штриховая кривая) больше сопротивления АОТ при  $0 < \tilde{C} < \tilde{C}_i$ . С увеличением параметра прочности среды происходит уменьшение радиуса переднего торца оптимального тела  $r_0$  (см. Рис. 1, 2), и при  $\tilde{C} = \tilde{C}_i$  (на рисунке 6 эта точка помечена маркером «○»)  $r_0$  становится равным нулю.

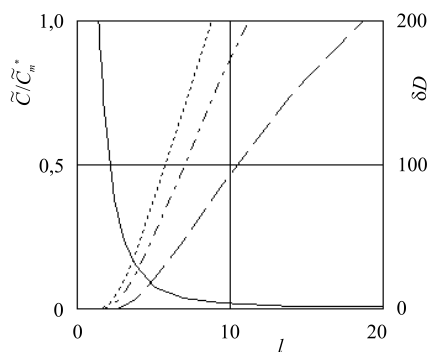


**Рис. 5.** Зависимости  $f(\alpha)/f(1)$  при различных значениях  $\tilde{C}$ : 0,01 (сплошная линия);  $\tilde{C}_i$  ( $l = \sqrt{5}$ ) (штриховая линия);  $\tilde{C}_m^*$  (штрихпунктирная линия);  $5\tilde{C}_m^*$  (пунктирная линия); локальные (○) и краевой (●) минимумы функции (2)



**Рис. 6.** Силы сопротивления внедрению  $D/f(1)$  в зависимости от  $\tilde{C}/\tilde{C}_m^*$ : АОТ (сплошная линия), оптимальное тело заданной длины  $l = \sqrt{5}$  (штриховая линия) и  $l = l_m$  (штрихпунктирная линия), круговой конус длины  $l = l_m$  (пунктирная линия); маркером «○» помечена точка  $\tilde{C} = \tilde{C}_i$

Наибольшее различие сил сопротивления внедрению оптимального тела с торцом и АОТ наблюдается при малых значениях  $\tilde{C}$ . Для АОТ, кроме того, отмечается увеличение относительной длины  $l$ , обращающейся в бесконечность при  $\tilde{C} = 0$ . Для количественной оценки разницы сопротивлений введем величину  $\delta D = (D - D^*)/D^* \cdot 100$ , где  $D$  — сопротивление оптимального тела или кругового конуса



**Рис. 7.** Параметр прочности среды  $\tilde{C}/\tilde{C}_m^*$  (сплошная линия, шкала слева) и величина  $\delta D$  (шкала справа) в зависимости от относительной длины АОТ: штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линии отвечают  $\delta D$  оптимальных тел, соответственно, безразмерной длиной  $l = \sqrt{5}$ ,  $l_m$  и кругового конуса длиной  $l = l_m$

заданной длины,  $D^*$  — сопротивление АОТ, которые вычисляются при одинаковых значениях параметра прочности среды  $\tilde{C}$ .

Как видно из рисунка 7, при малых значениях характеристики прочности среды сопротивление оптимального тела заданной безразмерной длины  $l = \sqrt{5}$  может превышать сопротивление АОТ на 100% при относительной длине последнего, равной 10. При  $\tilde{C} = 0,05$  и заданной безразмерной длине  $l = \sqrt{5}$  длина АОТ составляет  $l = 7$  и  $\delta D \approx 50\%$ ; при длине  $l = 5$  оптимальное тело и конус заданной длины имеют  $\delta D$ , соответственно, 20% и 30%. При допустимых безразмерных длинах АОТ, изменяющимся в пределах  $\sqrt{5} < l < 5$ , оптимальное тупоносное тело с торцом и круговой конус заданной длины становятся близкими к абсолютно-оптимальному конусу по испытываемому при внедрении сопротивлению.

## 5. Заключение

В работе показано соответствие сил сопротивления внедрению и форм оптимальных тел вращения, полученных в сходящихся численных расчетах при кусочно-линейном представлении искомой образующей и в виде квадратичного полинома Безье. Таким образом, применяемая ранее в задачах аэродинамики [28] аппроксимация является удачной параметризацией образующей тела и в случае проникания его в грунт. Изложенный алгоритм, подобно [15, 18], может быть обобщен на случай расчета силы сопротивления внедрению в постановке механики сплошных сред с использованием лагранжевых сеток с локальной автоматической перестройкой [29] или эйлера-лагранжевых сеток [30].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (проекты № 13-08-00531-а, 13-08-00658-а).

## Литература

1. *Антуков В.Н., Поздеев А.А.* Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1982. – № 1. – С. 47-55.
2. *Антуков В.Н., Петрухин Г.И., Поздеев А.А.* Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // МТТ. – 1985. – № 1. – С. 165-170.
3. *Бунимович А.И., Якунина Г.Е.* О форме тел вращения минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемых и упругопластических средах // ПММ. – 1987. – Т. 51, № 3. – С. 496-503. DOI
4. *Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Ballistic impact: Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review // Appl. Mech. Rev. – 2005. – Vol. 58, no. 6. – P. 355-371. DOI
5. *Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Shape optimization of high-speed penetrators: a review // Central European Journal of Engineering. – 2012. – Vol. 2, no. 4. – P. 473-482. DOI
6. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // МЖГ. – 1992. – № 1. – С. 95-106. DOI
7. *Остапенко Н.А.* Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. – 2002. – № 2. – С. 105-149.
8. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. – 2000. – Т. 64, № 2. – С. 299-309. DOI
9. *Якунина Г.Е.* Оптимальные формы движущихся в среде тел при учете трения // ПММ. – 2005. – Т. 69, № 5. – С. 759-774. DOI
10. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // Проблемы прочности и пластичности. – 2007. – Т. 69. – С. 47-58.
11. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В.* О проникании неосесимметричных тел в твердую деформируемую среду и оптимизация их формы // МТТ. – 2008. – № 4. – С. 176-183. DOI
12. *Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors // Int. J. Solids Struct. – 2007. – Vol. 44, no. 7-8. – P. 2593-2607. DOI
13. *Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Shape optimization of impactors against a finite width shield using a modified method of local variations // Mech. Based Des. Struct. – 2007. – Vol. 35, no. 2. – P. 113-125. DOI
14. *Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Modification of the method of local variations for shape optimization of penetrating impactors using the localized impactor/shield interaction models // Mech. Based Des. Struct. – 2007. – Vol. 35, no. 1. – P. 1-14. DOI
15. *Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю.* О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // ДАН. – 2013. – Т. 449, № 2. – С. 156-159. DOI
16. *Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л.* Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // ПММ. – 2014. – Т. 78, № 1. – С. 98-115.
17. *Котов В.Л., Баландин В.В., Линник Е.Ю., Баландин В.В.* О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 435-442. DOI
18. *Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В.* Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 114-125. DOI
19. *Антуков В.Н.* Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 1. Влияние механических характеристик, свободной поверхности, слойности // Проблемы прочности. – 1991. – № 12. – С. 7-10.
20. *Антуков В.Н.* Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 2. Влияние инерционных характеристик. Температурные эффекты // Проблемы прочности. – 1991. – № 12. – С. 11-14.
21. *Котов В.Л., Линник Е.Ю., Макарова А.А., Тарасова А.А.* Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде // Проблемы прочности и пластичности. – 2011. – Т. 73. – С. 58-63.
22. *Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г.* Решение задачи о расширении сферической полости в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Т. 74. – С. 49-58.



23. Линник Е.Ю. Численное исследование волнового механизма формирования силы сопротивления внедрению тел вращения в грунтовые среды // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Механика. – 2013. – № 1(1). – С. 164-169.
24. Черноушко Ф.Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // ЖВММФ. – 1965. – Т. 5, № 4. – С. 749-754.
25. Черноушко Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления: Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 238 с.
26. Остапенко Н.А., Романченко В.И., Якунина Г.Е. Оптимальные формы пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПМТФ. – 1994. – № 4. – С. 32-40. DOI
27. Котов В.Л., Линник Е.Ю. Численный расчет формы тела вращения минимального сопротивления движению в грунтовой среде в рамках модели локального взаимодействия // Проблемы прочности и пластичности. – Т. 75, № 4. – 2013. – С. 296-302.
28. Крайко А.А., Пьянков К.С. Эффективные прямые методы в задачах построения оптимальных аэродинамических форм // ЖВММФ. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1624-1631. DOI
29. Аптуков В.Н., Ильющенко П.Н., Фонарев А.В. Моделирование трещинообразования в материалах под действием взрывных нагрузок // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 5-12. DOI
30. Баландин В.В., Брагов А.М., Крылов С.В., Цветкова Е.В. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 15-23. DOI

## References

1. Aptukov V.N., Pozdeev A.A. Some minimax problems of the technology and strengths of constructions. *Eng. Cybernetics*, 1982, vol. 20, no. 1, pp. 39-46.
2. Aptukov V.N., Petrukhin G.I., Pozdeev A.A. Optimal deceleration of a rigid body by an inhomogeneous plate for the case of normal impact. *Mechanics of Solids*, 1985, vol. 20, no. 1, pp. 155-160.
3. Bunimovich A.I., Yakunina G.E. On the shape of minimum-resistance solids of revolution moving in plastically compressible and elastic-plastic media. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 3, pp. 386-392. DOI
4. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58, no. 6, pp. 355-371. DOI
5. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review. *Central European Journal of Engineering*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 473-482. DOI
6. Ostapenko N.A., Yakunina G.E. Least-drag bodies moving in media subject to the locality hypothesis. *Fluid Dynamics*, 1992, vol. 27, no. 1, pp. 71-80. DOI
7. Ostapenko N.A. Tela vrashcheniya minimal'nogo soprotivleniya pri dvizhenii v plotnykh sredakh [Body of revolution of least resistance at moving in dense media]. *Uspekhi mekhaniki – Advances in Mechanics*, 2002, no. 2, pp. 105-149.
8. Yakunina G.E. The dynamics of pyramidal bodies within the framework of the local interaction model. *J. Appl. Math. Mech.*, 2000, vol. 67, no. 1, pp. 11-23. DOI
9. Yakunina G.E. The optimum shapes of bodies moving in a medium taking friction into account. *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, vol. 69, no. 5, pp. 680-692. DOI
10. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Shape optimization of rigid body, penetrating into continuous medium. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2007, vol. 69, pp. 47-58.
11. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V. On the penetration of nonaxisymmetric bodies into a deformable solid medium and their shape optimization. *Mech. Sol.*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 671-677. DOI
12. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors. *Int. J. Solids Struct.*, 2007, vol. 44, no. 7-8, pp. 2593-2607. DOI
13. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of impactors against a finite width shield using a modified method of local variations. *Mech. Based Des. Struc.*, 2007, vol. 35, no. 2, pp. 113-125. DOI
14. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Modification of the method of local variations for shape optimization of penetrating impactors using the localized impactor/shield interaction models. *Mech. Based Des. Struc.*, 2007, vol. 35, no. 1, pp. 1-14. DOI
15. Bazhenov V.G., Kотов V.L., Linnik E.Yu. Models of calculation of axisymmetrical solids with the lowest drag during motion in soils. *Doklady Akademii Nauk – Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 100-103. DOI
16. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S., Kотов V.L. Analysis of models for calculating the motion of bodies of revolution of minimum drag in soil environments. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 98-115.
17. Kотов V.L., Balandin V.V., Linnik E.Y., Balandin V.V. Applicability of the local interaction model for determining nonlinear-compressible soil resistance to sphere penetration. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 435-442. DOI
18. Kотов V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.Yu., Balandin V.V. Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 612-621. DOI
19. Aptukov V.N. The expansion of spherical cavity in elastoplastic compressible medium. Communication 1. The influence of mechanical characteristics, free surface and double-layer. *Strength of Materials*, 1991, no. 12, pp. 7-10.
20. Aptukov V.N. The expansion of spherical cavity in elastoplastic compressible medium. Communication 2. Effect of inertial forces. Temperature effect. *Strength of Materials*, 1991, no. 12, pp. 11-14.
21. Kотов V.L., Linnik E.Yu., Makarova A.A., Tarasova A.A. The analysis of approximate solutions of a spherical cavity expansion in a soil medium problem. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2011, vol. 73, pp. 58-63.



22. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2012, vol. 74, pp. 49-58.
23. Linnik E.Yu. Numerical simulation of the wave formation mechanism of the force of resistance to penetration of bodies of revolution into soil medium. *Bulletin of the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. Series: Mechanics*, 2013, no. 1(1), pp. 164-169.
24. Chernous'ko F.L. Metod lokal'nykh variatsii dlya chislennogo resheniya variatsionnykh zadach [A local variation method for the numerical solution of variational problems]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – Comp. Math. Math. Phys.*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 749-754.
25. Chernous'ko F.L., Banichuk N.V. Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniya: Chislennye metody [Variational problems of mechanics and control: Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1973. 238 p.
26. Ostapenko N.A., Romanchenko V.I., Yakunina G.E. Optimum forms of three-dimensional bodies with maximum penetration depth in dense media. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1994, vol. 35, no. 4, pp. 515-521. [DOI](#)
27. Kotov V.L., Linnik E.Yu. Numerical computation of the form of a body of revolution with the minimal resistance to motion in a soil medium in the frame of the local interaction model. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, vol. 75, no. 4, pp. 296-302.
28. Kraiko A.A., P'yankov K.S. Effective direct methods for aerodynamic shape optimization. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 9, pp. 1546-1552. [DOI](#)
29. Aptukov V.N., Iljushenko P.N., Fonarev A.V. Modeling of crack formation in materials under explosion loads. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 5-12. [DOI](#)
30. Balandin V.V., Bragov A.M., Krylov S.V., Tsvetkova Y.V. Experimental and theoretical study of penetration of sphericoconical bodies into a sand target. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 15-23. [DOI](#)

Поступила в редакцию 15.01.2014; опубликована в электронном виде 24.06.2014

---

Сведения об авторах

Котов Василий Леонидович, дфмн, снс, внс, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики ННГУ), 603950, Нижний Новгород, ГСП-1000, пр. Гагарина, д. 23, корп. 6; e-mail: vkotov@inbox.ru

Линник Елена Юрьевна, асп., мнс, НИИ механики ННГУ; e-mail: ElenkaLinnik@gmail.com