

DOI: [10.7242/1999-6691/2014.7.2.14](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.2.14)
УДК 532.517:536.252

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ БЫСТРОГО ВРАЩЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ТВЁРДЫМИ ГРАНИЦАМИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

Д.Г. Чикулаев, К.Г. Шварц

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

Изучается влияние быстрого вращения при большом значении числа Тейлора ($Ta = 10^5$) на гидродинамическую моду неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малых числах Прандтля ($0 < Pr < 1,0$). Для исследования применялся метод малых возмущений. Одномерная задача решалась методом сеток и методом дифференциальной прогонки. Для обоих методов представлены системы уравнений и необходимые параметры численного решения. Построены нейтральные кривые зависимости критического числа Грасгофа от волнового числа; изучается их поведение при различных значениях Pr . Приведена зависимость от числа Прандтля критического числа Грасгофа и соответствующего ему волнового числа. Показано, что с ростом Pr в диапазоне от 0 до 0,3 устойчивость течения уменьшается, а при $0,3 \leq Pr < 0,93$ она увеличивается. Критическое число Грасгофа достигает наименьшего значения ($Gr_c = 40839,42$) при $Pr = 0,3$. Определена граница моды при большом значении числа Тейлора.

Ключевые слова: адвективные течения, устойчивость, вращение, нейтральная кривая, метод дифференциальной прогонки, метод сеток

NUMERICAL STUDY OF THE FAST ROTATION EFFECT ON THE STABILITY OF ADVECTIVE FLOW IN A HORIZONTAL FLUID LAYER WITH RIGID BOUNDARIES AT SMALL PRANDTL NUMBERS

D.G. Chikulaev and K.G. Shvarts

Perm State University, Perm, Russian Federation

We investigate the effect of fast rotation at large Taylor number ($Ta = 10^5$) on the hydrodynamic instability mode of an advective flow in the horizontal layer of an incompressible fluid with rigid boundaries at small Prandtl number ($0 < Pr < 1.0$) using a small perturbation method. In calculations, we apply the grid method for the one-dimensional problem and the differential sweep method. The system of equations and the necessary parameters of the numerical solution are presented for both methods. Neutral curves describing the dependence of the critical Grashof number on the wave number are obtained and their behavior at different Pr values is analyzed. The relationship between the critical Grashof number and corresponding wave number and the Prandtl number is given. It is shown that when the Pr value increases from 0 to 0.3 the flow stability decreases and when it lies within the interval 0.3 – 0.93 the flow stability increases. For the monotonic instability mode $Gr_c = 40839.42$, the critical Grashof number reaches its lowest value at $Pr = 0.3$. The boundary of monotonic instability mode at large Taylor number is determined.

Key words: advective flows, stability, rotation, neutral curve, differential sweep method, grid method

1. Введение

Адвективные течения жидкости возникают под действием горизонтального градиента плотности. Впервые они были описаны аналитически Г.А. Остроумовым в плоском горизонтальном слое жидкости, на границах которого температура линейно изменяется с продольной координатой [1]. Особенность такого течения — отсутствие вертикальной компоненты скорости. Здесь вектор скорости в потоке ориентирован перпендикулярно силе плавучести, являющейся основной причиной движения [2]. В работах [3, 4] дан обзор таких плоскопараллельных адвективных течений для различных граничных условий. В [5, 6] исследовалась устойчивость плоскопараллельного течения в горизонтальном слое с твердыми границами. Установлено, что при малых числах Прандтля ($Pr < 0,4$) существует монотонная гидродинамическая мода неустойчивости, которая с ростом числа Pr резко стабилизируется.

В работах [7–12] объектом изучения служит адвективное течение во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости. Как и в случае без вращения, здесь отсутствует вертикальная компонента скорости. В потоке вектор скорости ориентирован перпендикулярно силе плавучести, однако имеются обе его горизонтальные компоненты [2]. В [7, 8] подобное течение впервые описано аналитически для слоя, у которого температура на границах линейно изменяется вдоль продольной координаты. Численный подход (на основе метода сеток) к изучению адвективного течения с учетом вращения использовался, например, в слое с твердыми границами при $Pr = 6,7$ (вода) [2, 9]. Рассмотрены случаи

винтовых и спиральных возмущений. Показано, что при малых значениях числа Тейлора ($Ta \leq 60$) наиболее опасными являются спиральные возмущения, а при $Ta > 60$ более опасными становятся винтовые пространственные возмущения. Вращение существенно повышает устойчивость адвективного течения. В [10] анализировалась устойчивость течения при малом значении числа Прандтля ($Pr = 0,1$) и различных значениях числа Тейлора ($0 \leq Ta \leq 10^5$). Сделан вывод, что вращение, за исключением небольшого интервала значений Ta , стабилизирует адвективное течение. В рамках линейной теории вращение не меняет монотонный характер неустойчивости течения. В работе [11] авторами показано, что при исследовании устойчивости адвективного течения во вращающемся слое жидкости метод сеток так же эффективен, как и метод дифференциальной прогонки.

Влиянию слабого вращения на гидродинамическую моду неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малых числах Прандтля посвящена работа [12]. Численный анализ выявил, что в диапазоне $0 \leq Ta \leq 100$ с ростом числа Тейлора возрастает устойчивость адвективного течения и сужается диапазон монотонной моды по числу Прандтля.

Цель данной работы — установить роль быстрого вращения в поведении гидродинамической моды при малых числах Прандтля ($0 < Pr < 1$) и большом значении числа Тейлора ($Ta = 10^5$).

2. Постановка задачи

Имеем плоский горизонтальный слой несжимаемой жидкости, ограниченный твердыми плоскостями $z = \pm h$, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{i}_z$, где \vec{i}_z — орт-вектор вертикальной оси z . Направление оси вращения совпадает с вертикальной осью координат. Адвективное течение будем изучать во вращающейся системе отсчета с использованием уравнений конвекции в приближении Буссинеска, записанных в декартовой системе координат [13]. В этом случае уравнение движения содержит кориолисову и центробежную силы инерции. Рассмотрим ситуацию, когда число Фруда удовлетворяет условию: $Fr = \Omega_0^2 l / g \ll 1$, здесь l — характерный горизонтальный масштаб, g — ускорение силы тяжести. Тогда влиянием центробежной силы можно пренебречь, так как оно компенсируется полем тяжести. На обеих границах слоя задана температура, линейно меняющаяся с горизонтальной координатой x ($T = Ax$, где A — постоянный горизонтальный температурный градиент на ограничивающих слой поверхностях), условия прилипания и замкнутости потока [10].

Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления соответственно h , h^2/ν , $g\beta Ah^2/\nu$, Ah , $\rho_0 g\beta Ah^2$, получим замкнутую систему уравнений в безразмерном виде во вращающейся системе координат [2, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \text{Gr} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \sqrt{Ta} \cdot v_y &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \text{Gr} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \sqrt{Ta} \cdot v_x &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \text{Gr} \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta v_z + T, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Gr} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{Pr} \Delta T, \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$z = \pm 1: \quad T = x, \quad \vec{v} = 0; \quad \int_{-1}^1 v_x dz = 0, \quad \int_{-1}^1 v_y dz = 0, \quad (2)$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости; β — коэффициент теплового расширения; ρ_0 — средняя плотность; v_x , v_y , v_z — компоненты скорости жидкости $\vec{v}(x, y, z, t)$ относительно вращающейся системы; t — время; x , y — горизонтальные координаты; p — давление; $T(x, y, z, t)$ — температура

в слое; χ — коэффициент температуропроводности; $Gr = g\beta Ah^4/\nu^2$ — число Грасгофа; $Ta = (2\Omega_0 h^2/\nu)^2$ — число Тейлора; $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля.

Профили скорости и температуры возникающего адвективного течения получаются из точного решения задачи (1), (2) [2] и имеют вид:

$$u_0(z) = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \operatorname{Im} f_1(z), \quad v_0(z) = \frac{1}{\sqrt{Ta}} (z - \operatorname{Re} f_1(z)), \quad w_0(z) \equiv 0,$$

$$T_0 = x + Gr Pr \tau_0(z), \quad \tau_0(z) = \frac{1}{\sqrt{Ta}} v_0(z), \quad f_1(z) = \frac{\operatorname{sh}(\mu z)}{\operatorname{sh}(\mu)}, \quad \mu = \sqrt[4]{\frac{Ta}{4}} (1+i), \quad i = \sqrt{-1},$$

где $u_0(z)$, $v_0(z)$ и $w_0(z)$ — компоненты вектора скорости \vec{v}_0 ; Re , Im — действительная и мнимая части комплексного решения.

Для исследования устойчивости стационарного плоскопараллельного адвективного течения применим метод малых возмущений. Рассмотрим возмущенное течение $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$, $T = T_0 + \theta$, $p = p_0 + P$, где \vec{V} , θ , P — малые нестационарные возмущения. Пренебрегая квадратичными по $\vec{V} = (u, v, w)$ и θ слагаемыми, получаем:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + Gr \left((\vec{v}_0 \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}_0 \right) + \sqrt{Ta} (\vec{i}_z \times \vec{V}) = -\nabla P + \Delta \vec{V} + \theta \cdot \vec{i}_z,$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr (\vec{v}_0 \nabla T_0 + \vec{v} \nabla \theta) = \frac{1}{Pr} \Delta \theta. \tag{3}$$

На твердых границах слоя возмущения скорости обращаются в нуль. Кроме того, будем считать, что ограничивающие слой пластины являются идеально теплопроводными; практически это означает, что теплопроводность материала, из которого изготовлены пластины, много больше теплопроводности жидкости. Отсюда и следует, что на границах исчезают возмущения температуры. Имеем, таким образом, граничные условия для возмущений

$$z = \pm 1: \quad \vec{V} = 0, \quad \theta = 0. \tag{4}$$

3. Вычислительные схемы

Основные расчеты производились с помощью метода сеток [2, 9]. Выполнение программы автоматизировал специально разработанный web-интерфейс [14], который позволял управлять расчётами на удалённом сервере, а также строить нейтральные кривые в автоматическом режиме с сохранением результатов в базе данных. Для метода дифференциальной прогонки создать подобный web-интерфейс не удалось.

Учитывая дивергентность возмущений скорости, введем функции тока возмущений ψ и вихря возмущения скорости φ : $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \Delta \psi$. В качестве малых возмущений рассмотрим нормальные возмущения.

Полученную из (3), (4) одномерную систему уравнений разрешим по численной методике, аналогичной схемам двухполевого метода, который используется для решения двухмерных задач в переменных функции тока и вихря скорости в [9]. Представим неизвестные функции в виде [2]:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, z) &= (\varphi_1(t, z) + i\varphi_2(t, z)) \exp(ik_x x); \\ \psi(t, x, z) &= (\psi_1(t, z) + i\psi_2(t, z)) \exp(ik_x x); \\ v(t, x, z) &= (v_1(t, z) + iv_2(t, z)) \exp(ik_x x); \\ \theta(t, x, z) &= (\theta_1(t, z) + i\theta_2(t, z)) \exp(ik_x x), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, $v_1(z)$, $\theta_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$, $v_2(z)$, $\theta_2(z)$ — амплитуды возмущений; k_x — вещественное волновое число, характеризующее периодичность возмущений вдоль направления x .

Уравнения для возмущений вихря и функции тока приведём, учитывая (5), к разностному виду с помощью классической неявной схемы [2]:

$$\frac{1}{h_z^2} \Phi_{1,j+1}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + k_x^2 \right) \Phi_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Phi_{1,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \Phi_{1,j}^n - k_x \text{Gr} \left(u_0(z_j) \Phi_{2,j}^n + u_0^n(z_j) \Psi_{2,j}^n \right) - \sqrt{\text{Ta}} \frac{v_{1,j+1}^n - v_{1,j-1}^n}{2h_z} - k_x \theta_{2,j}^n \quad (0 < j < N), \quad (6)$$

$$\Phi_{1,0}^{n+1} = \Phi_{1,0}^n, \quad \Phi_{1,N}^{n+1} = \Phi_{1,N}^n,$$

$$\frac{1}{h_z^2} \Phi_{2,j+1}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + k_x^2 \right) \Phi_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Phi_{2,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \Phi_{2,j}^n + k_x \text{Gr} \left(u_0(z_j) \Phi_{1,j}^{n+1} + u_0^n(z_j) \Psi_{1,j}^{n+1} \right) - \sqrt{\text{Ta}} \frac{v_{2,j+1}^n - v_{2,j-1}^n}{2h_z} - k_x \theta_{1,j}^n \quad (0 < j < N), \quad (7)$$

$$\Phi_{2,0}^{n+1} = \Phi_{2,0}^n, \quad \Phi_{2,N}^{n+1} = \Phi_{2,N}^n,$$

$$\frac{1}{h_z^2} \Psi_{1,j+1}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_z^2} + k_x^2 \right) \Psi_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Psi_{1,j-1}^{n+1} = -\Phi_{1,j}^{n+1} \quad (0 < j < N), \quad (8)$$

$$\Psi_{1,0}^{n+1} = 0, \quad \Psi_{1,N}^{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{h_z^2} \Psi_{2,j+1}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_z^2} + k_x^2 \right) \Psi_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Psi_{2,j-1}^{n+1} = -\Phi_{2,j}^{n+1} \quad (0 < j < N), \quad (9)$$

$$\Psi_{2,0}^{n+1} = 0, \quad \Psi_{2,N}^{n+1} = 0,$$

где Δt — шаг по времени; $n=0, 1, \dots$ — номер шага по времени; $h_z=2/N$ — шаг по вертикальной координате; N — число интервалов разбиения; верхние индексы — это номера шагов по времени, а нижние — номера шагов по горизонтальной и вертикальной координатам. Вихри ϕ_1, ϕ_2 на границах аппроксимируем по формуле Вудса [2]:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,0}^{n+1} &= -\frac{3}{h_z^2} \Psi_{\alpha,1}^{n+1} - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha,1}^{n+1}, \\ \Phi_{\alpha,N}^{n+1} &= -\frac{3}{h_z^2} \Psi_{\alpha,N-1}^{n+1} - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha,N-1}^{n+1}, \end{aligned} \quad (\alpha=1,2). \quad (10)$$

Уравнения для возмущений скорости и температуры запишем в разностном виде с помощью схемы Кранка–Николсона, которая имеет погрешность аппроксимации порядка $O(\Delta t^2 + h_z^2)$:

$$\frac{1}{2h_z^2} v_{1,j+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_x^2}{2} \right) v_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{2h_z^2} v_{1,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} v_{1,j}^n - \frac{v_{1,j+1}^n - 2v_{1,j}^n + v_{1,j-1}^n}{2h_z^2} + \frac{k_x^2}{2} v_{1,j}^n - k_x \text{Gr} \left(u_0(z_j) v_{2,j}^n + u_0^n(z_j) \Psi_{2,j}^{n+1} \right) - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\Psi_{1,j+1}^{n+1} - \Psi_{1,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \quad (11)$$

$$v_{1,0}^{n+1} = 0, \quad v_{1,N}^{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{2h_z^2} v_{2,j+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_x^2}{2} \right) v_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{2h_z^2} v_{2,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} v_{2,j}^n - \frac{v_{2,j+1}^n - 2v_{2,j}^n + v_{2,j-1}^n}{2h_z^2} + \frac{k_x^2}{2} v_{2,j}^n + k_x \text{Gr} \left(u_0(z_j) v_{1,j}^{n+1} + u_0^n(z_j) \Psi_{1,j}^{n+1} \right) - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\Psi_{2,j+1}^{n+1} - \Psi_{2,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \quad (12)$$

$$v_{2,0}^{n+1} = 0, \quad v_{2,N}^{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{2\text{Pr} h_z^2} \theta_{1,j+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{\text{Pr} h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_x^2}{2\text{Pr}} \right) \theta_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{2\text{Pr} h_z^2} \theta_{1,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \theta_{1,j}^n - \frac{\theta_{1,j+1}^n - 2\theta_{1,j}^n + \theta_{1,j-1}^n}{2\text{Pr} h_z^2} + \frac{k_x^2}{2\text{Pr}} \theta_{1,j}^n - k_x \text{Gr} \left(u_0(z_j) \theta_{2,j}^n + \text{Ra} \tau_0'(z_j) \Psi_{2,j}^{n+1} \right) - \text{Gr} \frac{\Psi_{1,j+1}^{n+1} - \Psi_{1,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \quad (13)$$

$$\theta_{1,0}^{n+1} = 0, \quad \theta_{1,N}^{n+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Pr h_z^2} \theta_{2,j+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{Pr h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_x^2}{2Pr} \right) \theta_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{2Pr h_z^2} \theta_{2,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \theta_{2,j}^n - \frac{\theta_{2,j+1}^n - 2\theta_{2,j}^n + \theta_{2,j-1}^n}{2Pr h_z^2} + \\ + \frac{k_x^2}{2Pr} \theta_{2,j}^n + k_x Gr (u_0(z_j) \theta_{1,j}^{n+1} + \text{Rat}'_0(z_j) \psi_{1,j}^{n+1}) - Gr \frac{\psi_{2,j+1}^{n+1} - \psi_{2,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\theta_{2,0}^{n+1} = 0, \quad \theta_{2,N}^{n+1} = 0.$$

Декремент возмущений представлен в виде $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Чтобы построить нейтральную кривую для каждого выбранного значения волнового числа k_x и фиксированного $Ta = 10^5$, необходимо решить задачу поиска корня неявной функции $\lambda_1(Gr) = 0$. Эта функция строится дискретно по точкам с помощью многократного решения системы (6)–(14). Прослеживалась эволюция во времени максимумов модулей неизвестной θ_1 , которая затем аппроксимировалась экспоненциальной формулой $C \exp(\lambda_1 t)$. Неизвестные C и λ_1 определялись методом наименьших квадратов [15]. Число узлов сетки составляло $N = 800$, шаг по времени — $\Delta t = h_z^2/8$. Алгоритм определения действительной части декремента возмущений описан в работе [2]. Для проверки расчётов на границе монотонной моды по числу Прандтля и более подробного построения нейтральных кривых в окрестности критического числа Грасгофа применялся метод дифференциальной прогонки.

Представим неизвестные функции в виде нормальных возмущений:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, z) &= \varphi_1(z) \exp(-\lambda t + ik_x x), \\ \psi(t, x, z) &= \psi_1(z) \exp(-\lambda t + ik_x x), \\ \upsilon(t, x, z) &= \upsilon_1(z) \exp(-\lambda t + ik_x x), \\ \theta(t, x, z) &= \theta_1(z) \exp(-\lambda t + ik_x x), \end{aligned} \tag{15}$$

где λ — декремент возмущений.

Введём обозначения [16]:

$$\varphi_1 = \Psi_1, \quad \varphi_2 = \Psi_1', \quad \varphi_3 = \Psi_1'', \quad \varphi_4 = \Psi_1''', \quad \varphi_5 = \upsilon_1, \quad \varphi_6 = \upsilon_1', \quad \varphi_7 = \theta_1, \quad \varphi_8 = \theta_1', \tag{16}$$

где символ «'» означает дифференцирование по времени. С учётом (16) и условия, что решение полученной системы находится в виде нормальных возмущений (15), после преобразований системы уравнений (3) придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [11]

$$\begin{aligned} \varphi_i' &= \varphi_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 5, 7), \\ \varphi_4' &= (2k_x^2 + ik_x Gr \cdot u_0 - \lambda) \varphi_3 + (-k_x^4 - ik_x Gr (k_x^2 u_0 + u_0'') + k_x^2 \lambda) \varphi_1 + (-\sqrt{Ta}) \varphi_6 + (ik_x) \varphi_7, \\ \varphi_6' &= (\sqrt{Ta}) \varphi_2 + (-ik_x Gr \cdot \upsilon_0') \varphi_1 + (k_x^2 + ik_x Gr \cdot u_0 - \lambda) \varphi_5, \\ \varphi_8' &= (GrPr) \varphi_2 + (-ik_x Gr^2 Pr^2 \tau_0') \varphi_1 + (k_x^2 + ik_x GrPr \cdot u_0 - Pr \cdot \lambda) \varphi_7 \end{aligned} \tag{17}$$

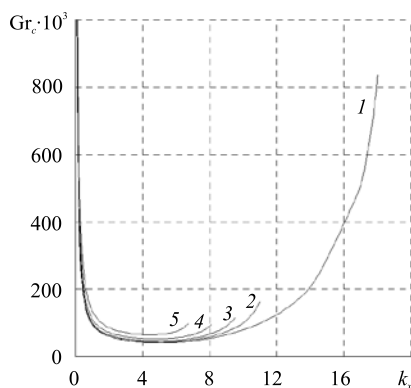


Рис. 1. Нейтральные кривые монотонной моды неустойчивости при различных числах Прандтля Pr: 0,2 (кривая 1); 0,5 (2); 0,6 (3); 0,7 (4); 0,8 (5)

с граничными условиями, следующими из (4):

$$z = \pm 1: \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_5 = \varphi_7 = 0. \tag{18}$$

Краевая задача (17), (18) решалась с помощью пакета прикладных программ «Гидродинамическая устойчивость» [11, 17].

4. Результаты вычислений

На рисунке 1 представлены нейтральные кривые монотонной моды неустойчивости при значениях числа Прандтля $0,2 \leq Pr \leq 0,8$. В этом диапазоне критические числа Грасгофа расположены в пределах $40839,42 \leq Gr_c \leq 65040$.

Расчёты показали (Рис. 2), что диапазон монотонной моды ограничен значением числа Прандтля, равным 0,93. С ростом числа Прандтля течение дестабилизируется при $0 < Pr \leq 0,3$, а при $0,3 \leq Pr < 0,93$ критическое число Грасгофа увеличивается. Наименьшее значение критического числа Грасгофа для монотонной моды неустойчивости составляет $Gr_c = 40839,42$ и достигается при $Pr = 0,3$. Одновременно с ростом числа Прандтля волновое число k_x , соответствующее критическому числу Грасгофа, убывает в пределах $2,8 \leq k_x \leq 5,2$ (Рис. 3).

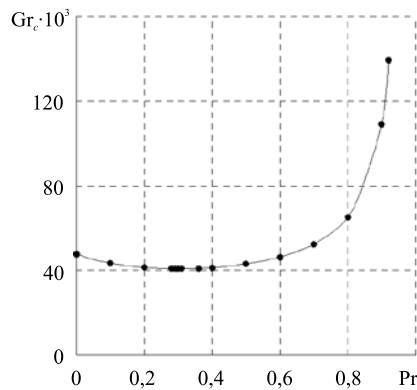


Рис. 2. Зависимость критического числа Грасгофа от числа Прандтля

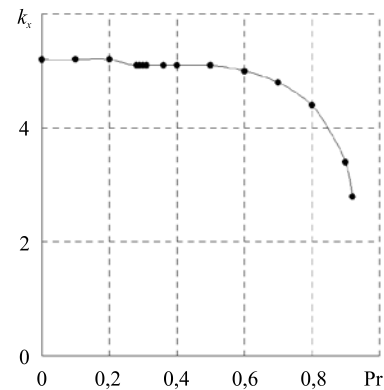


Рис. 3. Зависимость волнового числа, соответствующего критическому числу Грасгофа, от числа Прандтля

5. Заключение

Исследовано влияние быстрого вращения при $Ta = 10^5$ на монотонную гидродинамическую моду неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малых числах Прандтля. Численный анализ показывает, что при увеличении числа Прандтля в диапазоне $0 < Pr \leq 0,3$ течение становится менее устойчивым, а при $0,3 < Pr \leq 0,92$ наоборот, критическое число Грасгофа возрастает. Таким образом, критическое число Грасгофа достигает минимального значения $Gr_c = 40839,42$ с волновым числом $k_x = 5,1$ при $Pr = 0,3$.

Определена граница гидродинамической моды неустойчивости при $Ta = 10^5$. Аналогичное течение при отсутствии вращения [5, 6] имеет гораздо меньшую границу монотонной моды неустойчивости по числу Прандтля ($Pr < 0,4$), а также монотонно возрастающее с ростом Pr критическое число Грасгофа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-96001-р_урал_a).

Литература

1. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.: Гостехтеориздат, 1952. – 286 с.
2. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2006. – 154 с.
3. *Андреев В.К.* Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт № 1-10 / ИВМ СО РАН. – Красноярск, 2010. – 68 с.
4. *Андреев В.К., Бекежанова В.Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 3-20. DOI
5. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. – 1992. – V. 2, no. 3. – P. 141-151.
6. *Герцуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
7. *Аристов С.Н., Зимин В.Д.* Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: Препринт № 145 / ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР. – Свердловск, 1986. – 50 с.
8. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // МЖГ. – 1988. – № 4. – С. 48-55.
9. *Тарунин Е.Л., Шварц К.Г.* Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6, № 6. – С. 108-117.
10. *Шварц К.Г.* Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при малом значении числа Прандтля // МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 29-38. DOI
11. *Чиклаев Д.Г., Шварц К.Г.* Исследование линейной устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости с твердыми границами методом дифференциальной прогонки // Вестник ПГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3. – С. 42-46.
12. *Чиклаев Д.Г., Шварц К.Г.* Влияние слабого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твердыми границами при малых числах Прандтля // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 4. – С. 188-192.

13. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
14. Чикулаев Д.Г. Интерактивная система исследования устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Сборник материалов межрегиональной науч.-практ. конф. ММВТ-2012, Киров, ВятГУ, 6-7 декабря 2012 г. – С. 152-156.
15. Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
16. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: Учеб. пособие. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2004. – 101 с.
17. Сорokin Л.Е. Исследование устойчивости течений и равновесия жидкости с помощью ППП «Гидродинамическая устойчивость». – Пермь: Изд-во ПГУ, 2006. – 36 с.

References

1. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*. NASA TM, 1958.
2. Aristov S.N., Schwarz K.G. *Vihrevye techeniya advektivnoj prirody vo vrashhajushhemsya sloe zhidkosti* [Vortices flows of the advective nature in a rotated layer]. Perm, Perm State University, 2006. 154 p.
3. Andreev V.K. *Resheniye Biriha uravnenij konvekcii i nekotorye ego obobshheniya* [Birikh solution of convection equations and some of its generalizations]. Preprint No 1-10, Inst. Comput. Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, 2010. 68 p.
4. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of non-isothermal fluids (Review). *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, no 2, pp. 171-184. DOI
5. Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M. On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers. *Microgravity Q*, 1992, vol. 2, no. 3, pp. 141-151.
6. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Nepomnyashchy A.A. *Ustojchivost' konvektivnyh techenij* [Stability of convective flows]. Moscow, Nauka, 1989. 320 p.
7. Aristov S.N., Zimin V.D. *Advektivnye volny vo vrashhajushhemsya sharovom sloe* [Advective waves in a rotating spherical layer]. Preprint No. 145, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences S.S.S.R., Sverdlovsk, 1986. 50 p.
8. Aristov S.N., Frick P.G. Large-scale turbulence in thin layer of non-isothermal rotating fluid. *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, no. 4, pp. 522-528.
9. Tarunin E.L., Shvarc K.G. Issledovanie linejnoy ustojchivosti advektivnogo techenija metodom setok [The advective flow linear stability investigation by grid method]. *Vychislitel'nye tehnologii – Computing Technologies*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 108-117.
10. Schwarz K.G. Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer at a small Prandtl number. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40, no. 2, pp.193-201. DOI
11. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Issledovanie linejnoy ustojchivosti advektivnogo techeniya vo vrashhajushhemsya gorizonta'nom sloe zhidkosti s tvjordymi granicami metodom differencial'noj progonki [Investigation of the advective flow linear stability in rotated horizontal liquid layer with solid boundaries by differential sweep method]. *Vestnik PGU. Serija: Matematika. Mehanika. Informatika – Bulletin of Perm State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2011, no. 3, pp. 42-46.
12. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Vliyanie slabogo vrashheniya na ustojchivost' advektivnogo techeniya v gorizonta'nom sloe zhidkosti s tvjordymi granicami pri malyh chislah Prandtlya [The effect of slow rotation on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries at small Prandtl numbers]. *Vestnik PGU. Serija: Fizika. – Bulletin of Perm State University. Series: Physics*, 2012, no. 4, pp. 188-192.
13. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective stability of incompressible liquid*. Jerusalem, Wiley, Keter Press, 1976.
14. Chikulaev D.G. Interaktivnaya sistema issledovaniya ustojchivosti advektivnyh techenij vo vrashhajushhemsya sloe zhidkosti [Interactive system for investigation of the stability of advective flows in a rotating fluid layer]. *Proc. Conf. MMVT-2012, Kirov, Vyatka State University, 6-7 December 2012*, pp. 152-156.
15. Demidovich V.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Numerical Methods of Analysis: approximation of functions and differential and integral equations*. St.-Petersburg: Lan-Trade, 2008. 367 p.
16. Lobov N.I., Ljubimov D.V., Ljubimova T.P. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii gidrodinamicheskoy ustojchivosti* [Numerical methods for solving problems in the theory of hydrodynamic stability]. Perm: Perm State University, 2004. 101 p.
17. Sorokin L.E. *Issledovanie ustojchivosti techenij i ravnovesiya zhidkosti s pomoshh'ju PPP "Gidrodinamicheskaya ustojchivost'"* [Investigation of flow stability and fluid balance using the software package Hydrodynamic Stability]. Perm, Perm State University, 2006. 36 p.

Поступила в редакцию 28.12.2013; опубликована в электронном виде 24.06.2014

Сведения об авторах

Чикулаев Дмитрий Геннадьевич, асп., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: mail@chikulaev.com

Шварц Константин Григорьевич, дфмн, проф., ПГНИУ; e-mail: kosch@psu.ru