

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.11

УДК 534.8: 534.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН НА МНОЖЕСТВЕННЫХ ПОЛОСОВЫХ ТРЕЩИНАХ В СЛОИСТОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ КОМПОЗИТЕ

М.В. Голуб

*Институт математики, механики и информатики Кубанского государственного университета,
Краснодар, Российская Федерация*

Решается задача численного моделирования установившихся гармонических колебаний слоистого фонованного кристалла (упругого периодического композита) с набором полосовых трещин, параллельных границам слоёв, и рассматриваются сопутствующие волновые явления. Для описания падающего волнового поля используется метод матриц переноса (метод матриц пропагаторов), позволяющий не только строить волновые поля, но и рассчитывать разрешённые и запрещённые зоны, а также находить фактор локализации. Посредством интегрального подхода рассеянное множественными дефектами волновое поле представляется в виде суперпозиции полей, рассеянных всеми трещинами. Для каждого из рассеянных полей строится интегральное представление в виде свёртки Фурье-символов матриц Грина соответствующих слоистых структур и преобразования Фурье вектора скачка смещений на берегах трещины. Скачки перемещений определяются методом граничных интегральных уравнений с применением схемы Бубнова–Галёркина, где в качестве проекционной и базисной систем выбираются многочлены Чебышева 2-го рода, учитывающие особенность поведения решения у краёв трещины. Возникающая при дискретизации системы интегральных уравнений система линейных алгебраических уравнений с диагональным преобладанием компонент имеет блочную структуру. Анализируются характеристики, качественно и количественно описывающие волновые процессы, имеющие место при дифракции плоских упругих волн на множественных трещинах в фонованном кристалле. Изучаются резонансные свойства системы дефектов, а также влияние на резонансные свойства взаимного расположения и размеров дефектов в слоистом фонованном кристалле. Для получения более наглядных результатов и их пояснения вычисляется вектор плотности потока энергии, строятся отвечающие им поверхности и линии тока энергии.

Ключевые слова: фонованный кристалл, трещина, упругие волны, композит, резонанс, локализация

SIMULATION OF ELASTIC WAVE DIFFRACTION BY MULTIPLE STRIP-LIKE CRACKS IN LAYERED PERIODIC COMPOSITE

M. V. Golub

Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

Numerical modeling of the harmonic motion of a layered phononic crystal (elastic periodic composite) with a set of co-planar strip-like cracks and the accompanying wave phenomena are studied. To simulate an incident field, a transfer matrix method is used. This method allows one to calculate wave-fields and to estimate band gaps and localization factor. The wave-field scattered by a set of strip-like cracks is a superposition of the wave-fields scattered by each crack. All the scattered wave-fields have integral representations in the form of convolution of Fourier symbols of Green's matrix of the corresponding layered structures and the Fourier transform of crack opening displacements. Crack opening displacements are calculated by applying the Bubnov–Galerkin scheme along with the boundary integral equation method. To solve the system of integral equations, Chebyshev polynomials of the second kind are used because they take into account the square root behaviour of crack opening displacement. The system of linear algebraic equations arising after discretization is composed of matrices describing interactions between cracks. Wave characteristics that allow describing wave phenomena related to elastic wave diffraction by a set of cracks are analysed, and corresponding examples are given. Resonance scattering by a system of cracks depending on the defect situation is investigated, the streamlines of wave energy flows are constructed, and the results are discussed.

Key words: phononic crystal, crack, elastic waves, composite, resonance, localization

1. Введение

В последние годы заметно возрос интерес исследователей к акустическим метаматериалам — довольно новому классу функциональных композитов, позволяющих управлять или манипулировать акустическими и упругими волнами [1]. Метаматериалы могут входить в состав актуаторов и применяются при создании и оптимизации новых многофункциональных композитов, разработке новых акустических и ультразвуковых устройств (детекторов волновых фильтров, волновых транзисторов, акустических линз, интерферометров и другого) [2]. Среди акустических метаматериалов выделим фонованные кристаллы.

Концепция фонованных кристаллов (ФнК) возникла в 90-х годах XX века как продолжение работ по фотонным кристаллам, которые уже широко использовались в приложениях. ФнК — это акустический / упругий эквивалент фотонного кристалла, который в определённых частотных диапазонах за счёт периодически повторяющихся включений в матрице однородного материала полностью отражает падающие на него волны. Среди важных свойств, которые демонстрируют фонованные кристаллы, назовём следующие: возможность формирования запрещённых зон, локализация колебаний, «изгиб» волн, отрицательная рефракция (подробнее см. монографию [2] и ссылки в ней). Следует отметить, что

для активного внедрения ФнК в различные приложения принципиально важным является возможность решения задачи настройки и оптимизации запрещённых зон (регулирования ширины и положения зон). Созданные к сегодняшнему дню некоторые устройства на основе упругих ФнК имеют большой потенциал, так как с их помощью можно точнее «управлять» энергией упругих и акустических колебаний. К примеру, известны двумерные фононные кристаллы на поверхности кристалла ниобата лития [3], акустические сенсоры из стальной пластины с двумя периодическими наборами отверстий и углублений на поверхности, использующие резонансы двумерного ФнК [4].

В целом изготовление и численное моделирование одномерных ФнК проще, чем двух- или трёхмерных ФнК. Для описания одномерных или слоистых ФнК можно использовать широкий спектр численных методов, который включает метод Т-матриц или матриц-пропагаторов, методы на основе матриц Грина, метод граничных элементов, метод конечных разностей, метод спектральных конечных элементов и прочие численные и полуаналитические методы (подробнее см. обзоры в [2, 5]). Менее изучены задачи распространения волн в ФнК при наличии разного рода неоднородностей, нарушающих периодичность. Такие задачи представляют отдельный интерес, поскольку, во-первых, дефекты типа трещин ведут к разрушению композитов, а, во-вторых, за счёт неоднородностей можно управлять потоками волновой энергии [6]. Так, на основе разложения решения по плоским волнам в [7] рассмотрена задача распространения волн через фононный кристалл с точечными дефектами. Решены задачи рассеяния волн на одиночных дефектах [8] и повреждённых границах в упругих и пьезоупругих фононных кристаллах, где применялись пружинные модели [9, 10] и метод граничных интегральных уравнений [8, 10].

В настоящей статье излагается схема построения математической модели для описания дифракции гармонических волн на множественных полосовых дефектах в слоистом фононном кристалле. Численно определяются некоторые резонансные сочетания параметров задачи и приводятся волновые характеристики для резонансного и нерезонансного рассеяния. Для моделирования нестационарных колебаний такого фононного кристалла с трещинами или при их отсутствии используется интегральное преобразование Лапласа.

2. Постановка задачи

Рассматривается распространение гармонических плоских волн с круговой частотой ω через расположенный между двумя полуплоскостями периодический упругий композит (фононный кристалл) образуемый N ячейками, каждая из которых состоит из K упругих слоёв. Предполагается, что фононный кристалл содержит набор полосовых трещин параллельных слоям (см. Рис. 1). Вводится декартова система координат $\mathbf{x} = (x, z)$ с центром на левой границе фононного кристалла. Ось Ox параллельна границам слоёв. Каждый j -й слой ($j = 1, 2, \dots, NK$) занимает область $\{|x| < \infty, a_j < z < a_{j+1}\}$, имеет толщину $h_j = a_j - a_{j-1}$ и сделан из материала A_j с константами Ламе λ_j, μ_j и плотностью ρ_j . Механические и геометрические параметры ФнК изменяются с периодом H , где H — толщина ячейки, $A_j = A_{j+K}$ и $d_j = d_{j+K}$. Индексы $j = 0$ и $j = NK + 1$ соответствуют двум полупространствам, ограничивающим рассматриваемый ФнК. Каждая из M полосовых трещин $\Omega_m = \{|x - x_m| < l_m, z = z_m\}$ имеет длину l_m и расположена в слое с номером D_m внутри ячейки H_m на расстоянии d_m от границы $z = a_{K(H_m-1)}$, а также отстоит на x_m от оси Oz .

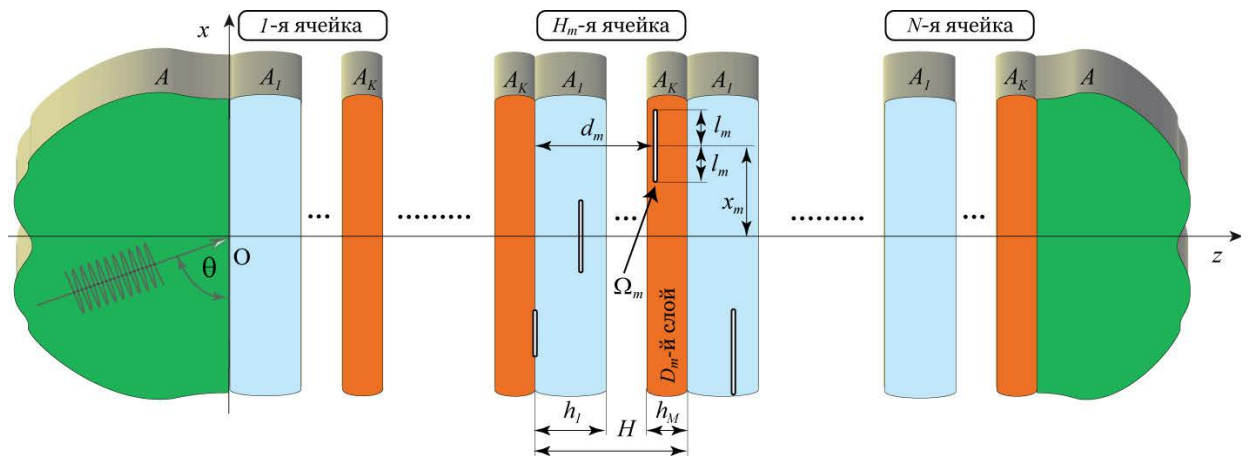


Рис. 1. Геометрия задачи: слоистый фононный кристалл с M трещинами

Характеристики каждого упругого слоя с номером j отмечаются соответствующим нижним индексом, если это необходимо. Вектор перемещений $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ всюду внутри рассматриваемого слоистого композита удовлетворяет уравнениям Ламе. Так как для описания гармонических колебаний с заданной круговой частотой ω делается замена $\mathbf{u}(x, z, t) = \mathbf{u}(x, z) \exp(-i\omega t)$, то уравнения движения принимают вид:

$$(\lambda_j + \mu_j) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_j + \mu_j \Delta \mathbf{u}_j + \rho_j \omega^2 \mathbf{u}_j = 0. \quad (1)$$

Поля перемещений в поврежденном композите, в силу линейности уравнений (1), могут быть представлены в виде суперпозиции поля \mathbf{u}^{in} , падающего под углом θ к границам, и полей \mathbf{u}_m , рассеянных каждым из M дефектов: $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{in}} + \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_m$. Трещины моделируются бесконечно тонкими разрезами со свободными от нормальных и касательных напряжений поверхностями

$$\boldsymbol{\tau}(x, z) = \{\sigma_{xz}(x, z), \sigma_{zz}(x, z)\} = \mathbf{0}, \quad (x, z) \in \Omega_m \quad (m = \overline{1, M}), \quad (2)$$

на которых перемещения терпят скачок. Здесь σ_{ij} — тензор напряжений, который определяется через вектор перемещений $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ согласно закону Гука.

3. Схема решения

В качестве падающего волнового поля рассматриваются плоские гармонические P- или SV-волны с волновым числом k_0 , распространяющиеся под углом θ к границам рассматриваемого слоистого фоновый кристалла. Для нахождения волновых полей без дефекта используется метод матриц-пропагаторов или метод матриц переноса, который позволяет также определять запрещённые зоны на основе расчёта фактора локализации [5]. Условно разделяя фоновый кристалл на два слоистых полупространства относительно прямой $z = z_m$

$$\mathbf{u}_m(x, z) = \begin{cases} \mathbf{u}_m^-(x, z), & z \geq z_m, \\ \mathbf{u}_m^+(x, z), & z < z_m, \end{cases} \quad (3)$$

для каждого из рассеянных волновых полей (3) можно построить интегральные представления, удовлетворяющие уравнениям (1) так, что итоговое волновое поле будет удовлетворять граничным условиям (2). С использованием преобразования Фурье по переменной x перемещения записываются в виде [8, 11]:

$$\mathbf{u}_m^\pm(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m^\pm(\alpha, z) \mathbf{P}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (m = \overline{1, M}), \quad (4)$$

где $\mathbf{P}_m(\alpha)$ — Фурье-символы неизвестных напряжений $\mathbf{p}_m(x)$ на прямой $z = z_m$, содержащей m -й дефект, а $K_m^\pm(\alpha, z)$ — Фурье-символы матриц Грина полупространств $z < z_m$ и $z \geq z_m$, которым отвечают индексы «-» и «+» [8]. Вследствие необходимости учёта большого количества слоёв численная процедура нахождения Фурье-символов путём обращения соответствующих блоков ведёт себя неустойчиво. Для исключения этого используется схема, предложенная в работе [11]. Согласно схеме при введении скачков перемещений на берегах каждой из трещин

$$\mathbf{v}_m(x) = \mathbf{u}_m(x, z_m - 0) - \mathbf{u}_m(x, z_m + 0) \quad (5)$$

можно выразить связь между напряжениями $\mathbf{p}_m(x)$ и скачками $\mathbf{v}_m(x)$ в отвечающих им Фурье-символах:

$$\mathbf{P}_m(\alpha) = [K_m^-(\alpha, 0) - K_m^+(\alpha, 0)]^{-1} \mathbf{V}_m(\alpha) = L_m(\alpha) \mathbf{V}_m(\alpha).$$

Подстановка выражения (5) позволяет переписать преобразование Фурье скачков смещений (4) в виде:

$$\mathbf{u}_m^\pm(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m^\pm(\alpha, z) L_m(\alpha) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (m = \overline{1, M}).$$

Применение к этому интегральному представлению оператора напряжений согласно закону Гука ведёт для напряжений, создаваемых во всей структуре m -й трещиной, к выражениям (подробнее см. в [12]):

$$\boldsymbol{\tau}_m(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m^\pm(\alpha, z) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (m = \overline{1, M}). \quad (6)$$

Для удовлетворения граничных условий на каждой из трещин необходимо в условия отсутствия напряжений на берегах трещины (2) подставить интегральные представления (6) и выражения для падающего волнового поля \mathbf{u}^{in} . При этом возникает система интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} S_k^\pm(\alpha, z_m) \mathbf{V}_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= f_m(x), \quad |x - x_m| \leq l_m \quad (m = \overline{1, M}), \\ f_m(x) &= -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(x, z_m) = -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(0, z_m) \exp(ik_0 \sin \theta x). \end{aligned} \quad (7)$$

Неизвестные скачки смещений (5) определяются путём разложения их в ряд по ортогональным полиномам

$$\mathbf{v}_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{c}_{mn} \phi_n \left(\frac{x - x_m}{l_m} \right). \quad (8)$$

В рассматриваемом случае $\phi_n(x)$ — полиномы Чебышёва 2-го рода, учитывающие корневую особенность поведения у краёв трещин; соответствующее преобразование Фурье для m -й трещины есть $\Phi_n(\alpha l_m)$. Для решения системы интегральных уравнений (7) применяется метод Бубнова-Галёркина. При дискретизации оставляется N_r членов, и в результате задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения скачков в форме (8):

$$\begin{aligned} \sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^N Q_{mm'n'n'} \mathbf{c}_{m'n'} &= \mathbf{f}_{mm} \quad (m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N_r}), \\ Q_{mm'n'n'} &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_m(\alpha) \Phi_n(\alpha l_m) \Phi_{n'}(\alpha l_m) d\alpha, & m = m', \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\alpha, z_{m'}) \Phi_n(\alpha l_m) \Phi_{n'}(\alpha l_{m'}) e^{-i\alpha(x_m - x_{m'})} d\alpha, & m \neq m', \end{cases} \\ \mathbf{f}_{mm} &= -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(0, z_m) \Phi_n(l_m k_0 \sin \theta). \end{aligned}$$

В силу выбора базисной и проекционной систем функций матрица Q имеет явное диагональное преобладание такого свойства, что значения коэффициентов $\mathbf{c}_{m'n'}$ убывают с ростом n' . При численных расчётах критерий для определения количества членов в разложении устанавливается исходя из условия $\max_{n' \leq 3} |\mathbf{c}_{m'n'}| < 10^4 |\mathbf{c}_{m'N_r}|$, которое на практике для рассматриваемого диапазона значений произведения $\omega l_m \leq 15$ позволяет взять $N_r = 14$. Вычисление интегралов в Q производится по контуру, огибающему особенности Фурье-символов матриц Грина каждого из условно выделенных упругих полупространств. Таким образом, контур идёт вдоль вещественной оси всюду, кроме участка между волновыми числами P- и S-волн, а при интегрировании используется метод Симпсона [11].

4. Численный анализ

Во всех рассмотренных ниже примерах толщины слоёв предполагаются одинаковыми ($d_1 = d_2$), количество ячеек составляет $N = 12$, а материалами слоёв являются свинец и эпоксид. Свойства материалов приведены в Таблице. Такой выбор материалов, количества слоёв и их толщин обусловлен тем, что при $M = 1$ возможно сопоставление результатов данной работы с результатами из статьи [10], где обсуждается случай одной трещины.

Таблица. Значения параметров материалов

№	Материал	Константы Ламе		Плотность ρ , кг·м ⁻³
		λ , Па	μ , Па	
1	Эпоксид	$6,38 \cdot 10^9$	$1,61 \cdot 10^9$	1200
2	Свинец	$36,32 \cdot 10^9$	$8,4 \cdot 10^9$	3800

Для количественного анализа колебаний при наличии таких дефектов, как трещины, нередко используют коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) K_{mj}^{\pm} , которые демонстрируют степень концентрации напряжений у края m -й трещины. Для изучения резонансных явлений в фоновых кристаллах КИН удобно использовать только в разрешённых зонах, так как в запрещённых зонах они имеют малые значения. Величины амплитуд скачков смещений $v_m(x)$ также не дают достаточную для выявления и анализа резонансов в запрещённых зонах информацию. В [10] для этого предложены другие характеристики, а именно усреднённое нормированное значение скачка смещений:

$$v_m^j = \bar{v}_m^j / \bar{u}_m^{\text{in}} \quad (j = \{x, z\}),$$

$$\bar{v}_m^j = \frac{1}{2l_m} \left| \int_{-l_m}^{l_m} v_{mj}(x) dx \right|, \quad \bar{u}_m^{\text{in}} = \frac{1}{H} \left| \int_{(D_m-1)H}^{D_m H} \mathbf{u}(0, z) dz \right|.$$

Для изучения взаимного влияния дефектов сначала рассматриваются две трещины, находящиеся друг над другом ($x_1 = x_2$), и анализируется характер влияния на рассеяние расстояния $|z_1 - z_2|$ между ними. На рисунке 2 приведены поверхности для среднего (\bar{v}_2^z) и нормализованного среднего (v_2^z) значений скачка смещений, а также для КИН K_{22}^- в зависимости от частоты ω и местоположения второй трещины z_2 при $l_1 = l_2 = 0,5$, $z_1 = 6,25$, $x_1 = x_2 = 0$. Более тёмные зоны соответствуют большим значениям смещений.

Резонансы чётко проявляются в виде тёмных вытянутых участков, рассекающих графики по аналогии со случаем одной трещины, рассмотренным в [8]. В запрещённой зоне резонансы видны только на поверхности (Рис. 2б), тогда как в разрешённой зоне они прослеживаются на всех частях рисунка.

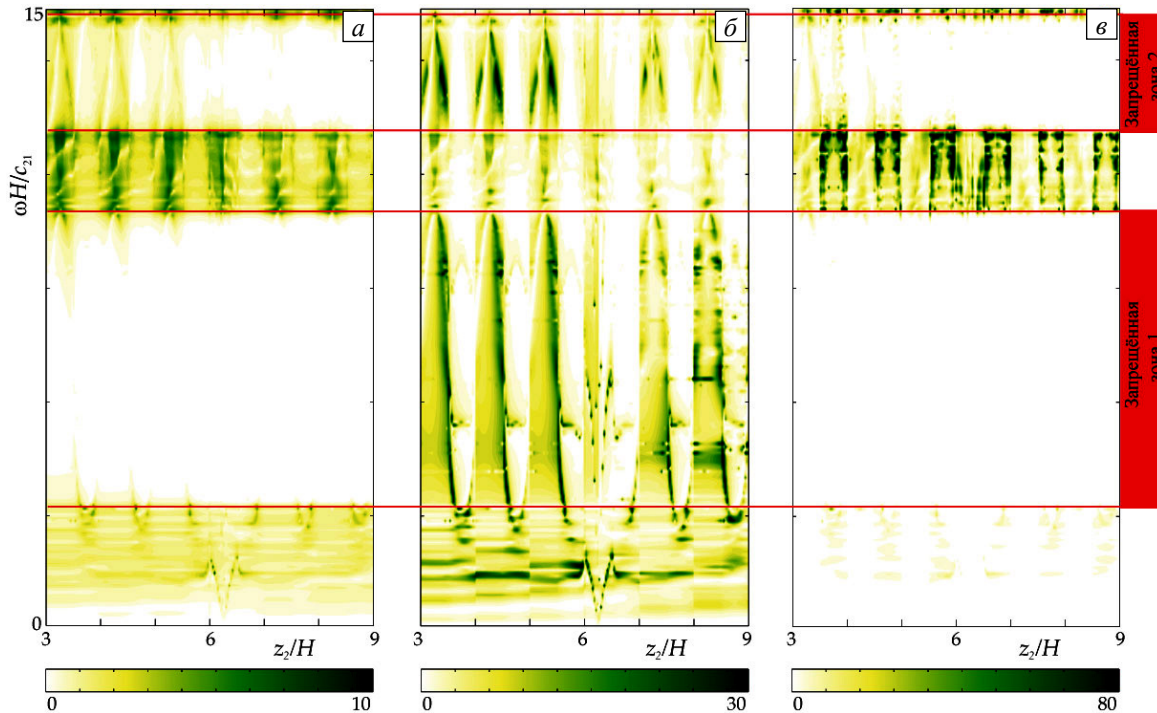


Рис. 2. Вид межслойных поверхностей в ФнК при среднем ($\bar{v}_2^z(\omega, z_2)$) (а) и нормализованном среднем ($v_2^z(\omega, z_2)$) (б) значениях скачка смещений; КИН $K_{22}^-(\omega, z_2)$ (в) для $M = 2$ при падении Р-волны по нормали к поверхности; $l_1 = l_2 = 0,5$, $z_1 = 6,25$, $x_1 = x_2 = 0$

Можно заключить, что номер ячейки, содержащей второй дефект, незначительно влияет на резонансные свойства, и все величины — средние значения скачков смещений, нормализованные средние значения скачков смещений, КИН, ведут себя периодически при переходе из одной ячейки в другую. Исключение составляет случай, когда обе трещины располагаются в одной ячейке, что существенно меняет резонансные свойства ФНК.

Волновые явления при гармонических колебаниях удобно визуализировать с помощью линий тока энергии, которые показывают траектории усреднённого по времени потока энергии в упругих телах [13]. Линии тока энергии являются касательными к вектору плотности потока энергии Умова, при установившихся гармонических колебаниях записываемому в виде [13]:

$$\mathbf{e}_n(x) = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_n),$$

где $\boldsymbol{\tau}_n$ — напряжения на элементарной площадке, ортогональной вектору нормали \mathbf{n} .

Очевидно, что резонансной ситуации соответствуют большие амплитуды раскрытия берегов трещин и большие значения КИН (см. Рис. 2). Для более детального сравнения этих ситуаций на рисунках 3, 4 приведены линии тока волновой энергии, наложенные на поверхность плотности потока энергии.

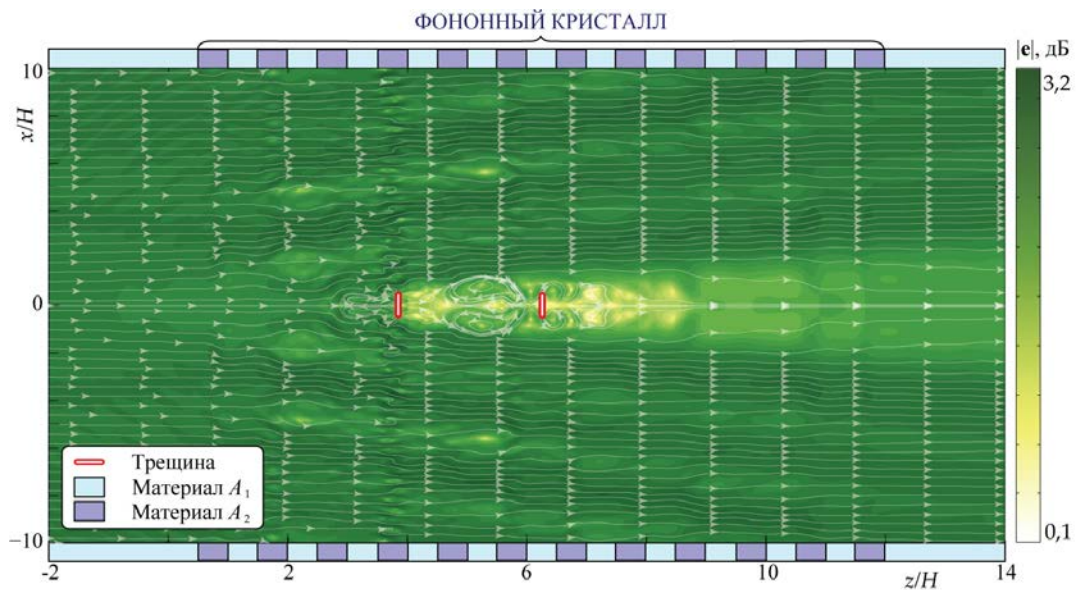


Рис. 3. Линии тока энергии при нерезонансном рассеянии Р-волны, падающей по нормали к границе, при $M = 2$, $l_1 = l_2 = 0,5$, $z_1 = 6,25$, $z_2 = 3,84$, $x_1 = x_2 = 0$, $\omega = 10,679$

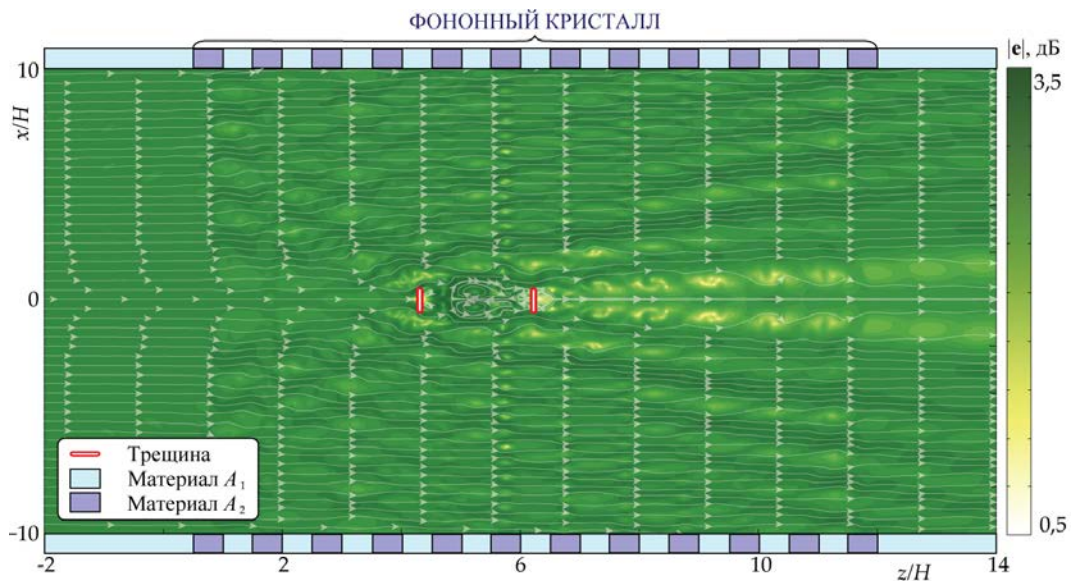


Рис. 4. Линии тока энергии при резонансном рассеянии Р-волны, падающей под нормальным углом к границе, при $M = 2$, $l_1 = l_2 = 0,5$, $z_1 = 6,25$, $z_2 = 4,32$, $x_1 = x_2 = 0$, $\omega = 11,472$

Рисунки иллюстрируют, соответственно, нерезонансное и резонансное рассеяние Р-волны несколькими трещинами. При нерезонансном рассеянии наблюдается рост амплитуд колебаний в слое, содержащем первую на пути распространения волны трещину, а также образование между трещинами системы энергетических вихрей (замкнутые траектории линий тока) небольшой интенсивности (плотность $|\mathbf{e}_n|$). При резонансе имеет место зона локализации волновой энергии между трещинами, в которой образуются менее крупные по площади вихри энергии, имеющие большую интенсивность. Кроме того, как при $M = 2$, так и при $M = 4$ идёт перенаправление потоков энергии, отличное от случая одной трещины, рассмотренного в [10], а за трещинами возникает более обширная зона «тени».

Возможность фокусировки волновой энергии относится к важным задачам, связанным с созданием и оптимизацией работы сенсоров и актуаторов. На рисунке 5 демонстрируется результат фокусировки волновой энергии за счёт присутствия четырёх трещин ($M = 4$; вытянутая область фокусировки обведена тёмным эллипсом). При этом в зоне, предшествующей трещинам, возникают два разнонаправленных энергетических вихря, перенаправляющих потоки волновой энергии в зону фокусировки.

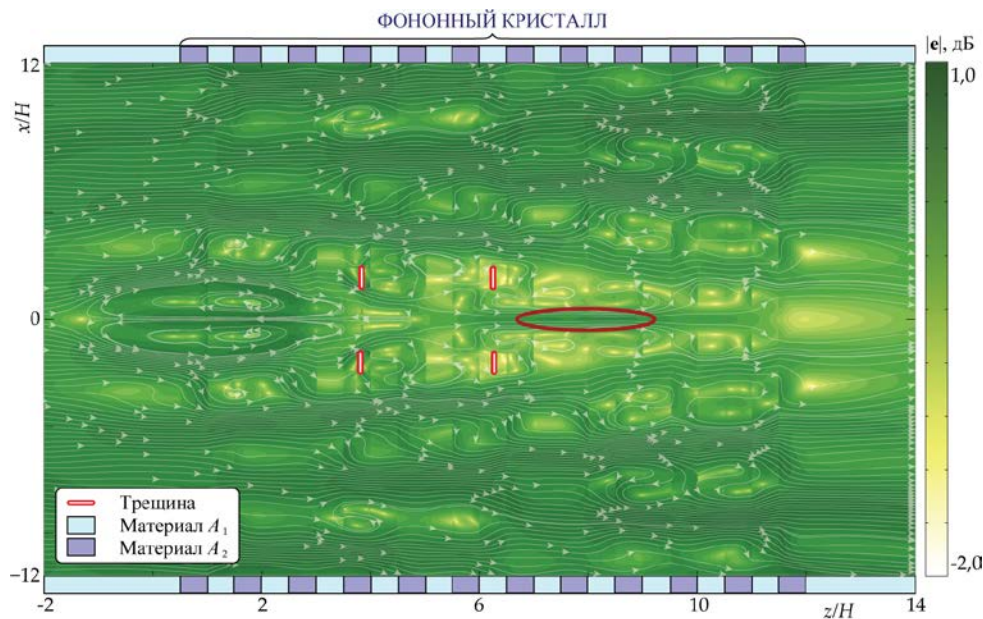


Рис. 5. Линии тока энергии при фокусировке Р-волны, падающей по нормали к границе, при $M = 4$, $l_m = 0,5$, $z_1 = z_2 = 6,25$, $z_3 = z_4 = 3,84$, $x_1 = x_3 = -2$, $x_2 = x_4 = 2$, $\omega = 1,609$

5. Заключение

Представлена математическая модель для описания динамического поведения слоистого фоновидного кристалла с набором полосовых трещин. Приведены численные результаты и анализируются некоторые волновые явления, возникающие при рассеянии плоских упругих волн несколькими дефектами. Резонансные эффекты, а также возможность фокусировки иллюстрируются графиками распределения плотности потока волновой энергии и соответствующими линиями тока. Созданная модель позволяет определять резонансные свойства и выявлять соотношения параметров неоднородностей типа разрезов или трещин для фокусировки волновой энергии в заданной области.

Автор выражает благодарность профессорам Е.В. Глушкову, Н.В. Глушковой и Ч. Жангу за ряд ценных замечаний и поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-33011) и Министерства образования и науки РФ (проект 1.189.2014К).

Литература

1. Lu M.-H., Feng L., Chen Y.-F. Phononic crystals and acoustic metamaterials // *Materials Today*. – 2009. – Vol. 12, no. 12. – P. 34-42. DOI
2. Acoustic metamaterials and phononic crystals / Ed. by P.A. Deymier. – Berlin: Springer, 2013. – 378 p. DOI
3. Никитов С.А., Григорьевский А.В., Григорьевский В.И., Котелянский И.М., Лузанов В.А., Миргородская Е.Н., Сучков С.Г. Особенности распространения поверхностных акустических волн в двумерных фоновидных кристаллах на поверхности кристалла ниобата лития // *Радиотехника и электроника*. – 2011. – Т. 56, № 7. – С. 876-888.

4. Zubtsov M., Lucklum R., Ke M., Oseev A., Grundmann R., Henning B., Hempel U. 2D phononic crystal sensor with normal incidence of sound // *Sensors Actuat. A-Phys.* – 2012. – Vol. 186. – P. 118-124. DOI
5. Golub M.V., Fomenko S.I., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // *Int. J. Solids Struct.* – 2012. – Vol. 49, no. 2. – P. 344-354. DOI
6. Schneider D., Liaqat F., El Boudouti H., El Abouti O., Tremel W., Butt H.-J., Djafari-Rouhani B., Fytas G. Defect-controlled hypersound propagation in hybrid superlattices // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – Vol. 111. – P. 164301. DOI
7. Yao Z.-J., Yu G.-L., Wang Y.-S., Shi Z.-F. Propagation of bending waves in phononic crystal thin plates with a point defect // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – Vol. 46, no. 13. – P. 2571-2576. DOI
8. Golub M.V., Zhang Ch. In-plane motion and resonance phenomena in a periodically layered composites with a crack // *Wave Motion.* – 2014. – Vol. 51, no. 2. – P. 308-322. DOI
9. Lan M., Wei P. Laminated piezoelectric phononic crystal with imperfect interfaces // *J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 111. – P. 013505. DOI
10. Golub M.V., Zhang Ch., Wang Y.-S. SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer // *J. Sound Vib.* – 2012. – Vol. 331, no. 8. – P. 1829-1843. DOI
11. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2011. – Vol. 129. – P. 2923-2934. DOI
12. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Жанг Ч. Резонансное блокирование бегущих волн системой трещин в упругом слое // *Акустический журнал.* – 2009. – Т. 55, № 1. – С. 11-20. (English version DOI)
13. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1997. – Vol. 102. – P. 1356-1360. DOI

References

1. Lu M.-H., Feng L., Chen Y.-F. Phononic crystals and acoustic metamaterials. *Materials Today*, 2009, vol. 12, no. 12, pp. 34-42. DOI
2. *Acoustic metamaterials and phononic crystals*, ed. by P.A. Deymier. Berlin: Springer, 2013. 378 p. DOI
3. Nikitov S.A., Grigor'evskii A.V., Grigor'evskii V.I., Kotelyanskii I.M., Luzanov V.A., Mirgorodskaya E.N., Suchkov S.G. Osobennosti rasprostraneniya poverkhnostnykh akusticheskikh voln v dvumernykh fononnykh kristallakh na poverkhnosti kristalla niobata litiya [Features of propagation of surface acoustic waves in two-dimensional phononic crystals on the surface of a lithium niobate crystal]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 876-888.
4. Zubtsov M., Lucklum R., Ke M., Oseev A., Grundmann R., Henning B., Hempel U. 2D phononic crystal sensor with normal incidence of sound. *Sensors Actuat. A-Phys.*, 2012, vol. 186, pp. 118-124. DOI
5. Golub M.V., Fomenko S.I., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. *Int. J. Solids Struct.*, 2012, vol. 49, no. 2, pp. 344-354. DOI
6. Schneider D., Liaqat F., El Boudouti H., El Abouti O., Tremel W., Butt H.-J., Djafari-Rouhani B., Fytas G. Defect-controlled hypersound propagation in hybrid superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 111, 164301. DOI
7. Yao Z.-J., Yu G., Wang Y.-S., Shi Z.-F. Propagation of bending waves in phononic crystal thin plates with a point defect. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, no. 13, pp. 2571-2576. DOI
8. Golub M.V., Zhang Ch. In-plane motion and resonance phenomena in a periodically layered composites with a crack. *Wave Motion*, 2014, vol. 51, no. 2, pp. 308-322. DOI
9. Lan M., Wei P. Laminated piezoelectric phononic crystal with imperfect interfaces. *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 111, 013505. DOI
10. Golub M.V., Zhang Ch., Wang Y.-S. SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 8, pp. 1829-1843. DOI
11. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 129, pp. 2923-2934. DOI
12. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Golub M.V., Zhang Ch. Resonance blocking of travelling waves by a system of cracks in an elastic layer. *Acoust. Phys.*, 2009, vol. 55, no. 1, pp. 8-16. DOI
13. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, vol. 102, pp. 1356-1360. DOI

Поступила в редакцию 25.12.2014; опубликована в электронном виде 30.06.2015

Сведения об авторе

Голуб Михаил Владимирович, кфмн, внс, Институт математики, механики и информатики Кубанского государственного университета (ИММИ КубГУ), 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149; e-mail: m_golub@inbox.ru