

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.8

УДК 519.63: 539.3

## О РЕАЛИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ СМЕШАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

М.Е. Фролов

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация*

Работа посвящена развитию одного метода апостериорного контроля точности приближенных решений краевых задач. Суть таких методов заключается в том, что по исходным данным задачи и имеющемуся приближенному решению количественно оценивается ошибка – отклонение приближенного решения от неизвестного точного. Подход носит название функционального, поскольку опирается на методы функционального анализа, что позволяет вычислять гарантированные верхние границы погрешности для широкого класса приближенных решений. Для иллюстрации возможностей подхода используется известный программный пакет для инженерных расчетов – ANSYS. На тестовых примерах показано, что функциональный подход при его реализации на основе смешанного конечного элемента Арнольда–Бюффи–Фалка расширяет возможности стандартной методики ANSYS. Полученные результаты указывают на стабильно высокую эффективность оценки истинной величины погрешности. В то же время с измельчением конечно-элементной сетки стандартная процедура может приводить к существенному росту переоценки ошибки.

*Ключевые слова:* апостериорные оценки погрешности, метод конечных элементов, смешанные аппроксимации, плоская деформация, ANSYS

## IMPLEMENTATION OF ERROR CONTROL FOR SOLVING PLANE PROBLEMS IN LINEAR ELASTICITY BY MIXED FINITE ELEMENTS

M.E. Frolov

*St. Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

The paper is devoted to investigation of one of the modern approaches to *a posteriori* error control for approximate solutions of boundary-value problems. Such type of approaches provides, for the given approximate solution and problem data, a direct computation of a quantitative error estimate for deviation from the unknown exact solution of a problem. In this work, we use the functional approach proposed by S. Repin and colleagues – see, for example, books by P. Neittaanmäki and S. Repin (Elsevier, 2004) and by S. Repin (de Gruyter, 2008) and references cited therein. It allows us to determine the reliable and sufficiently sharp upper bounds to errors for a wide class of approximate solutions. To demonstrate the potentials of the approach, the well-known software for engineering computations ANSYS is employed. Most of the standard approaches, including the technique implemented in the package, are strictly applicable only to a restricted set of approximate solutions with additional mathematical properties. The analysis of a series of plane strain problems shows that the functional approach with implementation based on the Arnold–Boufffi–Falk mixed finite element (SIAM J. Numer. Anal., 2005, vol. 42, no. 6, pp. 2429–2451) significantly extends the capabilities of the standard methodology of the package. Numerical calculations are based on examples proposed in the paper by V. Manet (Composites Science and Technology, 1998, V. 58, N. 12, P. 1899–1905). The data thus obtained point to highly efficient robust estimates of the true error. At the same time, the standard procedure of the package may lead to a significant growth of overestimation of the error during the process of finite element mesh refinement.

*Key words:* *a posteriori* error estimates, finite element method, mixed approximations, plane strain, ANSYS

### 1. Введение

Интерес к проблеме построения оценок, позволяющих апостериорно контролировать погрешность решений задач механики, возник еще в конце 40-х годов XX века. В частности, вышла работа [1], заложившая основу метода гиперокружностей [2], имевшего базой геометрические построения. Аналогичный результат также был доказан при помощи методов математической физики [3]. С конца 70-х годов теория апостериорного контроля точности приближенных решений получила мощный импульс к развитию со стороны инженеров и вычислителей, в особенности, специалистов в области метода конечных элементов. Этот непрерывно растущий интерес был вызван, в первую очередь, необходимостью явной проверки результатов расчетов средствами самой вычислительной математики.

Уже к концу XX века сформировалось отдельное направление, в рамках которого на основе метода конечных элементов было предложено несколько подходов к построению апостериорных оценок погрешности (см. монографии [4–12] и приведенные в них обзоры). В отечественной литературе исследования данного направления также представлены, хотя и не так широко. Помимо некоторых источников из [10] и [12], можно упомянуть работы [13–24] и цитируемую там литературу. Подходы, ставшие за два последних десятилетия классическими, предполагают наличие дополнительных свойств у приближенного решения. В частности, приближенное решение должно быть галеркинской аппроксимацией, что не гарантируется при использовании коммерческих программных продуктов для инженерных вычислений, прочно вошедших в современную практику. Поэтому такие продукты редко привлекаются к научным исследованиям в данной области.

В данной работе реализуется альтернативный и, пожалуй, наиболее универсальный из существующих в настоящее время подходов. Он основан на привлечении методов математической физики, вариационного исчисления и функционального анализа, подобно [3], и позволяет обобщать классические оценки (см. [10], [12] и цитируемую там литературу). Если конкретизировать содержание, то продолжены исследования автора, представленные в работе [25], которая, главным образом, посвящена вычислительным аспектам и целиком направлена на решение проблемы, возникающей при применении стандартных непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов для вычисления оценки погрешности. Показано, что стандартные непрерывные аппроксимации могут приводить к значительному росту переоценки истинной величины ошибки с измельчением сетки, что в итоге делает подход малоэффективным. Проведен сравнительный анализ стандартных и смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. В качестве успешного альтернативного решения предложено использовать конечные элементы Арнольда–Бюффи–Фалка [26], эффективность привлечения которых подтверждается серией численных экспериментов на краевых задачах с условием в перемещениях на всей границе расчетной области. Расчеты ограничены случаем однородного и изотропного материала.

В данной работе исследование также осуществляется на примере плоских задач линейной теории упругости, алгоритмы решения которых предоставляет пакет ANSYS. Акцент делается на развитие функционального подхода применительно к краевым задачам с граничными условиями общего вида (и в перемещениях, и в напряжениях), включающим несколько материалов, с упором на сравнение со стандартной методикой пакета. Такая постановка вычислительного эксперимента имеет большее прикладное значение. В работе показано, что именно в случаях с несколькими материалами подход в полной мере проявляет свои достоинства и позволяет получить более качественные результаты, чем стандартная методика ANSYS. Одной из важных особенностей, позволивших распространить применение элементов Арнольда–Бюффи–Фалка на перечисленные краевые задачи, является то, что такие аппроксимации дают возможность явно удовлетворить граничному условию в напряжениях при действии поверхностных сил, кусочно-постоянных на гранях элементов разбиения, прилегающих к внешней границе расчетной области, на которой задано это условие.

## 2. Задача плоского деформирования и апостериорная оценка для обобщенного решения

В рамках теории упругости классическая задача плоского деформирования, на примере которой обсуждаются аспекты проводимого исследования, заключается в определении в области  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  поля перемещений  $\mathbf{u}$ , поля напряжений  $\hat{\sigma}$  и поля деформаций  $\hat{\varepsilon}$ , которые подчиняются системе соотношений

$$\begin{aligned} \text{Div} \hat{\sigma} + \mathbf{f} &= 0, \\ \hat{\sigma} &= \hat{L} \hat{\varepsilon}, \\ \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{f}$  — плотность объемных сил, а  $\hat{L}$  — тензор упругих констант, связывающий напряжения и деформации. К системе (1) необходимо добавить граничные условия в терминах перемещений

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{на } \Gamma_d \quad (2)$$

и напряжений

$$\hat{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{на } \Gamma_s, \quad (3)$$

где  $\Gamma_d$  и  $\Gamma_s$  — две непересекающиеся части границы, объединение которых представляет собой всю границу области  $\Omega$ . В соотношениях (2) и (3)  $\mathbf{u}_d$  и  $\mathbf{t}$  означают, соответственно, заданные на первой части границы перемещения и заданные на второй части границы поверхностные силы, а  $\mathbf{n}$  — внешнюю нормаль к поверхности тела. Относительно гладкости границы области предполагается липшицевость, что накладывает довольно мягкие ограничения на класс рассматриваемых задач. В него, в частности, входят все задачи в связных полигональных областях и областях с гладкой границей.

Основой для вывода апостериорной оценки для задачи (1)–(3), как и для применения метода конечных элементов, является ее обобщенная (слабая) постановка. При этом отыскивается решение так называемой прямой задачи, в которой неизвестной характеристикой является поле перемещений, а поля деформаций и напряжений определяются по нему. Прямая задача заключается в следующем: требуется найти элемент  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  такой, что справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \hat{L} \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \hat{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{V} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbf{R}^2) \mid \mathbf{w} = \mathbf{u}_d \text{ на } \Gamma_d\}$ ,  $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbf{R}^2) \mid \mathbf{w} = 0 \text{ на } \Gamma_d\}$ , а  $\mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbf{R}^2) = \mathbf{W}_2^1(\Omega) \times \mathbf{W}_2^1(\Omega)$  — декартово произведение двух классических пространств Соболева, состоящих из функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными первого порядка пространству Лебега  $L_2(\Omega)$  (пространству суммируемых с квадратом функций в смысле интеграла Лебега). Соответствующий задаче функционал энергии выглядит следующим образом:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{L} \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma.$$

Если взять произвольное приближенное решение задачи (4) —  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , то несложно показать, что энергетическая норма погрешности этого решения выражается через разность значений функционала на приближенном и точном решениях, а именно

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \int_{\Omega} \hat{L} \hat{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) : \hat{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\Omega = 2(J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u})). \quad (5)$$

В литературе можно найти два типа функциональных апостериорных оценок энергетической нормы погрешности для рассматриваемой задачи. Первая из этих оценок основана на строгом выполнении условия симметрии тензора напряжений. Она исследовалась численно в работах [27] и [25] с привлечением стандартных непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов на различных типах разбиений. Представленные там результаты указывают на существенный недостаток такого подхода, выражающийся в росте переоценки величины погрешности в процессе уменьшения характерного размера элементов сетки. Ниже обсуждается апостериорная оценка второго типа, учитывающая условие симметрии тензора напряжений в слабой форме при помощи штрафного слагаемого. Эта оценка была предложена в монографии [10]. Как показали результаты [25], представленные для случая однородного изотропного материала, она обладает улучшенными свойствами при реализации вычислений с использованием смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. Остановимся на ней подробнее.

Если ввести обозначения для невязок уравнений равновесия  $\mathbf{R}(\hat{\sigma}) = \text{Div} \hat{\sigma} + \mathbf{f}$  в  $\Omega$ ,  $\mathbf{r}(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{t}$  на  $\Gamma_s$ , то оценка погрешности, предложенная в [10], может быть преобразована к виду:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \leq M^2(\mathbf{v}; \hat{\sigma}, \beta_1, \beta_2) = (1 + \beta_1) D^2(\mathbf{v}, \hat{\sigma}_{sym}) + (1 + 1/\beta_1)(1 + \beta_2) C_{\Omega\Gamma}^2 \left( |\Omega| \|\mathbf{R}(\hat{\sigma})\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_s| \|\mathbf{r}(\hat{\sigma})\|_{\Gamma_s}^2 \right) + (1 + 1/\beta_1)(1 + 1/\beta_2) \|C_{\Omega\Gamma}^K \hat{\sigma}_{sk}\|_{\Omega}^2, \quad (6)$$

где  $\hat{\sigma}$  — свободный элемент, играющий роль независимой аппроксимации поля напряжений;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — два произвольных положительных параметра;

$$D^2(\mathbf{v}, \hat{\sigma}) = \int_{\Omega} \hat{L}^{-1}(\hat{\sigma} - \hat{L} \hat{\varepsilon}(\mathbf{v})) : (\hat{\sigma} - \hat{L} \hat{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega; \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_{sym} = (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^T)/2; \quad \hat{\sigma}_{sk} = (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^T)/2;$$

$C_{\Omega\Gamma}$  и  $C_{\Omega\Gamma}^K$  — константы, не зависящие от разбиения области на конечные элементы. Символами  $\|\cdot\|_{\Omega}$ ,  $\|\cdot\|_{\Gamma_s}$  и  $|\cdot|$  обозначены, соответственно, стандартные нормы в пространствах функций, суммируемых с квадратом в смысле интеграла Лебега по области и части ее границы, а также мера Лебега для множеств. Первая из констант должна удовлетворять неравенству следующего вида:

$$\frac{1}{|\Omega|} \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{|\Gamma_s|} \|\mathbf{w}\|_{\Gamma_s}^2 \leq C_{\Omega\Gamma}^2 \|\mathbf{w}\|^2, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0.$$

Константа  $C_{\Omega\Gamma}^K$  выражается через константу в неравенстве Корна (см. [10]).

### 3. Аспекты реализации вычисления оценки

Отметим, что в системе соотношений (1) тензор  $\hat{\sigma}$  обозначает тензорное поле, являющееся точным решением, то есть он отвечает истинному полю перемещений. В оценке погрешности (6), чтобы не вводить дополнительное обозначение, будем полагать, что тензор  $\hat{\sigma}$  является уже произвольным элементом из соответствующего класса, но близость этого элемента к истинному полю напряжений обеспечивает качественную оценку погрешности. На точных значениях правая и левая часть совпадают, поскольку невязки в уравнениях равновесия внутри области и граничных условиях равны нулю.

Итак, для вычисления функционала  $M$ , дающего гарантированную верхнюю оценку погрешности приближенного решения  $\mathbf{v}$ , необходимо построить поле  $\hat{\sigma}$ . Это можно сделать при помощи минимизации функционала  $M^2$ , являющегося квадратичным при фиксированных значениях положительных параметров, с последующим пересчетом фиксированных значений на оптимальные. Поиск минимизирующего функционала элемента после дискретизации задачи связан с решением системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей. Чтобы сделать возможным использование более простых смешанных аппроксимаций, характерных для скалярных задач, и сохранить при этом принадлежность поля напряжений их функциональному пространству, необходимо применить именно оценку (6) со слабым учетом условия симметрии тензора напряжений. Смешанные методы с сильным условием симметрии в плоских задачах теории упругости, равно как и методы со слабым учетом условия, но в векторной задаче, требуют привлечения аппроксимаций с большим числом степеней свободы. Идея прибегнуть к простым аппроксимациям впервые успешно реализована автором в работе [25] (там же можно найти ссылки на некоторые обзорные работы по смежным вопросам). Так, при аппроксимациях Равьяра–Тома или улучшенных по сравнению с ними аппроксимациях Арнольда–Бюффи–Фалка необходимо следующее представление свободного элемента:

$$\hat{\sigma} = [\mathbf{S}^1 \ \mathbf{S}^2], \quad \mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2 \in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \Gamma_s);$$

$$\mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \Gamma_s) = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \mathbf{R}^2) \mid \text{div } \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} \in \mathbf{L}_2(\Gamma_s) \right\}.$$

На рисунке 1 схематично изображен конечный элемент Арнольда–Бюффи–Фалка, где «крышка» над символами означает, что они рассматриваются в локальной системе координат элемента. Степени свободы элемента представляются интегралами нормальной составляющей векторного поля по граням элемента (согласно числу граней — четырем) и двумя интегралами по элементу от произведения дивергенции векторного поля на соответствующую пространственную координату ( $\hat{x}_1$  или  $\hat{x}_2$ ).

Шесть функций формы имеют вид:  $\hat{\psi}_1(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{x}_2 - 1)/4 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\psi}_2(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 + 1)/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\psi}_3(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{x}_2 + 1)/4 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\psi}_4(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - 1)/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\psi}_5(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 3(\hat{x}_1^2 - 1)/8 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\psi}_6(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(\hat{x}_2^2 - 1)/8 \end{bmatrix}$ . Следует помнить, что при вычислении интегралов в глобальной системе координат необходимо также учитывать преобразование Пиолы  $P_F$ , то есть  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = P_F \hat{\boldsymbol{\psi}}(\hat{\mathbf{x}})$ , где  $F$  — отображение, связывающее элемент исходного разбиения и эталонный элемент, изображенный на рисунке 1 (см., например, [26] или [28]).

В заключение параграфа отметим, что так же, как и при реализации стандартных методов конечных элементов, сборка общей матрицы системы происходит при обходе всех элементов разбиения. Степени свободы, однако, относятся не к узлам, а к граням элемента и к элементу в целом, и их общее число при оценке погрешности составляет  $2 \times (N_{ed} + 2N_{el})$ , где  $N_{ed}$  — общее число ребер в разбиении, а  $N_{el}$  —

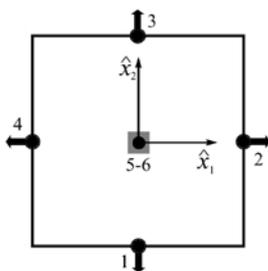


Рис. 1. Конечный элемент Арнольда–Бюффи–Фалка, его степени свободы и их нумерация

общее число элементов.

Таким образом, согласно алгоритму реализации вычислений на конкретной сетке следует:

- 1) путем сборки построить составные части матрицы системы;
- 2) выбрать начальные значения положительных параметров, например,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ;
- 3) сформировать систему и решить её (предпочтительнее — итерационным методом, поскольку тогда можно принимать предыдущие решения за начальные);
- 4) определить параметры, вычислив аналитически оптимальные значения;
- 5) пересчитать глобальную оценку и на новой итерации перейти к шагу 3.

На практике достаточно повторить серию шагов пересчета параметров и уточнения решения системы два-три раза.

#### 4. Численные результаты

Приведем серию из трех относительно простых примеров, объединенных общей геометрией, позволяющих проиллюстрировать основные выводы всего исследования. В качестве источника приближенного решения выбран пакет ANSYS. Поскольку коммерческие пакеты тестируются в промышленных масштабах, то их разумно применять при проверке собственного программного кода, реализованного на языке FORTRAN стандарта 2003/2008 с привлечением средств библиотеки IMSL (в частности, для работы с разреженными матрицами). Примеры направлены в первую очередь на оценку эффективности апостериорного контроля погрешности и сравнение с результатами вычислений по стандартной методике пакета. Для этого берется равенство (5), в котором точное решение в правой части заменено на приближенное решение, вычисленное на более мелкой сетке. Такая замена позволяет достаточно точно оценить истинную погрешность, приводя лишь к незначительной её недооценке. С другой стороны, такой подход дает возможность обращаться к любым примерам, и даже к тем, в которых гладкое аналитическое решение невозможно построить или решение существует лишь в обобщенном (слабом) смысле. В пакете ANSYS реализован классический метод построения апостериорных оценок, который был предложен в работе [29] и нашел широкое применение в инженерной практике. Следует особо отметить одну из работ — [30], которая стала базовой для математического обоснования метода. Результаты сравниваются при помощи естественной характеристики — индекса эффективности апостериорной оценки (или индикатора). Этот индекс представляет собой отношение оцениваемой величины к оцениваемой величине, например,

$$I_e = M / \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| . \quad (8)$$

Ниже приводятся примеры, в которых геометрия области, свойства материалов и условия нагружения взяты из работы [31], посвященной расчетам трехслойных структур с помощью пакета ANSYS. Как и в оригинальной работе [31], примеры отличаются друг от друга лишь свойствами материалов. Граничные условия не изменяются и описываются один раз в первом примере. Геометрия области показана на рисунке 2. Ширина области составляет 24 мм, высота — 2 мм. Деформируемое твердое тело состоит из трех частей. Наружные слои сделаны из более жесткого материала. Толщина среднего слоя (наполнителя), изготовленного из более мягкого материала, составляет 80% от общей толщины. На рисунке 2 также демонстрируется начальное разбиение области на конечные элементы.

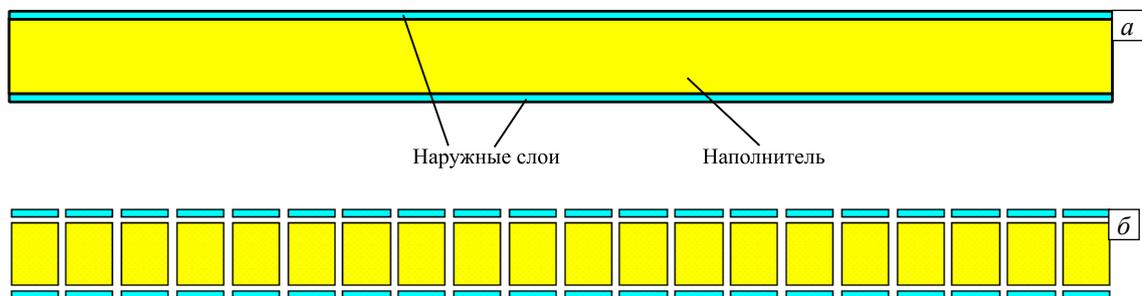


Рис. 2. Геометрия расчетной области (а); начальное разбиение (б)

*Пример 1.* Рассмотрим случай, когда материал слоев одинаков и имеет модуль Юнга 3,4 ГПа и коэффициент Пуассона 0,34. К верхнему слою приложено давление 1 МПа, а боковые кромки нижнего слоя закреплены. Основные параметры сеток указаны в 1-м, 2-м столбцах таблицы (например, сетке  $1 \times 1 \times 20$  соответствует одно разбиение по вертикали наружных слоев, одно разбиение по вертикали внутреннего слоя и двадцать разбиений всех трех слоев по горизонтали).

Данные об оценке погрешности представлены в 3–6-м столбцах таблицы и включают абсолютную и относительную погрешность, индексы эффективности для функциональной оценки погрешности, для индикатора, основанного на её первом слагаемом (см. его значение в скобках), и для индикатора, обеспечиваемого пакетом ANSYS. Из представленных результатов можно сделать вывод, что в случае одинакового материала стандартная процедура дает приемлемый результат, который даже чуть лучше, чем вычисленный для функциональной апостериорной оценки индикатор. Индексы эффективности обоих подходов стабильны при измельчении сетки.

*Примеры 2, 3.* В последующих примерах материал наполнителя имеет другие свойства: во 2-м — модуль Юнга 0,34 ГПа и коэффициент Пуассона 0,40 (пена [31]), а в 3-м — модуль Юнга 0,07 ГПа (мягкая пена [31]). Данные об оценке погрешности представлены в таблице. Основной вывод из этих результатов заключается в том, что даже такое простое обобщение выходит за рамки применимости стандартной процедуры. Вычисленные с ее помощью индексы эффективности демонстрируют свой существенный рост при

Таблица. Погрешность и ее индикаторы на последовательности вложенных (полученных равномерным дроблением предыдущих) конечно-элементных разбиений

Пример 1					
Сетка	Общее число элементов $N_{el}$	Погрешность		Индикаторы	
		$\ u - v\ $	%	$I_e$ (согласно (8))	$I_e$ (ANSYS)
1×1×20	60	0,3450	46,3	2,9 (1,3)	1,2
2×2×40	240	0,2140	28,7	2,8 (1,4)	1,2
4×4×80	960	0,1250	16,8	2,8 (1,5)	1,3
8×8×160	3840	0,0705	9,4	2,9 (1,5)	1,3
Пример 2					
1×1×20	60	1,4600	61,7	1,4 (0,8)	1,6
2×2×40	240	0,9750	41,2	1,5 (0,9)	2,4
4×4×80	960	0,5890	24,8	1,5 (1,0)	3,9
8×8×160	3840	0,3290	13,9	1,6 (1,1)	6,7
Пример 3					
1×1×20	60	3,370	77,3	1,0 (0,6)	1,3
2×2×40	240	2,400	55,4	1,2 (0,9)	1,8
4×4×80	960	1,460	33,7	1,3 (1,0)	2,9
8×8×160	3840	0,802	18,5	1,4 (1,1)	5,3

измельчении сетки (до 6,7). Это делает стандартную методику практически бесполезной, поскольку она указывает на погрешность свыше 90% там, где ее реальная величина не превосходит 15%. С другой стороны, индексы эффективности при функциональном подходе не превышают 1,6 и возрастают несущественно.

Решение на мелкой сетке необходимо только при постановке вычислительного эксперимента для оценки индекса эффективности. В реальных же расчетах контроль погрешности осуществляется исключительно при помощи функционала  $M$  (6). Оценка относительной погрешности находится как отношение мажоранты к энергетической норме приближенного решения. Процесс счета можно останавливать, если желаемая точность (по рекомендациям ANSYS обычно 85-90%) достигнута согласно апостериорной оценке, поскольку реальная точность всегда оказывается еще выше (индекс эффективности функционального подхода всегда больше единицы).

На рисунке 3 изображены приближенные значения скалярного поля суммарных перемещений, соответствующие примерам 1–3 (левая колонка, сверху вниз), а также индикаторы локального распределения погрешности по области на сетке с максимальным числом элементов, полученные по (6) в рамках функционального подхода (правая колонка). Остановимся на индикаторах распределения погрешности подробнее.

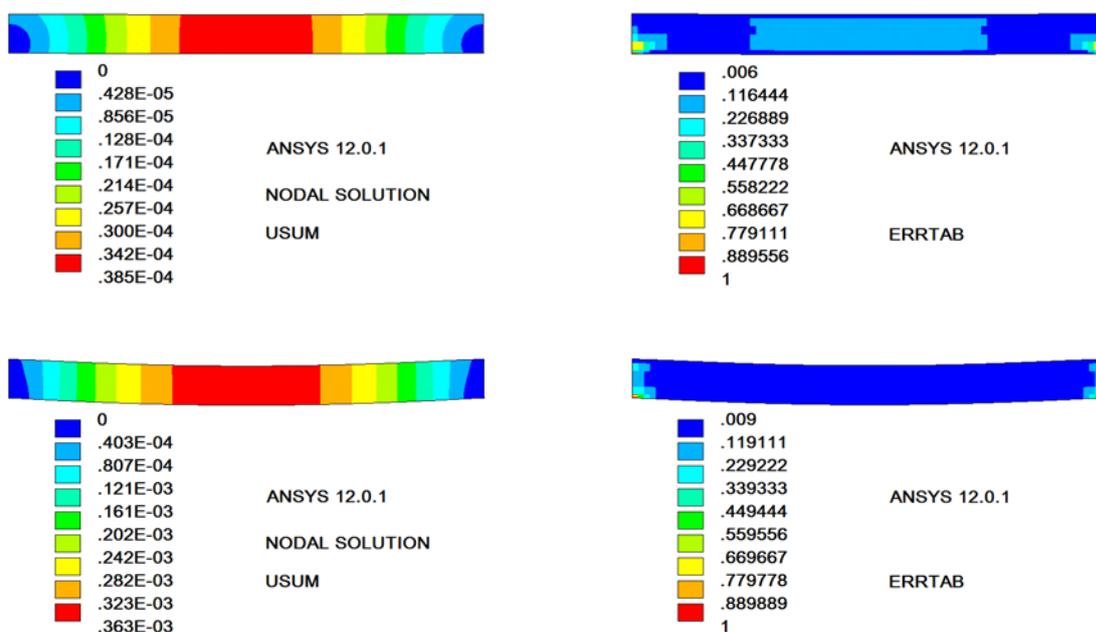


Рис. 3. Результаты решения задачи и вычисления апостериорной оценки в примерах 1–3: поля суммарных перемещений (левая колонка, сверху вниз) и поля индикации погрешности (правая колонка, сверху вниз)

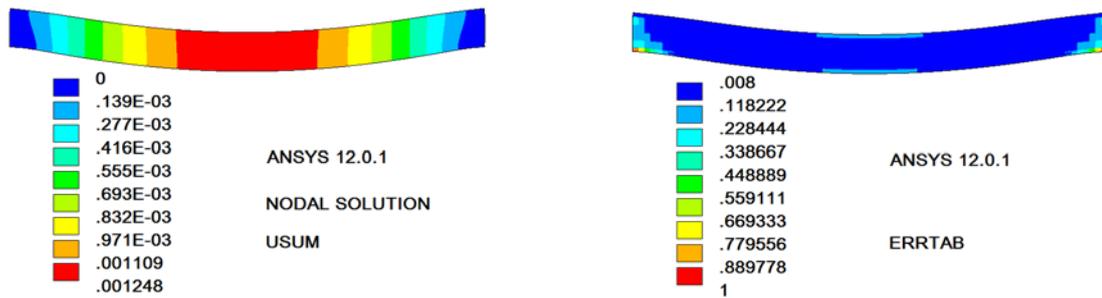


Рис. 3. Продолжение

Поскольку функционал  $D^2$  (см. (7)), входящий в выражение  $M^2$  (6), представляет собой сумму локальных вкладов на каждом элементе, которая на точном поле напряжений совпадает с квадратом истинной погрешности, то эту совокупность данных можно рассматривать как индикатор локального распределения погрешности по расчетной области. Таким образом, вычисляя глобальную оценку ошибки в энергетической норме, автоматически определяем еще и индикатор локальных ошибок. Такая информация в случае необходимости может послужить основой для адаптивного построения приближенного решения (адаптивные алгоритмы). Подобный алгоритм можно построить, например, используя результаты работ [22] и [23].

## Литература

1. Prager W., Synge J.L. Approximations in elasticity based on the concept of function space // Quart. Appl. Math. – 1947. – Vol. 5, No. 3. – P. 241-269.
2. Synge J.L. The hypercircle method // Studies in numerical analysis / Ed. B.K.P. Scaife. – London: Academic Press, 1974. – P. 201-217.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. – Chichester, Stuttgart: John Wiley & Teubner, 1996. – 127 p.
5. Ainsworth M., Oden J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 240 p.
6. Babuška I., Strouboulis T. The finite element method and its reliability. – New York: Oxford University Press, 2001. – 802 p.
7. Bangerth W., Rannacher R. Adaptive finite element methods for differential equations. Lectures in Mathematics. – ETH Zurich, Basel: Birkhauser, 2003. – 207 p.
8. Neittaanmäki P., Repin S. Reliable methods for computer simulation. Error control and a posteriori estimates. Studies in Mathematics and Its Applications. – New York: Elsevier, 2004. – 305 p.
9. Ladevèze P., Pelle J.-P. Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics. Mechanical Engineering Series. – New York, NY: Springer, 2005. – 413 p. DOI
10. Repin S.I. A posteriori estimates for partial differential equations. Radon Series on Computational and Applied Mathematics 4. – Berlin: de Gruyter, 2008. – 316 p.
11. Szabò B., Babuška I. Introduction to finite element analysis: Formulation, verification and validation. – John Wiley & Sons, 2011. – 364 p. DOI
12. Mali O., Neittaanmäki P., Repin S. Accuracy verification methods. Theory and algorithms. Computational Methods in Applied Sciences 32. – Dordrecht: Springer, 2014. – 355 p. DOI
13. Алексеев А.К., Махнев И.Н. Использование лагранжевых коэффициентов при апостериорной оценке погрешности расчета // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 375-388.
14. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Панин А.А. Зависимость эффективности апостериорной оценки точности приближенного решения эллиптической краевой задачи от входных данных и параметров алгоритма // Вестник Московского Университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2009. – № 1. – С. 18-22.
15. Фролов М.Е., Чурилова М.А. Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра–Тома // ЖВММФ. – 2012. – Т. 52, № 7. – С. 1277-1288.
16. Чурилова М.А. Применение функционального подхода к адаптивному решению эллиптических задач // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2012. – № 158. – С. 64-69.
17. Корнеев В.Г. Контроль погрешности численных решений краевых задач механики сплошной среды // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2009. – Т. 4, № 88. – С. 31-43.
18. Корнеев В.Г. Простые алгоритмы вычисления классических апостериорных оценок погрешности численных решений эллиптических уравнений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, № 4. – С. 11-27.
19. Золотарёва Н.Д., Николаев Е.С. Метод построения сеток, адаптирующихся к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1165-1178.
20. Золотарёва Н.Д., Николаев Е.С. Адаптивная  $p$ -версия метода конечных элементов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 7. – С. 863-876.

21. Багаев Б.М., Каренова Е.Д., Шайдуров В.В. Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. – Новосибирск: Наука, 2001. – Ч. 2. – 224 с.
22. Караваев А.С., Копысов С.П. Перестроение неструктурированных четырехугольных и смешанных сеток // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – № 4. – С. 62-78.
23. Караваев А.С., Копысов С.П., Пономарёв А.Б. Алгоритмы построения и перестроения неструктурированных четырехугольных сеток в многосвязных областях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 144-150. DOI
24. Копысов С.П., Новиков А.К. Метод декомпозиции для параллельного адаптивного конечно-элементного алгоритма // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2010. – № 3. – С. 141-154.
25. Фролов М.Е. Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // ЖВММФ. – 2013. – Т. 53, № 7. – С. 1178-1191. DOI
26. Arnold D.N., Boffi D., Falk R.S. Quadrilateral  $H(\text{div})$  finite elements // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – Vol. 42, No. 6. – P. 2429-2451. DOI
27. Muzalevsky A.V., Repin S.I. On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russ. J. Numer. Anal. M. – 2003. – Vol. 18, No. 1. – P. 65-85. DOI
28. Durán R.G. Mixed finite element methods. Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications // Lecture Notes in Mathematics. – 2008. – Vol. 1939. – P. 1-44. DOI
29. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1987. – Vol. 24, No. 2. – P. 337-357. DOI
30. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Исследование скорости сходимости вариационно-разностных схем для эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с гладкой границей // ЖВММФ. – 1969. – Т. 9. – С. 1102-1120.
31. Manet V. The use of ANSYS to calculate the behaviour of sandwich structures // Compos. Sci. Technol. – 1998. – Vol. 58, No. 12. – P. 1899-1905. DOI

## References

1. Prager W., Synge J.L. Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quart. Appl. Math.*, 1947, vol. 5, no. 3, pp. 241-269.
2. Synge J.L. *The hypercircle method Studies in numerical analysis*. Ed. B.K.P. Scaife. London: Academic Press, 1974, pp. 201-217.
3. Mikhlin S.G. *Variational methods in mathematical physics*. Pergamon Press, 1964. 583 p.
4. Verfürth R. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Chichester, Stuttgart: John Wiley & Teubner, 1996. 127 p.
5. Ainsworth M., Oden J.T. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. New York: John Wiley & Sons, 2000. 240 p.
6. Babuška I., Strouboulis T. *The finite element method and its reliability*. New York: Oxford University Press, 2001. 802 p.
7. Bangerth W., Rannacher R. *Adaptive finite element methods for differential equations. Lectures in Mathematics*. ETH Zurich, Basel: Birkhauser, 2003. 207 p.
8. Neittaanmäki P., Repin S. *Reliable methods for computer simulation. Error control and a posteriori estimates*. Studies in Mathematics and Its Applications. New York: Elsevier, 2004. 305 p.
9. Ladevèze P., Pelle J.-P. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Mechanical Engineering Series. New York, NY: Springer, 2005. 413 p. DOI
10. Repin S.I. *A posteriori estimates for partial differential equations*. Radon Series on Computational and Applied Mathematics 4. Berlin: Gruyter, 2008. 316 p.
11. Szabò B., Babuška I. *Introduction to finite element analysis: Formulation, verification and validation*. John Wiley & Sons, 2011. 364 p. DOI
12. Mali O., Neittaanmäki P., Repin S. *Accuracy verification methods. Theory and algorithms*. Computational Methods in Applied Sciences 32. Dordrecht: Springer, 2014. 355 p. DOI
13. Alekseev A.K., Makhnev I.N. On using the Lagrange coefficients for a posteriori error estimation. *Numer. Analysis Appl.*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 302-313. DOI
14. Bogolyubov A.N., Malykh M.D., Panin A.A. Dependence of the efficiency of a posteriori estimation of the solution accuracy of an elliptic boundary-value problem on the problem data and estimation algorithm parameters. *Mosc. Univ. Phys. Bull.*, 2009, vol. 64, no. 1, pp. 17-21. DOI
15. Frolov M.E., Churilova M.A. Mesh adaptation based on functional a posteriori estimates with Raviart–Thomas approximation. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 7, pp. 1044-1054.
16. Churilova M.A. The application of functional approach to adaptive solving of elliptic problems. *St.Petersburg State Politechnical University Journal*, 2012, no. 158, p. 64-69.
17. Korneyev V.G. An error control of numerical solutions of boundary value problems of continuous media mechanics. *St.Petersburg State Politechnical University Journal*, 2009, vol. 4, no. 88, pp. 31-43.
18. Korneyev V.G. Prostye algoritmy vychisleniia klassicheskikh aposteriornykh otsenok pogreshnosti chislennykh reshenii ellipticheskikh uravnenii [Simple algorithms for calculation of the classical a posteriori error estimates of numerical solutions of elliptic equations]. *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, vol. 153, no. 4, pp. 11-27.
19. Zolotareva N.D., Nikolaev E.S. Method for constructing meshes adapting to the solution of boundary value problems for ordinary differential equations of the second and fourth orders. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1189-1202. DOI
20. Zolotareva N.D., Nikolaev E.S. Adaptive p-version of the finite element method for solving boundary value problems for ordinary second-order differential equations. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 835-848. DOI

21. Bagaev B.M., Karepova E.D., Shaidurov V.V. *Setochnye metody resheniia zadach s pogramichnym sloem* [Grids Methods for Solving the Problems with Boundary Layer]. Novosibirsk, Nauka publ., 2001. Part 2, 224 p.
22. Karavaev A.S., Kopysov S.P. A refinement of unstructured quadrilateral and mixed meshes. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2013, no. 4, pp. 62-78.
23. Karavaev A.S., Kopysov S.P., Ponomarev A.B. Algorithms for construction and refinement of unstructured quadrangle meshes on multiconnected domains. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 144-150. DOI
24. Kopysov S.P., Novikov A.K. Domain decomposition for parallel adaptive finite element algorithm. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, no. 3, pp. 141-154.
25. Frolov M.E. Application of functional error estimates with mixed approximations to plane problems of linear elasticity. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 7, pp. 1000-1012. DOI
26. Arnold D.N., Boffi D., Falk R.S. Quadrilateral  $H(\text{div})$  finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005, vol. 42, no. 6, pp. 2429-2451. DOI
27. Muzalevsky A.V., Repin S.I. On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity. *Russ. J. Numer. Anal. M.*, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 65-85. DOI
28. Durán R.G. Mixed finite element methods. Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications. *Lecture Notes in Mathematics*, 2008, vol. 1939, pp. 1-44. DOI
29. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1987, vol. 24, no. 2, pp. 337-357. DOI
30. Oganesyanyan L.A., Rukhovets L.A. Study of the rate of convergence of variational difference schemes for second-order elliptic equations in a two-dimensional field with a smooth boundary. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 5, pp. 158-183. DOI
31. Manet V. The use of ANSYS to calculate the behaviour of sandwich structures. *Compos. Sci. Technol.*, 1998, vol. 58, no. 12, pp. 1899-1905. DOI

Поступила в редакцию 08.11.2013; опубликована в электронном виде 31.03.2014