

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.7

УДК 620.173:538.112:539.3

## СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ, ПОМЕЩЁННЫХ В ЭЛАСТОМЕР

А.М. Биллер<sup>1</sup>, О.В. Столбов<sup>1</sup>, Ю.Л. Райхер<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация<sup>2</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Описан точный магнитостатический расчёт силы, действующей между двумя частицами изотропного ферромагнетика, находящимися в постоянном однородном внешнем поле. Показано, что при близком расположении частиц (доли радиуса) магнитная сила значительно отличается от предсказаний модели точечных магнитных моментов. Кроме этого, заметно расширяется интервал углов между направлением поля и межцентровым вектором частиц, соответствующий притяжению. Последнее означает, что в плотной системе неоднородно поляризованных (намагниченных) частиц притяжение является доминирующим типом взаимодействия. Полученные соотношения использованы для оценки равновесных состояний, которые принимает пара частиц, находящихся в упругом массиве. В некоторых условиях при конкуренции магнитных и упругих сил конфигурация пары оказывается бистабильной. Такое поведение может существенно отражаться на изменении макроскопических свойств мягких магнитных эластомеров.

*Ключевые слова:* магнитоэластомерные композиты, магнитостатические силы, анизотропное взаимодействие, бистабильность

## THE FORCES BETWEEN MAGNETIZABLE PARTICLES EMBEDDED IN AN ELASTOMER

A.M. Biller<sup>1</sup>, O.V. Stolbov<sup>1</sup> and Yu.L. Raikher<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation<sup>2</sup> Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

The magnetostatic forces between two spherical particles made of an isotropic linearly polarizable magnetic substance and subjected to a uniform external field are studied. Under these conditions, the magnetization distribution within a given particle depends on the position and magnetization of the neighboring one. The solution for the magnetic energy  $U$  of the pair has the form of power series with respect to the ratio of the particle radius to the particle center-to-center distance. The coefficients of this series are found numerically taking in about hundred terms. Evaluation of the interparticle forces, which requires differentiation of the energy over coordinates, is facilitated by proposing an approximate formula for  $U$ , which enables one to avoid the laborious numeric procedure. In such a way, the distribution of interparticle forces is obtained and compared to that provided by the point magnetic moment model. It is shown that at close neighboring of the particles, the magnetic force differs substantially from that predicted by the dipole model. When analyzing the sign of the force, it is found that the angular interval between the field and the particle center-to-center vector, which corresponds to repulsion, is much more narrow than that for point dipoles. This means that in a system of magnetizable particles attraction is the dominating type of interaction. The problem is extended to magnetomechanics by considering the same pair of particles in an elastic matrix. There, the state of the system, when magnetized, is determined by interplay of magnetic and elastic forces. It is shown that in the field applied along the center-to-center direction, the configuration of the pair essentially depends on the field strength. In a low field the equilibrium interparticle gap changes but slightly since weak magnetic attraction induces weak restoring elastic forces. However, in stronger fields the system becomes bistable: besides the energy minimum located close to the initial interparticle gap, another minimum emerges, which corresponds to a close approach (clusterizing) of the particles. In the latter state both the magnetic and elastic forces are strong. This bistability effect has important implications in mechanics of soft magnetic elastomers.

*Key words:* magnetic elastomer composites, magnetostatic forces, anisotropic interaction, bistability

### 1. Введение

Функциональность мягких магнитных эластомеров (ММЭ) как материалов для практического применения обусловлена их сильным откликом на приложенное поле. Объяснение и описание этого эффекта являются предметом фундаментального исследования и составляют содержание магнитомеханики ММЭ. Цель настоящей работы — уточнить одно из главных приближений этой теории. Оно заключается в том, что при расчёте межчастичных взаимодействий, индуцированных полем в ферромагнитном наполнителе, магнитные моменты частиц заменяются на точечные диполи. Указанный подход используется в большинстве современных моделей ММЭ [1–3].

Оценим допустимость такой посылки для наиболее изученного класса ММЭ — дисперсий микрочастиц карбонильного железа в эластомерной (например, силиконовой) матрице. Легко убедиться, что для этих материалов предположение о точечном характере магнитных моментов малореалистично. В самом деле, зёрна железа размером  $a \sim 1$  мкм являются многодоменными, а значит, по отношению к приложенному полю  $\mathbf{H}$  — магнитополяризующимися. В поле  $\mathbf{H}$ , которое практически всегда можно считать не зависящим от координат, каждая частица приобретает магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  и становится источником индуцированного поля  $|\mathbf{H}_{in}| \sim \mu/a^3$  с градиентом  $\sim H_{in}/a$ . Таким образом, для ММЭ типична ситуация,

когда пространственное распределение локального поля  $\mathbf{H} + \mathbf{H}_{in}$  сильно неоднородно. Вследствие этого при близком расположении частиц (например, в парном кластере) рассчитанные значения межчастичной магнитной силы существенно отличаются от тех, что предсказывает модель точечных магнитных моментов. Очевидно, что изменение внутренних сил (напряжений) должно сказываться и на макроскопических деформационных свойствах ММЭ.

Вопрос о характере взаимодействия магнитополяризующихся частиц при намагничивании важен также для понимания свойств магнитореологических суспензий (МРС). Магнитную основу этих систем составляют те же микрочастицы карбонильного железа [4–10], однако здесь матрица является не упругой, а текучей. Если в этих условиях между частицами возникает притяжение, то они сближаются друг с другом, не испытывая упругого противодействия, и минимально достижимое расстояние между магнитными поверхностями определяется лишь толщиной нанесенного на них слоя стабилизирующей добавки. Практическое использование МРС основано на их способности «затвердевать», то есть создавать начальное напряжение сдвига за счёт цепных агрегатов, образующихся при намагничивании. Очевидно, что в оценке указанного эффекта интенсивность притяжения близко расположенных частиц играет центральную роль. Между тем и применительно к МРС модель точечных магнитных моментов до сих пор остаётся самой употребительной [4, 9]. В единичных работах [11, 12], посвящённых уточнению силового взаимодействия частиц, рассмотрены лишь частные случаи ориентации межцентрового вектора относительно направления приложенного магнитного поля.

## 2. Парное магнитостатическое взаимодействие

Пусть имеется пара одинаковых сферических частиц радиусом  $a$  из линейно-поляризующегося магнетика с относительной проницаемостью  $\mu_p$ , изотропной и не зависящей от поля. Частицы находятся в бесконечном изотропном массиве с относительной проницаемостью  $\mu$  на расстоянии  $l$  друг от друга,

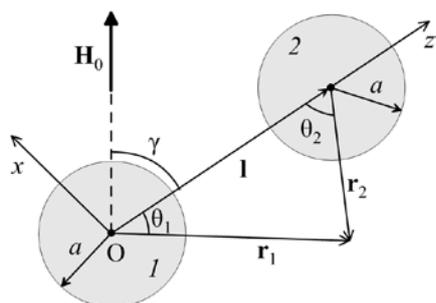


Рис. 1. Выбор систем координат задачи

вектор  $\mathbf{l}$  проведён из центра частицы 1 в центр частицы 2 (см. Рис. 1). Система помещена в однородное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ , которое направлено под углом  $\gamma$  к вектору  $\mathbf{l}$ . Вследствие отличной от нуля разности  $(\mu_p - \mu)$  каждая из частиц приобретает собственный магнитный момент и становится источником неоднородного поля, которое действует и на окружающую её матрицу, и на соседнюю частицу. Взаимная поляризация частиц создаёт в них неоднородную намагниченность, так что магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  данной частицы обусловлен не только  $\mathbf{H}_0$ , но также длиной и ориентацией вектора  $\mathbf{l}$ . Для частиц, отстоящих друг от друга на расстояние  $l \gg a$ , влияние взаимного подмагничивания мало и не зависит от направления  $\mathbf{l}$ .

Энергию такой пары можно описывать стандартным потенциалом дипольного взаимодействия, используя в нём значение  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{H}_0)$ , рассчитанное для уединённой частицы. Таким образом, главный интерес представляет случай  $l \gtrsim 2a$ , когда взаимное подмагничивание частиц значительно, и дипольное приближение становится непригодным ни для расчёта парной энергии, ни для определения межчастичных сил.

Будем характеризовать размер системы параметром  $q = l/a$  таким, что значение  $q = 2$  отвечает плотному контакту частиц. Введём в каждой из них локальную сферическую систему координат следующим образом: направим полярные оси вдоль  $\mathbf{l}$  навстречу друг другу. Через них проходит плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{H}_0$ ; эта плоскость имеет азимут  $\varphi = 0$  в каждой из локальных систем, что полностью их определяет. Укажем также полезную в дальнейшем лабораторную декартову систему. Её начало поместим в центр частицы 1, ось  $Oz$  направим вдоль межцентровой линии  $\mathbf{l}$  (она же — полярная ось) в сторону частицы 2, а ось  $Ox$  проведём в плоскости  $\varphi = 0$  перпендикулярно  $Oz$ ; соответственно ось  $Oy$  имеет азимут  $\varphi = \pi/2$ .

Задача математической физики, в которой определяется распределение магнитного поля внутри частиц и в окружающем их пространстве, формально полностью аналогична задаче определения стационарного потока тепла через бесконечный массив, содержащий пару сферических включений, теплопроводность которых отлична от теплопроводности массива. Аналитическое решение последней дано в работе [13]. Воспроизведём кратко эти результаты применительно к магнитополяризующимся частицам.

Представим внешнее однородное поле  $\mathbf{H}_0$  как сумму компонент, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна вектору  $\mathbf{l}$ , то есть полярным осям локальных систем координат. Таким образом,

в лабораторной системе  $\mathbf{H}_0$  имеет вид:  $\mathbf{H}_0 = (H_\perp, 0, H_\parallel) = (H_0 \sin \gamma, 0, H_0 \cos \gamma)$ . При свёртке в суммы удобно обозначать введённые компоненты индексом  $m$ , так что  $H_{m=0} = H_\parallel$  и  $H_{m=1} = H_\perp$ .

Решение уравнения Лапласа для скалярного магнитоэстатического потенциала рассматриваемой системы ищется в виде разложения по степеням пространственных переменных и кратным угловым гармоникам. Внутри каждой частицы (*int*) этот ряд имеет форму

$$\psi_{int}^{(k)} = -\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m d_{mn}^{(k)} \left(\frac{r_k}{a}\right)^n P_n^m(\cos \theta_k) \cos m\varphi, \quad (1)$$

а вне частиц (*ext*)

$$\psi_{ext} = -\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m \left\{ g_{mn}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta_1) + g_{mn}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta_2) \right\} \cos m\varphi; \quad (2)$$

здесь  $k = 1, 2$  — номер частицы,  $r_k$  — радиальная координата точки в системе  $k$ -й частицы,  $\mathbf{x}$  — координата точки наблюдения в лабораторной системе. Отметим, что выбор знаков в формулах (1) и (2) соответствует стандартному определению  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ , при этом  $\psi$  включает также и вклад внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ .

Подстановка потенциалов (1) и (2) в граничные условия на поверхностях частиц ( $r_k = a$ ):

$$\psi_{int}^{(k)} = \psi_{ext}, \quad \mu_p \frac{\partial \psi_{int}^{(k)}}{\partial r_k} = \mu \frac{\partial \psi_{ext}}{\partial r_k},$$

после использования формулы Хобсона

$$\left(\frac{a}{r_k}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta_k) = \left(\frac{a}{l}\right)^{n+1} \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{s+m} \left(\frac{r_{3-k}}{l}\right)^s P_s^m(\cos \theta_{3-k})$$

даёт систему линейных уравнений для коэффициентов  $d_{nm}^{(k)}$  и  $g_{nm}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} d_{mn}^{(k)} &= g_{mn}^{(k)} + \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms}^{(3-k)} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1}, \\ \alpha d_{mn}^{(k)} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) g_{mn}^{(k)} - \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms}^{(3-k)} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1} &= \frac{a}{n} \cdot (\alpha - 1) (-1)^{k(m+1)} \delta_{1n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha = \mu_p / \mu$ .

Поскольку задача симметрична относительно перестановки частиц, введём, следуя [13], безразмерную переменную

$$g_{mn} = g_{mn}^{(1)} / a = (-1)^{m+1} g_{mn}^{(2)} / a$$

и обозначим

$$\beta_n = n(\alpha - 1) / (n\alpha + n + 1). \quad (4)$$

Исключая величины  $d_{mn}^{(k)}$  из уравнений (3), получаем замкнутую систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{(-1)^{m+1}}{\beta_n} g_{mn} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1} g_{ms} = \frac{1}{n} \delta_{1n}, \quad (5)$$

решение которой удобно искать в виде рядов по степеням параметра  $1/q = a/l$ , максимальное значение которого равно 0,5.

Выразим энергию пары частиц через коэффициенты разложения скалярного магнитного потенциала  $\psi$ , см.(1) и (2). Запишем магнитный момент одной частицы в виде:

$$\mathbf{m}_k = -(\mu_p - \mu) \int_{V_k} \nabla \psi^{(k)} dV, \quad (6)$$

где  $V_k$  — объём  $k$ -й частицы. Используя (6), представим, следуя [14], энергию магнитополяризующейся частицы в форме

$$U_k = -\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}_0) = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu_p - \mu) \int_{V_k} \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi^{(k)} dV.$$

В силу перестановочной симметрии магнитные моменты частиц равны, так что для энергии пары имеем

$$U_{mag} = -\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0) = \mu_0 (\mu_p - \mu) \int \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi dV.$$

Этот интеграл вычисляется аналитически:

$$U_{mag} = -\mu_0 \mu (\alpha - 1) \int \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi dV = -\mu_0 \mu (\alpha - 1) V \left[ H_{\perp}^2 (1 - d_{11}/a) + H_{\parallel}^2 (1 + d_{01}/a) \right],$$

откуда, переходя к компонентам поля в лабораторной системе координат, получаем

$$U_{mag}(q, \gamma) = \omega_0(q) + \omega_2(q) \cos^2 \gamma, \quad (7)$$

$$\omega_0 = -\mu_0 \mu (\alpha - 1) H_0^2 V (1 - d_{11}/a), \quad \omega_2 = -\mu_0 \mu (\alpha - 1) H_0^2 V (d_{11} + d_{01})/a.$$

Как видно, зависимость энергии  $U_{mag}$  от межчастичного расстояния определяется коэффициентами  $d_{01}$  и  $d_{11}$ , которые простым образом выражаются через величины  $g_{mn}$ , удовлетворяющие системе (5). Аналитическое решение последней с точностью до  $(a/l)^9$  построено в работе [13]. Подставляя это решение в (3), а затем в (7), приходим к следующему выражению для магнитной энергии пары поляризующихся частиц во внешнем поле:

$$U_{mag} = -3\mu_0 \mu H_0^2 V \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right) \left[ 1 - \sum_{j=3}^9 \left( \frac{a}{l} \right)^j (A_j - B_j \cos^2 \gamma) \right], \quad (8)$$

где  $A_j$  и  $B_j$  суть

$$A_3 = \beta_1, \quad A_4 = A_5 = 0, \quad A_6 = -\beta_1^2, \quad A_7 = 0, \quad A_8 = -3\beta_1\beta_2, \quad A_9 = \beta_1^3,$$

$$B_3 = 3\beta_1, \quad B_4 = B_5 = 0, \quad B_6 = 3\beta_1^2, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = 6\beta_1\beta_2, \quad B_9 = 9\beta_1^3.$$

В формуле (8) сохранены оригинальные обозначения, используемые в [13]

В предельных случаях формула (8) переходит в хорошо известные выражения. Так, если намагничивающиеся сферы не влияют друг на друга, то весь ряд по степеням  $a/l$  должен быть отброшен. Тогда  $U_{mag} = -3\mu_0 \mu H_0^2 V [(\alpha - 1)/(\alpha + 2)]$ , что, как и должно быть, совпадает с удвоенным значением энергии уединённой однородно поляризованной сферы. При сохранении же только первого не исчезающего порядка по  $a/l$  имеем

$$U_{mag} = -3\mu_0 \mu H_0^2 V \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right) \left( \frac{a}{l} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 \gamma) \right].$$

Здесь второе слагаемое в квадратных скобках (с учётом коэффициента перед ними) — это парная энергия взаимодействия в дипольном приближении; как видно, взаимное влияние частиц приводит к возрастанию магнитного момента каждой из них. Уместно также отметить, что решение рассматриваемой задачи существенно упрощается, если материал частиц можно считать идеально намагничивающимся ( $\alpha \rightarrow \infty$ ): в этом случае все коэффициенты  $\beta_n$  обращаются в единицу.

### 3. Численное нахождение коэффициентов $g_{mn}$ и аппроксимация результатов

Как показало численное (методом конечных элементов) решение рассматриваемой задачи магнитостатики [15], формула (8) обеспечивает приемлемую (~1%) точность расчёта энергии  $U_{mag}$  только при расстояниях  $q \geq 3$ . Для того, чтобы с помощью рядов описать взаимодействие на меньших расстояниях, требуется знать коэффициенты  $g_{mn}$  с индексами, намного превышающими 9. Аналитический способ утрачивает здесь свою полезность из-за катастрофического роста объёма вычислений, однако численное нахождение  $g_{mn}$  трудностей не представляет. Действуя таким способом и последовательно увеличивая число членов ряда, можно убедиться в его сходимости.

В частности, для  $q = 2$  (случай плотного контакта частиц) и  $\gamma = 0$  относительное приращение энергии  $\delta = (1 - U_{mag}^{N+1} / U_{mag}^N)$  монотонно убывает с ростом числа  $N$  членов ряда. При  $N \geq 100$  величина  $\delta$  составляет менее 0,5%. В данной работе расчет выполнен при  $N = 100$ ; в результате получен массив числовых данных, представляющий собой дискретизированную запись функций  $\omega_0(q)$  и  $\omega_2(q)$  — см. (7) — в диапазоне межчастичных расстояний  $q \in [2; 6]$ . Отметим, что разбиение указанного интервала было неравномерным, плотность расчётных точек возрастала по мере приближения к  $q = 2$ .

Одной из целей настоящей работы является расчёт межчастичных магнитных сил, что предполагает вычисление производных  $U_{mag}(q, \gamma)$ . Выполнение этой операции радикально упрощается, если заменить найденный численно набор значений  $\omega_0(q)$  и  $\omega_2(q)$  компактной аппроксимационной формулой. Здесь она сконструирована из подходящих алгебраических дробей при требовании от них близости к точному результату в интервале  $2 < q < 6$  и асимптотического перехода в функции  $\omega_0$  и  $\omega_2$  дипольного приближения при  $1/q \ll 1$ :

$$U_{mag}(q, \gamma) = -\mu_0 \mu H_0^2 V \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right) \sum_{i=3}^7 \left[ \frac{a_i}{(q - b_i)^i} + \frac{c_i}{(q - d_i)^i} \cos^2 \gamma \right]; \quad (9)$$

величины коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  и показатели степени  $i$  представлены в таблице 1.

Таблица 1. Числовые параметры формулы (9)

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
3	-1	0	3	0
4	0	0	$3,42 \cdot 10^{-2}$	1,3976
5	0,111	-0,689	$2,83 \cdot 10^{-6}$	1,8947
6	0,509	0,589	$1,80 \cdot 10^{-13}$	1,9898
7	-0,424	0,592	0	0

Анализ показал, что интегральная погрешность выражения (9), оценённая по всему массиву числовых данных (он имеет максимальную плотность при  $q \sim 2$ ), не превышает 1%.

Формула (9) позволяет вычислять компоненты межчастичной магнитной силы аналитически:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{f}_n = -\frac{1}{l^2} \left( \mathbf{l} \cdot \frac{\partial U_{mag}}{\partial \mathbf{l}} \right), \quad \mathbf{f}_\tau = \frac{1}{l^2} \left( \mathbf{l} \times \left( \mathbf{l} \times \frac{\partial U_{mag}}{\partial \mathbf{l}} \right) \right) \quad (10)$$

и тем самым кардинально облегчает расчёт. Как видно из (10), вектор  $\mathbf{f}_n$  направлен вдоль межцентровой линии частиц  $\mathbf{l}$  и определяет интенсивность их притяжения / отталкивания. Другая компонента силы —  $\mathbf{f}_\tau$ , перпендикулярна  $\mathbf{l}$  и лежит в плоскости, образуемой векторами  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{l}$ ; пара сил  $\mathbf{f}_\tau$  создаёт вращающий момент

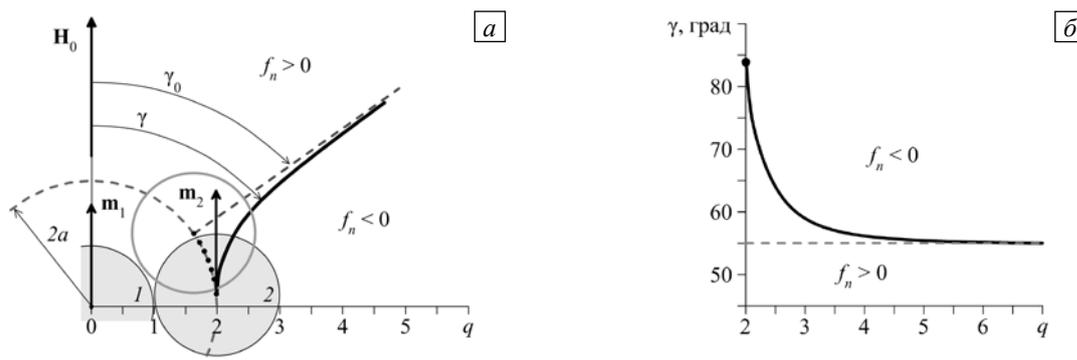
$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{f}_\tau = -\mathbf{l} \times \partial U_{mag} / \partial \mathbf{l}, \quad M = -\partial U_{mag} / \partial \gamma,$$

стремящийся ориентировать межцентровую линию пары частиц вдоль направления поля  $\mathbf{H}_0$ .

#### 4. Притяжение / отталкивание намагничивающихся частиц

Как можно было ожидать, анизотропия взаимодействия близко расположенных ( $q \gtrsim 2$ ) намагничивающихся сфер качественно отличается от той, что имеет место для таких же сфер в случае, если последние намагничены однородно. Сравним эти два случая.

Возьмём пару частиц, в которых намагничённость однородна по объёму и параллельна приложенному полю. Их взаимодействие описывается стандартным дипольным потенциалом, таким, как если бы их магнитные моменты были точечными и располагались в центрах частиц, см. [16]. Примем положение одной из частиц за начало координат. Как известно, для пары точечных диполей поверхность нулевой силы ( $f_n(q, \gamma) = 0$ ) представляет собой поверхность пары круговых конусов с углами раствора  $\gamma_0 \simeq 55^\circ$ . Конусы имеют общую вершину в центре одной из частиц, а основаниями обращены в противоположные стороны; их общей осью является направление магнитных моментов частиц. Схема сечения пары частиц плоскостью, проходящей через межцентровый вектор и векторы магнитного момента показана на рисунке 2, а. Линией нулевой силы  $f_n = 0$  (нейтральной) является образующая конуса, которая показана штриховой прямой; штриховая окружность означает частицу, центр которой лежит на нейтральной линии. Для точечных магнитных моментов любая прямая, проведённая из вершины конуса, есть направление взаимного притяжения, если она лежит внутри конуса ( $\gamma < \gamma_0$ ), и отталкивания, если проходит вне его ( $\gamma > \gamma_0$ ). Максимальное притяжение имеет место при расположении частиц «голова–хвост» ( $\gamma = 0$ ), а максимальное отталкивание — при расположении «бок о бок» ( $\gamma = 90^\circ$ ).

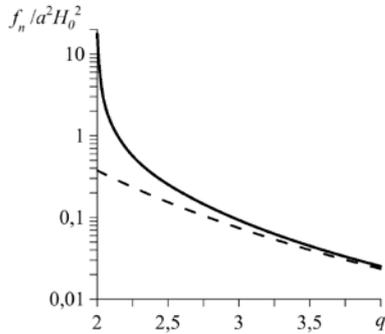


**Рис. 2.** Расположение областей взаимного притяжения/отталкивания частиц с однородной и неоднородной намагниченностью (а): штриховая прямая линия отвечает нулевой силе притяжения диполей, сплошная линия – нейтральному положению магнитополяризующихся частиц, чёрные точки – возможным положениям центра частицы в угловом интервале  $54,7^\circ < \gamma < 84,3^\circ$  при сближении соседей до  $q = 2$ ; «нейтральный» угол (б), при котором обращается в нуль межчастичная сила  $f_n$  для пары магнитополяризующихся частиц как функция расстояния между частицами (см. формулу (9)); для дипольных частиц «нейтральный» угол равен  $\gamma_0$  и не зависит от  $q$  (штриховая линия)

Теперь рассмотрим взаимодействие между двумя магнитополяризующимися частицами. В этом случае распределения локального поля и намагничённости связаны между собой, а общий вид парного потенциала взаимодействия описывает формула (7). Оттуда видно, что отличия  $U_{mag}$  от простого дипольного потенциала касаются только радиальной зависимости этой функции, её угловая зависимость сохраняет свой вид. Следовательно, угловая симметрия распределения межчастичных сил и поверхностей нулевой силы ( $f_n = 0$ ) не изменяется.

Таким образом, главный интерес представляют радиальные зависимости  $U_{mag}$  и межчастичных сил. Эти функции были рассчитаны по методике, описанной в разделе 3. Здесь имеются важные отличия, а именно: для магнитополяризующихся частиц величина силы  $f_n(q)$  вдоль линии  $\gamma = \text{const}$  не является знакоопределённой функцией межцентрового расстояния. Иными словами, взаимное притяжение может смениться взаимным отталкиванием при удалении частиц друг от друга по прямой  $\gamma = \text{const}$ , чего никогда не бывает в случае точечных диполей. Ситуацию иллюстрирует рисунок 2, а, где сплошной линией показана нейтральная кривая  $f_n(q, \gamma) = 0$  для частиц, проницаемость которых  $\mu_p$  в численном расчёте

была принята в  $10^4$  раз большей, чем проницаемость матрицы  $\mu$ . Как видно, при близком расположении частиц интервал углов  $\gamma$ , соответствующий притяжению, заметно расширен. Действительно, для магнитополяризующихся частиц взаимное притяжение имеет место при попадании центра частицы 2 в любую точку обращённой вверх области, которую образуют слева — окружность радиуса  $2a$  (обозначена штрихами) и справа — сплошная чёрная линия, полученная численным расчётом. Между тем для магнитных диполей правой границей области притяжения является штриховая прямая  $\gamma_0 = 55^\circ$ . Угловые расположения нейтральных кривых  $\gamma(q)$ , определяемых условием  $f_n(q, \gamma) = 0$ , показаны на рисунке 2, б; случаю магнитополяризующихся частиц отвечает сплошная линия, случаю магнитных диполей — штриховая.



**Рис. 3.** Сила межцентрового взаимодействия  $f_n$  при  $\gamma = 0$ , найденная численно (сплошная линия) и на основе дипольной модели (штриховая линия)

Физическая причина найденных изменений очевидна. Магнитополяризующиеся частицы при сближении всё сильнее намагничивают друг друга, так что на малых расстояниях сила их взаимодействия резко возрастает. На рисунке 3 сопоставлены силы притяжения для таких частиц и магнитных диполей в конфигурации «голова–хвост» ( $\gamma = 0$ ). Видно, что рост  $f_n$ , по сравнению с дипольной моделью, становится заметным уже при  $q \sim 3,5$ , а при  $q \sim 2,5$  достигает многих десятков процентов. В условиях плотного контакта ( $q = 2$ ) значение  $f_n$  для пары магнитополяризующихся частиц оказывается примерно в 50 раз большим, чем для пары дипольных. Иными словами, в области  $q \gtrsim 2$  функция  $f_n(q)$  при уменьшении своего аргумента растёт гораздо быстрее, чем дипольная сила  $f_n \sim q^{-4}$ .

### 5. Упругая энергия пары частиц

В мягком магнитном эластомере изменение конфигурации пары частиц, вызванное намагничиванием, является результатом конкуренции между магнитными и упругими силами. Получив выше оценки для магнитной энергии и сил, определим теперь упругую энергию, которая необходима для того, чтобы изменить относительное расположение двух частиц, находящихся в эластомерной матрице в условиях полной адгезии к ней.

Рассмотрим случай  $\gamma = 0$ , то есть ситуацию, когда магнитные силы притяжения максимальны. Используем введённую ранее лабораторную систему координат, в которой ось  $Oz$  совпадает с межцентровым вектором  $\mathbf{I}$ . В ней перемещение частицы 1 задаётся вектором  $\mathbf{u}_1 = (0, 0, -u)$ , а частицы 2 — вектором  $\mathbf{u}_2 = (0, 0, u)$ , то есть предполагается, что упругая энергия  $U_e$ , накапливающаяся в полимерной матрице, зависит только от величины смещения  $u$ .

Учитывая способность ММЭ к значительным деформациям, будем описывать полимерную матрицу моделью Муни–Ривлина, соответствующей материалу с малой, но конечной сжимаемостью. В этом случае выражение для упругого потенциала имеет вид

$$W = c_1 \left[ (J^{-2/3} I_1(\mathbf{C}) - 3) + \tilde{c}_2 (J^{-4/3} I_2(\mathbf{C}) - 3) + \tilde{K} / 2 (J - 1)^2 \right],$$

где  $I_1, I_2, I_3$  — инварианты меры деформации Коши–Грина  $\mathbf{C}$ , связанной с тензором деформации Грина  $\mathbf{E}$  соотношением  $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$ ; здесь  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, а  $J = \sqrt{I_3(\mathbf{C})}$  — якобиан. Для числовых констант модели выберем значения  $\tilde{c}_2 = 0,1$  и  $\tilde{K} = 10^3$ , тем самым конкретизируем предположение о слабой сжимаемости.

Расчёт упругой энергии, обусловленной смещением частиц, производился с помощью пакета SfePy (Simple finite elements in Python), специализированного для решения 3D задач методом конечных элементов. В качестве модели ММЭ был взят куб с ребром  $d$ , в котором находились две одинаковые сферические полости («дырки»), расположенные вдоль линии, проведённой через центры противоположащих граней. Для удобства записи оси  $Ox$  и  $Oy$  лабораторной системы координат выбраны параллельными граням куба.

Задача исследования конечных деформаций гиперупругого тела формулировалась в отсчётной конфигурации в предположении о наличии симметрии  $x \leftrightarrow x$  и  $y \leftrightarrow y$ :

$$\int_{\Omega_0} c_1 [\tilde{\mathbf{S}}_{eff}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{K}}(J-1)\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] \cdot \delta \mathbf{E} dV = 0, \quad (11)$$

$\Omega_0$  — начальный объём образца, что позволило решать её для четверти куба ( $x > 0, y > 0$ ) при выполнении условий

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1 = (0, 0, -u), \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_2 = (0, 0, u), \quad \mathbf{u}_x|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{u}_y|_{y=0} = 0.$$

Эффективные напряжения в (11) определялись согласно формуле

$$\tilde{\mathbf{S}}_{eff}(\mathbf{u}) = 2J^{-2/3} \left[ I - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \right] + 2\tilde{c}_2 J^{-4/3} \left[ I_1(\mathbf{C})I - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2(\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \right].$$

Перемещения точек, лежащих на поверхностях «дырок», задавались постоянными векторами  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  (см. выше), так что форма и объём «дырок» оставались неизменными. Очевидно, что по своему воздействию на окружающую матрицу такая «дырка» полностью эквивалентна твёрдой частице того же радиуса  $a$ .

В расчётах величина перемещения  $u$  изменялась дискретно от нуля до максимума, соответствующего плотному контакту частиц. На каждом шаге по  $u$ , решая упругую задачу, получали поле перемещений, по которому затем вычисляли меру деформации Коши–Грина и объёмную плотность энергии  $W$ . Затем интегрированием находили упругую энергию всего образца:  $U_{el} = \int W dV$ . Исходным варьируемым параметром было расстояние  $l_0$ , разделяющее центры частиц («дырок»); по нему задавался размер модельного образца:  $d = 4(l_0 + 2a)$ . При проведении вычислений был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург). В результате был получен массив значений энергии  $U_{el}$  в зависимости от безразмерных значений начального —  $q_0 = l_0/a$ , и конечного —  $q = l/a$ , расстояний между частицами. Практика вычислений показала, что основными параметрами, влияющими на точность, являются размер элемента сетки на границе отверстия —  $s_1$ , и размер элемента на внешней границе расчётной области —  $s_2$ . Как следует из общих соображений, сетку необходимо сгущать вокруг частиц, то есть там, где неоднородность упругих полей максимальна. Однако повышение плотности сетки означает рост затрат вычислительных ресурсов. Для достижения баланса между этими двумя условиями с учетом доступных вычислительных ресурсов была выбрана сетка с параметрами:  $s_1 = 0,05a$ ,  $s_2 = 0,4d$ .

## 6. Экстраполяция результатов

Так же, как в случае магнитной энергии, построим для числового массива  $U_{el}(q_0, q)$  аппроксимирующее его аналитическое выражение. Используем для этого эвристическую модель, показанную на рисунке 4. Пусть к каждой частице с противоположных сторон прикреплены две абсолютно жёсткие пластины, одна из которых имеет ступенчатую форму. Между ступенчатыми пластинами вставлены три несжимаемых стержня цилиндрического сечения. Самый короткий стержень (1) имеет радиус  $r_1$  и длину  $l_1 = h_0$ , где  $h_0 = l_0 - 2a$ , а его ось располагается на оси координат  $Oz$ . Два других «внутренних» стержня (2), оба радиусами  $r_2$  и длинами  $l_2 = h_0 + a$  — расположены по обе стороны от центрального параллельно ему. Жёсткие пластинки, между которыми заключены стержни, обеспечивают однородное сжатие последних при сближении частиц. Кроме того (см. Рис. 4), через жесткую пластинку к каждой из частиц присоединён упругий стержень (3), направленный вдоль  $Oz$ . Обозначим длины

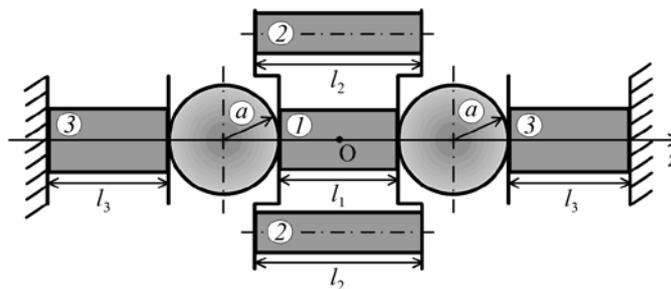


Рис. 4. Стержневая модель для построения интерполяции упругой энергии

этих «внешних» стержней через  $l_3 = h_0$ , а их радиусы — через  $r_3$ . Наружные торцы стержней 3 находятся в контакте с неподвижными стенками, причём отрыв от стенки в нормальном направлении запрещён.

При сближении частиц стержни 1 и 2 будут сжиматься, а стержни 3 — растягиваться, претерпевая относительные деформации  $\lambda$ , которые простым образом выражаются через смещение  $u$ :  $\lambda_1 = \frac{l_1 - 2u}{l_1} = \frac{h_0 - 2u}{h_0}$ ,  $\lambda_2 = \frac{l_2 - 2u}{l_2} = \frac{h_0 + 1 - 2u}{h_0 + 1}$ ,  $\lambda_3 = \frac{l_3 + u}{l_3} = \frac{h_0 + u}{h_0}$ . Эти соотношения позволяют рассчитать для каждого стержня меру деформации Коши–Грина

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{ii} + \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{jj} + \lambda_n^2 \mathbf{kk} \quad (n = 1, 2, 3),$$

а по ней — упругие потенциалы стержней в модели несжимаемого материала Муни–Ривлина:

$$W = c_1 [(I_1(\mathbf{C}_n) - 3) + \tilde{c}_2 (I_2(\mathbf{C}_n) - 3)],$$

где инварианты суть  $I_1(\mathbf{C}_n) = 2/\lambda_n + \lambda_n^2$  и  $I_2(\mathbf{C}_n) = 1/\lambda_n^2 + 2\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ). Поскольку объём каждого стержня равен  $V_n = \pi r_n^2 l_n$ , упругая энергия всей конструкции составляет

$$U_{el} = \pi r_1^2 l_1 W(\lambda_1) + 2\pi r_2^2 l_2 W(\lambda_2) + 2\pi r_3^2 l_3 W(\lambda_3). \quad (12)$$

Роль параметров аппроксимации в формуле (12) играют радиусы стержней. Их безразмерные числовые значения для некоторых исходных межчастичных расстояний при  $\tilde{c}_2 = 0,1$  приведены в таблице 2.

Таблица 2. Числовые параметры формулы (12) при  $\tilde{c}_2 = 0,1$

$q_0$	$r_1/a$	$r_2/a$	$r_3/a$
2,5	$1,3 \cdot 10^{-2}$	0,76	0
3,0	$2,3 \cdot 10^{-2}$	0,60	0,61
3,5	$2,6 \cdot 10^{-2}$	0,49	0,97
4,0	$2,5 \cdot 10^{-2}$	0,43	1,21

Предложенная аппроксимация удовлетворительным образом (с погрешностью не более 1%) описывает все полученные числовые данные для межчастичных расстояний более  $2,5a$ . Этот факт позволил применить формулу (12) для оценки упругой энергии матрицы в области  $q \gtrsim 2$ , где прямой численный расчёт теряет устойчивость.

## 7. Бистабильные состояния

Найдём полную энергию рассматриваемой пары магнитополяризующихся частиц в конфигурации «голова–хвост», то есть при  $\gamma = 0$ . Суммируя магнитный (9) и упругий (12) вклады в энергию и переходя к безразмерной форме, имеем

$$\bar{U} = U/(c_1 a^3) = \tilde{H}_0^2 [\omega_0(q) + \omega_2(q)] + \pi [r_1^2 l_1 \tilde{W}(\lambda_1) + 2r_2^2 l_2 \tilde{W}(\lambda_2) + 2r_3^2 l_3 \tilde{W}(\lambda_3)], \quad (13)$$

где  $\tilde{W} = W/c_1 = I_1(\mathbf{C}_n) - 3 + \tilde{c}_2 (I_2(\mathbf{C}_n) - 3)$  и введён параметр  $\tilde{H}_0 = H_0/\sqrt{c_1}$ . Очевидно, что минимум магнитной составляющей выражения (13) достигается при плотном контакте частиц ( $\lambda_{1,2} \rightarrow 0$ ), в то время как упругая энергия минимальна в отсутствие деформаций ( $\lambda_{1,2,3} = 1$ ).

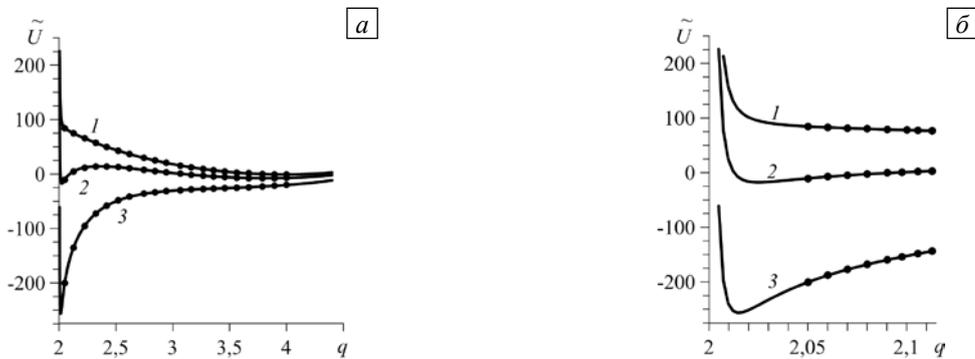
Как указано в разделе 1, средний диаметр частиц магнитного наполнителя в типичных ММЭ составляет единицы микронов. Тепловое движение объектов такого размера в полимерной матрице чрезвычайно слабо. Поэтому те конфигурации пары частиц, в которых упругие и магнитные силы находятся в равновесии, можно определить, находя минимумы энергетической функции  $\tilde{U}(q_0, \tilde{H}_0)$ . Положения этих минимумов для нескольких значений приложенного поля можно увидеть из рисунка 5.

В ситуации, когда внешнее поле является слабым, малы и вызываемые им деформации. Получим оценку смещения частиц, полагая для простоты, что напряжения в матрице подчиняются

закону Гука, а межчастичные магнитные силы можно описывать дипольной моделью. Выполняя расчёт, аналогичный приведённому в [17], и приписывая магнитному материалу высокую магнитную проницаемость, находим:  $q = q_0 \left[ 1 - 96\pi^2 \mu_0 (a/l_0)^6 \tilde{H}_0^2 \right]$ , откуда следует, что в слабом поле система всегда имеет единственный минимум энергии, соответствующий малому сближению частиц. Этот случай иллюстрирует кривая 1 на рисунке 5, а.

С усилением поля намагниченность частиц повышается, и межчастичные силы растут. Это приводит к качественному изменению ситуации: наряду с равновесным состоянием при слабом сжатии появляется второй минимум энергии, означающий возможность тесного сближения частиц, сопровождаемого, очевидно, сильной деформацией матрицы (кривая 2, Рис. 5, а). Возникшая бистабильность системы существует в некотором интервале значений поля, но при дальнейшем увеличении последнего минимум энергии при малых смещениях исчезает, и сильно сжатая (кластерная) конфигурация (кривая 3) становится безальтернативной. Для пары в состоянии кластера межчастичное расстояние слабо зависит от величины поля, что хорошо видно из рисунка 5, б, где потенциальные кривые представлены в увеличенном по сравнению с рисунком 5, а масштабе по оси  $q$ .

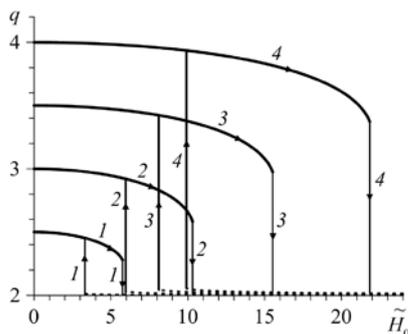
Отметим, что использование аппроксимации (12) для  $U_{el}$  в области  $q \sim 2$ , для которой нет данных численного расчёта, создаёт некоторую неопределённость в количественных характеристиках энергетических минимумов, соответствующих состоянию кластера. Однако в качественном отношении поведение кривых рисунка 5 не вызывает сомнения.



**Рис. 5.** Зависимость полной энергии системы от межчастичного расстояния (а) и в области vicinity  $q=2$  (б); начальное расстояние  $q_0 = 4$ , значения поля  $\tilde{H}_0$ : 5 (кривая 1), 15 (2), 25 (3); параметр модели Муни-Ривлина  $\tilde{c}_2 = 0,1$ ; точками показаны значения  $\tilde{U}$ , найденные с использованием численного расчёта

Бистабильность означает, что переходы между альтернативными равновесными конфигурациями пары частиц при изменении поля совершаются гистерезисным образом. Пусть, например, после включения слабого поля система «частицы–матрица» отреагировала на это деформацией  $l_0 - l \ll l_0$ . При возрастании поля это состояние будет сохранять устойчивость, несмотря на появление второго минимума энергии, поскольку флуктуационные возмущения пренебрежимо малы. Слабо сжатая конфигурация разрушится лишь по достижении полем значения, при котором «дальний» минимум энергии  $\tilde{U}$  исчезает — ср. кривые 2 и 3 на рисунке 5, а. В результате произойдёт скачкообразный переход системы в состояние, соответствующее единственному оставшемуся («ближнему») минимуму энергии, при котором частицы образуют парный кластер. Проводя аналогичные рассуждения, легко понять, что скачкообразный характер будет иметь и восстановление исходной конфигурации пары частиц при уменьшении поля.

Гистерезис межчастичного расстояния пары при циклическом изменении поля показан на рисунке 6.



**Рис. 6.** Стационарное значение расстояния между частицами, занимающими конфигурацию  $\mathbf{1} \parallel \mathbf{H}_0$  («голова–хвост»), в зависимости от величины приложенного поля при различных начальных межчастичных расстояниях  $q_0$ : 2,5 (кривая 1), 3 (2), 3,5 (3) и 4 (4) и упругой константе  $\tilde{c}_2 = 0,1$ ; стрелками показаны направления смещения частиц при циклическом намагничивании системы, пунктирными линиями – участки, полученные с помощью экстраполяции

Вертикальные участки каждой петли ограничивают области бистабильности пары на оси  $\tilde{H}_0$ . Ветви функции  $q(\tilde{H}_0)$ , прилегающие к оси  $\tilde{H}_0$  — они описывают состояние парного кластера — проведены пунктирными линиями, поскольку рассчитаны по экстраполяционной формуле.

## 8. Выводы

Способность различных магнитоупругих систем проявлять бистабильность, в принципе, хорошо известна. Результаты, полученные в настоящей работе, подтверждают наличие этого свойства у рассматриваемой модели — пары магнитополяризующихся частиц, заключённых в упругий массив. Как выяснилось, для этой системы бистабильность возникает лишь в определённом интервале полей. При этом переход между стационарными конфигурациями характеризуется заметным изменением межчастичного расстояния. В частности, с ростом поля происходит фактический коллапс частиц: они объединяются в плотный парный кластер. В дальнейшем планируется уточнить этот вывод количественно, а также проследить, как отражается мезоскопическая бистабильность парных кластеров на макроскопических свойствах ММЭ. Понимание этого должно пролить свет на целый ряд экспериментальных результатов. Дело в том, что различные измерения, а именно видеофиксация перемещения частиц ММЭ на поверхности образца при его намагничивании, наблюдения квазипластического поведения в механических испытаниях и им подобные указывают на то, что в ММЭ частицы группируются в «магнитные скрепки». Главными кандидатами на эту роль как раз и являются образовавшиеся при намагничивании образца плотные группы (кластеры) из двух-трёх частиц [17]. В результате материал претерпевает значительную структурную перестройку, которая радикально изменяет его макроскопическую реологию.

Отметим также важность образования кластеров для физики и механики магнитореологических суспензий (МРС). В этих системах магнитные микрочастицы — как правило, высокодисперсное карбонильное железо — взвешены в жидкости и, следовательно, сохраняют свободу пространственного перемещения. Приложение поля заставляет частицы группироваться в цепочечные агрегаты, которые «прорастают» через весь слой МРС. После формирования цепей система приобретает способность сопротивляться сдвиговому напряжению, то есть становится квазитвёрдой. При выключении поля индуцированные магнитные моменты частиц пропадают, и МРС восстанавливает свою текучесть. Ввиду высокой намагниченности насыщения железа, МРС хорошо отверждаются уже в полях умеренной величины, что обеспечивает им широкий спектр приложений в технике: муфты сцепления и торможения, успокоители вибраций, различные гидравлические устройства и другие.

Морфология намагниченных МРС хорошо известна. Характерная особенность возникающих структур — это наличие цепочечных агрегатов (тяжей), которые в поперечном сечении содержат не одну, а несколько частиц. Попытка объяснить строение тяжей с помощью моделей, основанных на приближении точечных магнитных моментов, наталкивается на значительные трудности. Действительно, частицы с параллельно направленными магнитными моментами, расположенные преимущественно «бок о бок», должны испытывать, скорее, взаимное отталкивание, чем притяжение. Продемонстрированное выше расширение углового интервала, внутри которого намагничивающиеся частицы с параллельными магнитными моментами притягиваются друг к другу, позволяет, по крайней мере, качественно объяснить формирование агрегатов, содержащих в поперечном сечении несколько частиц. Кроме того, обратившись к механике МРС, можно увидеть, что такой важнейший инженерный параметр, как величина начального напряжения сдвига в намагниченном слое материала, определяется из решения задачи разрыва цепочки частиц под влиянием сдвиговой деформации. Найденная в данной работе перенормировка силы между близко лежащими частицами способна в количественном отношении существенно изменить результаты стандартного подхода, который использует приближение точечных диполей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума УрО РАН № 10 (проект № 12-П-1-1018), РФФИ (проекты № 11-02-96000 и 13-01-96056) и Министерства образования и науки Пермского края (соглашение № С-26/617).

## Литература

1. Jolly M.R., Carlson J.D., Muñoz B.C. A model of the behaviour of magnetorheological materials // *Smart Mater. Struct.* – 1996. – Vol. 5, No. 5. – P. 607-614. DOI
2. Diguët G., Beaugnon E., Cavaille J.Y. From dipolar interactions of a random distribution of ferromagnetic particles to magnetostriction // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2009. – Vol. 321, No. 5. – P. 396-401. DOI
3. Han Y., Hong W., Faidley L.E. Field-stiffening effect of magneto-rheological elastomers // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – Vol. 50, No. 14-15. – P. 2281-2288. DOI
4. Shkel Y.M., Klingenberg D.J. Magnetorheology and magnetostriction of isolated chains of nonlinear magnetizable spheres // *J. Rheology.* – 2001. – Vol. 45, No. 2. – P. 351-368. DOI
5. Genç S., Phulé P.P. Rheological properties of magnetorheological fluids // *Smart Mater. Struct.* – 2002. – Vol. 11, No. 1. – P. 140-156. DOI

6. Peng X., Li H. Analysis of the magnetomechanical behavior of MRFs based on micromechanics incorporating a statistical approach // *Smart Mater. Struct.* – 2007. – Vol. 16, No. 6. – P. 2477-2482. DOI
7. Olabi A.G., Grunwald A. Design and applications of magneto-rheological fluid // *Mater. Design.* – 2007. – Vol. 28, No. 10. – P. 2658-2664. DOI
8. Park B.J., Fang F.F., Choi H.J. Magnetorheology: materials and application // *Soft Matter.* – 2010. – Vol. 6, No. 21. – P. 5246-5253. DOI
9. De Vicente J., Klingenberg D.J., Hidalgo-Alvarez R. Magnetorheological fluids: a review // *Soft Matter.* – 2011. – Vol. 7, No. 8. – P. 3701-3710. DOI
10. Segovia-Gutiérrez J.P., Berli C.L.A., de Vicente J. Nonlinear viscoelasticity and two-step yielding in magnetorheology: A colloidal gel approach to understand the effect of particle concentration // *J. Rheol.* – 2012. – Vol. 56, No. 6. – P. 1429-1439. DOI
11. Borcea L., Bruno O. On the magneto-elastic properties of elastomer-ferromagnet composites // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2001. – Vol. 49, No. 12. – P. 2877-2919. DOI
12. Bossis G., Lacis S., Meunier A., Volkova O. Magnetorheological fluids // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2002. – Vol. 252. – P. 224-228. DOI
13. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1973. – Vol. 335, No. 1602. – P. 355-367. DOI
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
15. Коновалова А.М., Столбов О.В., Райхер Ю.Л. Взаимодействие неоднородно намагниченных частиц, заключенных в эластомер // 7 Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела: Сб. статей, Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013 г. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2013. – Ч. 2. – С. 26-30.
16. Багаев В.Н., Бувевич Ю.А., Тетюхин В.В. К теории магнитоэлектростатического взаимодействия и структурообразования в дисперсных системах // *Магнитная гидродинамика.* – 1986. – № 2. – С. 35-40.
17. Melenev P.V., Rusakov V.V., Raikher Yu.L. Magnetic behavior of in-plane deformable dipole clusters // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2006. – Vol. 300, No. 1. – P. e187-e190. DOI

## References

1. Jolly M.R., Carlson J.D., Muñoz B.C. A model of the behaviour of magnetorheological materials. *Smart Mater. Struct.*, 1996, vol. 5, no. 5, pp. 607-614. DOI
2. Diguët G., Beaunon E., Cavaillé J.Y. From dipolar interactions of a random distribution of ferromagnetic particles to magnetostriction. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2009, vol. 321, no. 5, pp. 396-401. DOI
3. Han Y., Hong W., Faidley L.E. Field-stiffening effect of magneto-rheological elastomers. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 14-15, pp. 2281-2288. DOI
4. Shkel Y.M., Klingenberg D.J. Magnetorheology and magnetostriction of isolated chains of nonlinear magnetizable spheres. *J. Rheology*, 2001, vol. 45, no. 2, pp. 351-368. DOI
5. Genç S., Phulé P.P. Rheological properties of magnetorheological fluids. *Smart Mater. Struct.*, 2002, vol. 11, no. 1, pp. 140-156. DOI
6. Peng X., Li H. Analysis of the magnetomechanical behavior of MRFs based on micromechanics incorporating a statistical approach. *Smart Mater. Struct.*, 2007, vol. 16, no. 6, pp. 2477-2482. DOI
7. Olabi A.G., Grunwald A. Design and applications of magneto-rheological fluid. *Mater. Design.*, 2007, vol. 28, no. 10, pp. 2658-2664. DOI
8. Park B.J., Fang F.F., Choi H.J. Magnetorheology: materials and application. *Soft Matter.*, 2010, vol. 6, no. 21, pp. 5246-5253. DOI
9. De Vicente J., Klingenberg D.J., Hidalgo-Alvarez R. Magnetorheological fluids: a review. *Soft Matter.*, 2011, vol. 7, no. 8, pp. 3701-3710. DOI
10. Segovia-Gutiérrez J.P., Berli C.L.A., de Vicente J. Nonlinear viscoelasticity and two-step yielding in magnetorheology: A colloidal gel approach to understand the effect of particle concentration. *J. Rheol.*, 2012, vol. 56, no. 6, pp. 1429-1439. DOI
11. Borcea L., Bruno O. On the magneto-elastic properties of elastomerferromagnet composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 49, no. 12, pp. 2877-2919. DOI
12. Bossis G., Lacis S., Meunier A., Volkova O. Magnetorheological fluids. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2002, vol. 252, pp. 224-228. DOI
13. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1973, vol. 335, no. 1602, pp. 355-367. DOI
14. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Electrodynamics of continuous media*. Course of theoretical physics, vol. 8. Pergamon Press, 1960.
15. Konovalova A.M., Stolbov O.V., Raikher Yu.L. Vzaimodeistvie neodnorodno namagnichennykh chastits, zakliuchennykh v elastomer [The Interaction of magnetized particles embedded in an elastomer]. *7th Russian Conference on Solid Mechanics 15-18 October 2013, Rostov-on-Don, Southern Federal University publ., 2013. Part 2, pp. 26-30.*
16. Bagaev V.N., Buevich Yu.A., Tetyukhin V.V. Theory of magnetostatic interaction and structuring in dispersed systems. *Magnetohydrodynamics*, 1986, no. 2, pp. 146-150.
17. Melenev P.V., Rusakov V.V., Raikher Yu.L. Magnetic behavior of in-plane deformable dipole clusters. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2006, vol. 300, no. 1, pp. e187-e190. DOI

Поступила в редакцию 10.01.2014; опубликована в электронном виде 31.03.2014

## Сведения об авторах

Биллер Анастасия Михайловна, асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; E-mail: kam@icmm.ru

Столбов Олег Валерьевич, кфмн, нс, ИМСС УрО РАН; E-mail: sov@icmm.ru

Райхер Юрий Львович, дфмн, проф., ИМСС УрО РАН; E-mail: raikher@icmm.ru