

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.6

УДК 539.374

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В БЛОЧНОЙ СРЕДЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ КОНТИНУУМА КОССЕРА

В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.А. Похабова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Российская Федерация

В структурно-неоднородных средах, состоящих из большого числа упругих блоков, которые взаимодействуют между собой через податливые прослойки, процессы распространения волн напряжений и деформаций приближенно описываются уравнениями континуума Коссера. При малой толщине прослоек применима классическая теория изотропного континуума. С увеличением толщины проявляется эффект анизотропии, который учитывается в рамках теории ортотропного моментного континуума.

Ключевые слова: динамика, упругость, анизотропия, блочная среда, податливая прослойка, континуум Коссера, параллельный вычислительный алгоритм

MODELING OF ELASTIC WAVES IN A BLOCK MEDIUM BASED ON EQUATIONS OF THE COSSERAT CONTINUUM

V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya and M.A. Pokhabova

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation

Based on the equations of the dynamics of piecewise-homogeneous elastic media, parallel computational algorithms are developed to simulate the process of stress and strain wave propagation in a medium consisting of a large number of blocks interacting through compliant interlayers. Computations of waves caused by localized impulsive perturbations show that such a medium can be considered as isotropic only in the case of sufficiently thin interlayers. In the case of relatively thick interlayers, the anisotropy effects are observed which consist in the appearance of elongated wave fronts along the coordinate directions and characteristic oscillations of velocities and stresses because of the rotational motion of blocks. For the description of waves in a block medium with thin interlayers, the equations of the isotropic Cosserat continuum are applicable. As the thickness of interlayers increases, the orthotropic couple-stress continuum theory which takes into account the symmetry of elastic properties relative to the coordinate planes can be applied. By comparing the elastic wave velocities in the framework of piecewise-homogeneous model and continuum model and the compliance coefficients of the material in the special schemes of quasistatic deformation with uniform block rotation and with internal curvature formation due to an inhomogeneous rotation, simple formulas are obtained to estimate the mechanical parameters of the orthotropic Cosserat continuum modeling a block medium.

Key words: dynamics, elasticity, anisotropy, block medium, compliant interlayer, Cosserat continuum, parallel computational algorithm

1. Математическая модель блочной среды

Модель упругой блочной среды с податливыми прослойками служит для расчета деформационных и прочностных характеристик кирпичной кладки [1, 2]. Также с ее помощью можно изучать волновые процессы в грунтах и горных породах, имеющих структурно-неоднородное (блочно-иерархическое) строение [3–6]. Конечная цель развиваемого авторами настоящей статьи подхода состоит в разработке на основе этой модели надежных вычислительных алгоритмов для оценки распространения волн напряжений и деформаций в блочных средах с учетом сложных реологических свойств материала прослоек. Рассмотрен простейший случай упругого материала прослоек. Созданные алгоритмы допускают распараллеливание и реализованы в виде компьютерных программ для многопроцессорных вычислительных систем кластерной архитектуры. При большом числе блоков в плоской постановке выполнены расчеты, демонстрирующие анизотропию блочной среды даже при достаточно малой толщине прослоек. Полученные результаты служат обоснованием гипотезы, согласно которой процессы распространения волн в многоблочной среде можно приближенно описывать уравнениями ортотропного континуума Коссера, учитывающими несимметрию тензора напряжений, связанную с вращательным движением блоков, и моментные напряжения, обусловленные искривлением регулярной блочной структуры вследствие неоднородности вращений.

В рамках теории моментного континуума деформирование блочной среды с тонкими прослойками исследуется в [7]. Приведенные ниже результаты детальных расчетов показывают, что с увеличением толщины прослоек существенное влияние оказывают эффекты анизотропии; использование же изотропной континуальной модели приводит к количественно и качественно неверным результатам.

Рассмотрим плоское деформирование массива, образованного упругими прямоугольными блоками со сторонами h_1 , h_2 , параллельными осям x_1 , x_2 декартовой системы координат, и межблочными прослойками с толщинами δ_1 , δ_2 . Блоки в массиве нумеруются парами индексов k_1, k_2 , пробегающих

значения от 1 до N_1 и от 1 до N_2 соответственно. Движение каждого из блоков подчиняется системе уравнений однородной изотропной упругой среды:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_1 &= \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, & \rho \dot{v}_2 &= \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}, & \dot{\sigma}_{12} &= \rho c_2^2 (v_{2,1} + v_{1,2}), \\ \dot{\sigma}_{11} &= \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{2,2}, & \dot{\sigma}_{22} &= \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{1,1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: ρ — плотность материала блока; c_1 и c_2 — скорости продольных и поперечных упругих волн; точка над символом означает производную по времени, индекс после запятой — производную по следующей за ней пространственной переменной. Система записана относительно проекций вектора скорости v_k и компонент тензора напряжений σ_{jk} .

Напряженно-деформированное состояние горизонтальной упругой прослойки между соседними блоками с номерами (k_1, k_2) и (k_1+1, k_2) представляется обыкновенными дифференциальными уравнениями, учитывающими ее массу, а также продольную и поперечную жесткости:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, & \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ + \dot{\sigma}_{11}^-}{2} &= \rho' c_1'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \\ \rho' \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, & \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} &= \rho' c_2'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ' , c_1' и c_2' — плотность материала прослоек и скорости продольных и поперечных волн в них. Вертикальная прослойка между блоками с номерами (k_1, k_2) и (k_1, k_2+1) описывается уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, & \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} &= \rho' c_1'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}, \\ \rho' \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2}, & \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} &= \rho' c_2'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Индексы « \pm » относятся к границам взаимодействующих блоков — верхнего (+) и нижнего (–) в уравнениях (2), правого (+) и левого (–) в уравнениях (3). Аналогичные уравнения применялись в одномерной модели слоистой среды [8].

Можно показать, что уравнения (2), (3) термодинамически согласованы с системой (1), то есть для блочной структуры в целом выполняется закон сохранения энергии, согласно которому кинетическая и потенциальная энергии представляют собой суммы кинетических и потенциальных энергий блоков и прослоек. При учете вязкоупругой деформации прослоек эти уравнения могут быть заменены более общими соотношениями, учитывающими постулируемую реологическую схему материала прослоек [8].

2. Численная реализация модели

Для численного решения системы уравнений (1)–(3) при заданных начальных данных и граничных условиях разработан параллельный вычислительный алгоритм, в котором реализуется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным. Для блоков среды двуциклическое расщепление предполагает, что на каждом шаге по времени Δt решение одномерных систем проходит четыре последовательных стадии; на каждой стадии системы распадаются на две независимые подсистемы, соответствующие продольным и поперечным волнам:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_1^{(1)} &= \sigma_{11,1}^{(1)}, & \dot{\sigma}_{11}^{(1)} &= \rho c_1^2 v_{1,1}^{(1)}, & \dot{\sigma}_{22}^{(1)} &= \rho (c_1^2 - 2c_2^2) v_{1,1}^{(1)}, & \rho \dot{v}_2^{(1)} &= \sigma_{12,1}^{(1)}, & \dot{\sigma}_{12}^{(1)} &= \rho c_2^2 v_{2,1}^{(1)}, \\ \rho \dot{v}_2^{(2)} &= \sigma_{22,2}^{(2)}, & \dot{\sigma}_{22}^{(2)} &= \rho c_1^2 v_{2,2}^{(2)}, & \dot{\sigma}_{11}^{(2)} &= \rho (c_1^2 - 2c_2^2) v_{2,2}^{(2)}, & \rho \dot{v}_1^{(2)} &= \sigma_{12,2}^{(2)}, & \dot{\sigma}_{12}^{(2)} &= \rho c_2^2 v_{1,2}^{(2)}, \\ \rho \dot{v}_2^{(3)} &= \sigma_{22,2}^{(3)}, & \dot{\sigma}_{22}^{(3)} &= \rho c_1^2 v_{2,2}^{(3)}, & \dot{\sigma}_{11}^{(3)} &= \rho (c_1^2 - 2c_2^2) v_{2,2}^{(3)}, & \rho \dot{v}_1^{(3)} &= \sigma_{12,2}^{(3)}, & \dot{\sigma}_{12}^{(3)} &= \rho c_2^2 v_{1,2}^{(3)}, \\ \rho \dot{v}_1^{(4)} &= \sigma_{11,1}^{(4)}, & \dot{\sigma}_{11}^{(4)} &= \rho c_1^2 v_{1,1}^{(4)}, & \dot{\sigma}_{22}^{(4)} &= \rho (c_1^2 - 2c_2^2) v_{1,1}^{(4)}, & \rho \dot{v}_2^{(4)} &= \sigma_{12,1}^{(4)}, & \dot{\sigma}_{12}^{(4)} &= \rho c_2^2 v_{2,1}^{(4)}. \end{aligned}$$

Начальные значения скоростей и напряжений на стадиях расщепления и искомое решение на новом временном слое $t + \Delta t$ определяются по формулам:

$$v_k^{(1)}(t) = v_k(t), \quad \sigma_{jk}^{(1)}(t) = \sigma_{jk}(t),$$

$$\begin{aligned}
v_k^{(2)}(t) &= v_k^{(1)}(t + \Delta t/2), & \sigma_{jk}^{(2)}(t) &= \sigma_{jk}^{(1)}(t + \Delta t/2), \\
v_k^{(3)}(t + \Delta t/2) &= v_k^{(2)}(t + \Delta t/2), & \sigma_{jk}^{(3)}(t + \Delta t/2) &= \sigma_{jk}^{(2)}(t + \Delta t/2), \\
v_k^{(4)}(t + \Delta t/2) &= v_k^{(3)}(t + \Delta t), & \sigma_{jk}^{(4)}(t + \Delta t/2) &= \sigma_{jk}^{(3)}(t + \Delta t), \\
v_k(t + \Delta t) &= v_k^{(4)}(t + \Delta t), & \sigma_{jk}(t + \Delta t) &= \sigma_{jk}^{(4)}(t + \Delta t).
\end{aligned}$$

Одномерные системы в блоках решаются на основе схемы распада разрыва С.К. Годунова. Используется равномерная сетка с предельно допустимым по условию Куранта–Фридрихса–Леви шагом по времени. При таком выборе шага схема для продольных волн не обладает искусственной (вносимой за счет аппроксимации) диссипацией энергии и поэтому нефизичное затухание амплитуд волн по мере их прохождения отсутствует. Чтобы понизить схемную диссипацию энергии, применяется процедура предельной реконструкции численного решения.

При решении уравнений (2) и (3), играющих роль внутренних граничных условий на стадиях двуциклического расщепления, наряду со схемой распада разрыва с согласованным числом шагов по времени в блоках и прослойках [8] применяется бездиссипативная разностная схема, построенная по методу Г.В. Иванова [9]. Согласно методу расчет шага по времени производится в два этапа. Сначала — на этапе «предиктор», по заданному решению на нижнем временном слое t определяются скорости и напряжения v_k^\pm, σ_{jk}^\pm , отнесенные к боковым граням ячеек сетки промежуточного слоя $t + \Delta t/2$. Затем — на этапе «корректор», из уравнений, аппроксимирующих (2), (3), находятся значения $\hat{v}_k = (v_k^+ + v_k^-)/2$ и $\hat{\sigma}_{jk} = (\sigma_{jk}^+ + \sigma_{jk}^-)/2$ на верхнем временном слое $t + \Delta t$. Если опустить нижние индексы, то эти уравнения можно записать в единообразной форме отдельно для продольных и поперечных волн:

$$\rho' \frac{\hat{v} - v}{\Delta t} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\Delta t} = \rho' c'^2 \frac{v^+ - v^-}{\delta}.$$

Величины v^\pm и σ^\pm на промежуточном временном слое отыскиваются с помощью замыкающих уравнений $\hat{v} + v = v^+ + v^-$, $\hat{\sigma} + \sigma = \sigma^+ + \sigma^-$, которые обеспечивают отсутствие диссипации энергии в схеме. Недостающие уравнения получаются из соотношений на бихарактеристиках для системы (1) и имеют вид $z v^+ + \sigma^+ = r^+$, $z v^- - \sigma^- = s^-$ ($z = \rho c$ — акустический импеданс). Значения инвариантов Римана r^+ и s^- берутся с нижнего временного слоя в приграничных ячейках смежных блоков.

На основе метода Г.В. Иванова можно построить разностную схему с любой отличной от нуля, заранее заданной диссипацией энергии, однако это не соответствует целям данной статьи, поскольку применение такой схемы на практике привело бы к искусственному сглаживанию волн после прохождения через большое число прослоек.

Компьютерные программы реализованы на алгоритмическом языке Fortran по технологии MPI. Распараллеливание вычислений осуществляется по принципу декомпозиции области: каждый процессор кластера производит расчет цепочки блоков в направлении оси x_1 с обменом данными между соседними процессорами в приграничных ячейках верхней и нижней границ цепочки.

Программы применялись для решения серии задач, описывающих распространение упругих волн, вызванных действием на блочную среду кратковременных и длительных локализованных нагрузок. На рисунке 1 представлены результаты расчетов при мгновенном действии пары сосредоточенных сил, создающих вращательный момент на срединном блоке левой границы блочного массива. Блоки считались

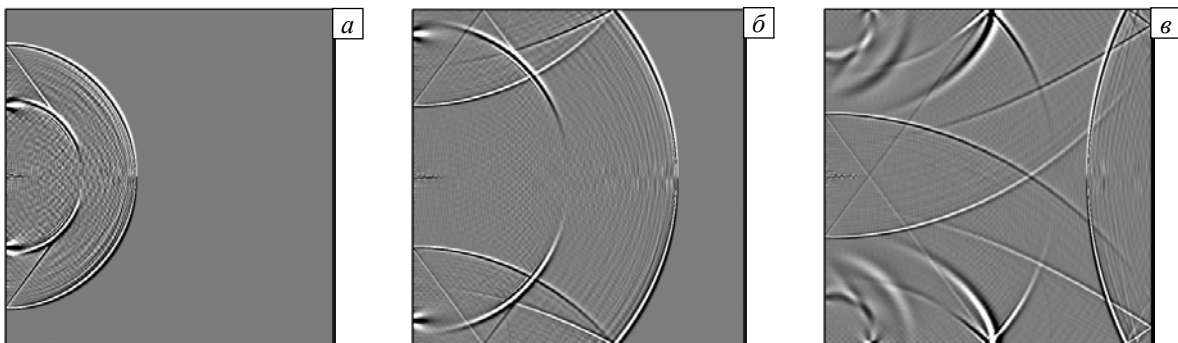


Рис. 1. Действие сосредоточенного вращательного момента на левой границе массива при толщине прослоек $\delta = 0,01$ мм (а–б) и $\delta = 2$ мм (в–г); линии уровня нормального напряжения σ_{11} в различные моменты времени

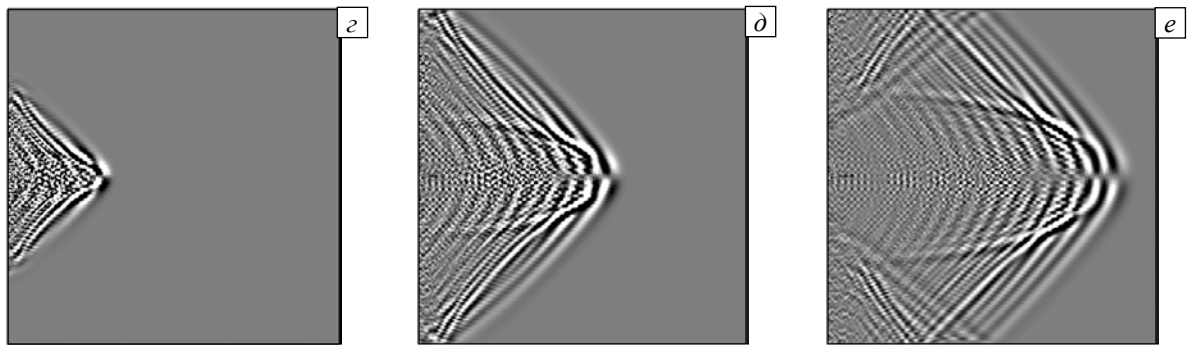


Рис. 1. Продолжение

квадратными со стороной $h = 0,05$ м, а прослойки имели одинаковую толщину в обоих направлениях. Блочный массив состоял из 100×100 блоков. Значения параметров материалов взяты близкими к параметрам кирпичной кладки: $\rho = 3700$, $\rho' = 1200$ кг/м³, $c_1 = 3500$, $c_2 = 2100$, $c'_1 = 1500$, $c'_2 = 360$ м/с. Расчеты проведены для прослоек разной толщины: $\delta = 0,01$ мм (Рис. 1, а–в) и $\delta = 2$ мм (Рис. 1, г–е). Полученные волновые картины существенно отличаются. В случае тонких прослоек фронты основных волн практически круговые, а по мере утолщения прослоек форма фронтов становится эллиптической, появляются осцилляции, вызванные вращательным движением блоков. Кроме того, при утолщении прослоек замедляются скорости распространения волн по блочному массиву.

На рисунке 2 приведены результаты решения задачи, в которой граничное воздействие на блочную среду отсутствует, а начальные данные соответствуют вращению центрального блока массива с заданной угловой скоростью. По линиям уровня нормального напряжения σ_{11} видны круговые фронты волн в случае тонких прослоек (Рис. 2, а) и эллиптические, вытянутые вдоль координатных направлений, — при более толстых прослойках (Рис. 2, б, в). Простые оценки показывают, что большая полуось эллипса может быть найдена через скорость продольных волн в слоистой среде в направлении осей координат, а малая полуось — через скорость поперечных волн. С утолщением прослоек более заметной становится система волн, вызванных вращательным движением блоков (Рис. 2, в). Анализ результатов позволяет сделать вывод о том, что многоблочную среду с податливыми прослойками можно считать изотропным континуумом только при прослойках достаточно малой толщины (Рис. 1, а–в и Рис. 2, а).

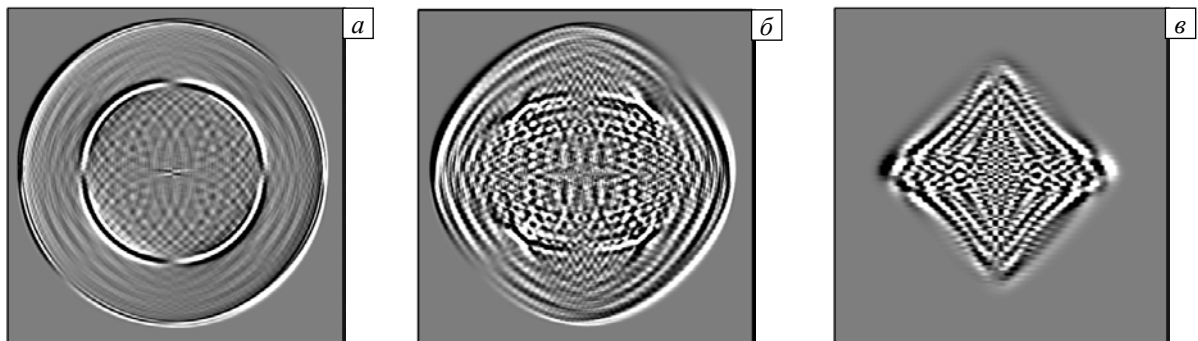


Рис. 2. Мгновенное вращение центрального блока массива: линии уровня нормального напряжения σ_{11} в зависимости от толщины прослойки δ , мм: 0,01 (а), 0,1 (б) и 2 (в)

3. Ортоотропный моментный континуум

Для осредненного описания деформационных процессов в многоблочной среде с толстыми прослойками будем использовать модель моментного континуума в приближении ортоотропного материала с плоскостями упругой симметрии, параллельными координатным плоскостям. При произвольной анизотропии определяющие уравнения моментного континуума для случая пространственного напряженно-деформированного состояния записываются в виде: $\sigma_{jk} = E_{jklm} \Lambda_{lm}$, $\mu_{jk} = F_{jklm} M_{lm}$, где E_{jklm} и F_{jklm} — модули упругости, которые образуют положительно определенные тензоры четвертого ранга, симметричные относительно пар индексов j, k и l, m ; σ_{jk} и μ_{jk} — несимметричные тензоры напряжений и моментных напряжений; Λ_{jk} и M_{jk} — тензоры деформации и кривизны. Симметрия модулей упругости связана с существованием потенциала напряжений

$$\Phi = \frac{1}{2} \Lambda_{jk} E_{jklm} \Lambda_{lm} + \frac{1}{2} M_{jk} F_{jklm} M_{lm} : \quad \sigma_{jk} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_{jk}}, \quad \mu_{jk} = \frac{\partial \Phi}{\partial M_{jk}}. \quad (4)$$

Отсутствие симметрии тензоров напряжений объясняется моментными свойствами материала.

Тензоры, отвечающие в уравнениях за кинематику среды, также несимметричны [10]. Они задаются уравнениями $\dot{\Lambda}_{jk} = v_{j,k} - \omega_{jk}$, $\dot{M}_{jk} = \omega_{j,k}$, в которых $\omega_{j,k}$, ω_{jk} и ω_j — тензорные и векторные компоненты угловой скорости. Формулы перехода от одних компонент к другим могут быть получены с помощью равенства диадных форм: $\omega_{jk} e_j e_k = \omega_1 (e_3 e_2 - e_2 e_3) + \omega_2 (e_1 e_3 - e_3 e_1) + \omega_3 (e_2 e_1 - e_1 e_2)$ (e_k — базисные орты), из которого следует, что тензор кривизны является тензором третьего ранга:

$$\dot{M} = \omega_{1,k} (e_3 e_2 - e_2 e_3) e_k + \omega_{2,k} (e_1 e_3 - e_3 e_1) e_k + \omega_{3,k} (e_2 e_1 - e_1 e_2) e_k.$$

Вытекающие отсюда формулы пересчета тензорных компонент позволяют исключить из рассмотрения модули упругости, заведомо равные нулю в случае ортотропного материала. Для этого, повторяя стандартные рассуждения (см. с. 253 в [11]), заменим e_1 на $-e_1$. Тогда знаки v_1 , ω_2 и ω_3 изменятся на противоположные, а знаки v_2 , v_3 и ω_1 останутся прежними. Как следствие, станут противоположными знаки компонент Λ_{jk} с одной единицей в индексах и знаки компонент M_{jk} , индексы которых отличны от единицы или оба равны единице. Так как координатная плоскость $x_2 x_3$ — это плоскость упругой симметрии материала, то значение потенциала напряжений при такой замене останется неизменным. Поэтому коэффициенты квадратичной формы (4) при произведениях тензорных компонент с изменяющимися знаками на компоненты, знаки которых сохраняются, должны быть нулевыми. Таковыми являются модули упругости E_{jklm} и F_{jklm} с нечетным числом единиц в индексах.

Аналогично, заменяя орт e_2 на $-e_2$, можно показать, что модули с нечетным числом двоек в индексах также нулевые. Модули с нечетным числом троек оказываются равными нулю автоматически в силу предыдущих рассуждений. Таким образом, как и в классической теории ортотропной упругой среды, наличие двух ортогональных плоскостей симметрии в моментном континууме означает, что третья — ортогональная им плоскость, также представляет собой плоскость симметрии. В итоге матрица модулей упругости E_{jklm} приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2323} & E_{2332} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2332} & E_{5232} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3131} & E_{3113} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3113} & E_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & E_{1221} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1221} & E_{2121} \end{pmatrix}.$$

Матрица модулей F_{jklm} выглядит аналогично.

Матрицы E_{jklm} и F_{jklm} содержат по 15 независимых коэффициентов. Если блоки и прослойки блочной среды изотропны и имеют одинаковые размеры в трех направлениях, то модули упругости не меняются при циклической перестановке координатных осей. В этом случае $E_{2332} = E_{3113} = E_{1221}$, $E_{1122} = E_{1133} = E_{2233}$, $E_{1111} = E_{2222} = E_{3333}$, а остальные диагональные элементы матрицы E равны между собой. Подобной же структурой обладает и матрица F .

Таким образом, определяющие уравнения ортотропной моментной среды

$$\begin{aligned} \sigma_{jj} &= a_1 \Lambda_{jj} + b_1 (\Lambda_{kk} + \Lambda_{ll}), & \sigma_{jk} &= a_2 \Lambda_{jk} + b_2 \Lambda_{kj}, \\ \mu_{jj} &= \alpha_1 M_{jj} + \beta_1 (M_{kk} + M_{ll}), & \mu_{jk} &= \alpha_2 M_{jk} + \beta_2 M_{kj} \end{aligned}$$

содержат восемь независимых коэффициентов — механических параметров материала ($j \neq k \neq l$). Потенциал напряжений такой среды представляет собой сильно выпуклую функцию, если выполняются условия положительной определенности матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

то есть если $a_1 > b_1 > -a_1/2$, $a_2 > |b_2|$, $\alpha_1 > \beta_1 > -\alpha_1/2$, $\alpha_2 > |\beta_2|$. Эти условия гарантируют термодинамическую корректность модели.

Полная система уравнений, описывающая динамику ортотропной среды в пространственном случае, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \dot{v}_j &= \sigma_{j1,1} + \sigma_{j2,2} + \sigma_{j3,3}, & J \dot{\omega}_j &= \mu_{j1,1} + \mu_{j2,2} + \mu_{j3,3} - s(\sigma_{kl} - \sigma_{lk}), \\ \dot{\sigma}_{jj} &= a_1 v_{j,j} + b_1 (v_{k,k} + v_{l,l}), & \dot{\sigma}_{jk} &= a_2 v_{j,k} + b_2 v_{k,j} + s(a_2 - b_2) \omega_l, \\ \dot{\mu}_{jj} &= \alpha_1 \omega_{j,j} + \beta_1 (\omega_{k,k} + \omega_{l,l}), & \dot{\mu}_{jk} &= \alpha_2 \omega_{j,k} + \beta_2 \omega_{k,j}, \end{aligned}$$

где J — объемная плотность момента инерции, s — знак перестановки индексов (j, k, l) . В плоском деформированном состоянии система записывается как

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \dot{v}_1 &= \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, & \bar{\rho} \dot{v}_2 &= \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2}, \\ J \dot{\omega}_3 &= \mu_{31,1} + \mu_{32,2} + \sigma_{21} - \sigma_{12}, \\ \dot{\sigma}_{11} &= a_1 v_{1,1} + b_1 v_{2,2}, & \dot{\sigma}_{22} &= a_1 v_{2,2} + b_1 v_{1,1}, \\ \dot{\sigma}_{21} &= a_2 (v_{2,1} - \omega_3) + b_2 (v_{1,2} + \omega_3), \\ \dot{\sigma}_{12} &= a_2 (v_{1,2} + \omega_3) + b_2 (v_{2,1} - \omega_3), \\ \dot{\mu}_{31} &= \alpha_2 \omega_{3,1}, & \dot{\mu}_{32} &= \alpha_2 \omega_{3,2} \end{aligned} \quad (5)$$

и представима в матричной форме $A(\partial U/\partial t) = B^1(\partial U/\partial x_1) + B^2(\partial U/\partial x_2) + QU$ относительно вектор-функции $U = (v_1, v_2, \omega_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{12}, \mu_{31}, \mu_{32})$ с постоянными матрицами-коэффициентами. Характеристическая матрица $n_1 B^1 + n_2 B^2 - cA$ данной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\bar{\rho}c & 0 & 0 & n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\rho}c & 0 & 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Jc & 0 & 0 & 0 & 0 & n_1 & n_2 \\ a_1 n_1 & b_1 n_2 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 n_1 & a_1 n_2 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 n_2 & a_2 n_1 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ a_2 n_2 & b_2 n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det(n_1 B^1 + n_2 B^2 - cA) = 0$ имеет шесть нетривиальных корней $c = \pm \bar{c}_1$, $c = \pm \bar{c}_2$ и $c = \pm \bar{c}_3$, определяющих три скорости слабых ударных волн (продольных, поперечных волн и волн вращательного движения), распространяющихся в направлении единичного вектора n :

$$\bar{c}_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho}}, \quad \bar{c}_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\rho}}, \quad \bar{c}_3 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{J}}, \quad \text{где } \lambda_{1,2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 (n_1^2 - n_2^2)^2 + (b_1 + b_2)^2 n_1^2 n_2^2}, \quad (6)$$

и трехкратный нулевой корень, соответствующий контактному разрыву.

Состояние простого сдвига в плоскости $x_1 x_2$ с постоянной скоростью сдвига $\dot{\chi}$, для которого $v_1 = 0$ и $v_2 = \dot{\chi} x_1$, а ω_3 зависит только от времени, описывается уравнениями $J \dot{\omega}_3 = \sigma_{21} - \sigma_{12}$, $\dot{\sigma}_{21} = a_2 \dot{\chi} - (a_2 - b_2) \omega_3$, $\dot{\sigma}_{12} = a_2 \dot{\chi} + (a_2 - b_2) \omega_3$, откуда следует, что $J \dot{\omega}_3 = -(a_2 - b_2)(\omega_3 - \dot{\chi})$. Общее решение для угловой скорости $\omega_3 = \dot{\chi} + C_1 \cos 2\pi\nu_* t + C_2 \sin 2\pi\nu_* t$ указывает на осцилляционный характер

вращения блоков. Частота осцилляций ν_* , вычисляемая по формуле $2\pi\nu_* = \sqrt{(a_2 - b_2)/J}$, является, по сути, феноменологическим параметром материала. В [7, 10, 12] на основании точных решений, а также с применением численных расчетов показано, что для изотропной моментной среды эта частота — резонансная: за счет приложения периодического внешнего воздействия с такой частотой в моментной среде можно возбудить резонанс вращательного движения частиц.

4. Оценка параметров континуума

Задача определения коэффициентов системы уравнений (5) по известным механическим параметрам материалов блоков и прослоек относится к классу обратных задач и не имеет тривиального решения, хотя некоторые из этих коэффициентов могут быть найдены относительно простыми способами. В частности, коэффициенты a_1 и a_2 вычисляются по формулам $a_k = \bar{\rho} \bar{c}_k^2$ через осредненные плотность блочной среды и скорости продольных и поперечных волн в направлении координатных осей. Для среды с блоками кубической формы и прослойками одинаковой толщины h во всех трех направлениях осредненные параметры равны:

$$\bar{\rho} = h^2 \frac{\rho h + 3\rho' \delta}{(h + \delta)^3}, \quad J = \rho \frac{h^5}{6(h + \delta)^3}, \quad \bar{c}_k = c_k c'_k \frac{h + \delta}{h c'_k + \delta c_k}.$$

Значение суммы $b_1 + b_2$, характеризующее анизотропию среды, оценивается по степени искажения фронтов волн. Фронты волн можно построить на основании формул (6) в том случае, если заранее известен знак

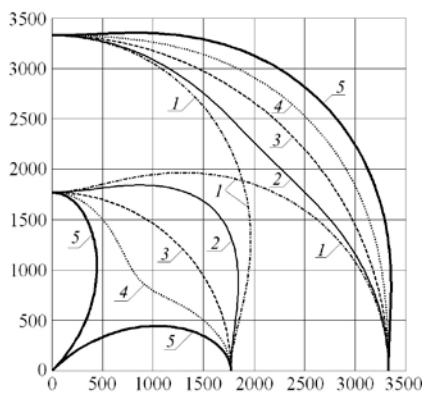


Рис. 3. Фронты продольных и поперечных волн в ортотропной среде при разных значениях параметра $b_1 + b_2$ ($\delta = 2$ мм)

$b_1 + b_2$, поскольку скорости \bar{c}_1 и \bar{c}_2 не зависят от этого знака, а диапазон изменения коэффициентов $a_1 + a_2 > b_1 + b_2 > -a_1/2 + a_2$, в котором выполняются условия сильной выпуклости квадратичного потенциала напряжений, допускает как положительные, так и отрицательные значения. На рисунке 3 изображены типичные фронты продольных и поперечных волн, которые рассчитаны для $\delta = 2$ мм по механическим параметрам, приведенным в разделе 2. Кривые 1 соответствуют $b_1 + b_2 = 0$, кривые 3 — $b_1 + b_2 = a_1 - a_2$ (в этом случае среда изотропна), кривые 5 — максимальному допустимому значению $b_1 + b_2 = a_1 + a_2$. Кривые 2 и 4 отвечают промежуточным значениям: $b_1 + b_2 = (a_1 - a_2)/2$ и $b_1 + b_2 = a_1$.

Грубые оценки остальных коэффициентов могут быть получены с помощью специальных схем квазистатического деформирования блочной среды. На рисунке 4, а представлена схема, в которой блоки поворачиваются на бесконечно малый угол φ , а их центры масс остаются неподвижными. При учете податливости прослоек и пренебрежении деформацией блоков получается приближение, в котором прослойки находятся в состоянии чистого сдвига с углом сдвига $\gamma = h\varphi/\delta$. Касательное напряжение τ в прослойках пропорционально углу поворота: $\tau = \mu' \gamma$, где $\mu' = \rho' c_2'^2$ — модуль сдвига материала прослойки. Коэффициент пропорциональности $f = \tau/\varphi = \mu' h/\delta$ является одним из феноменологических параметров моментного континуума.

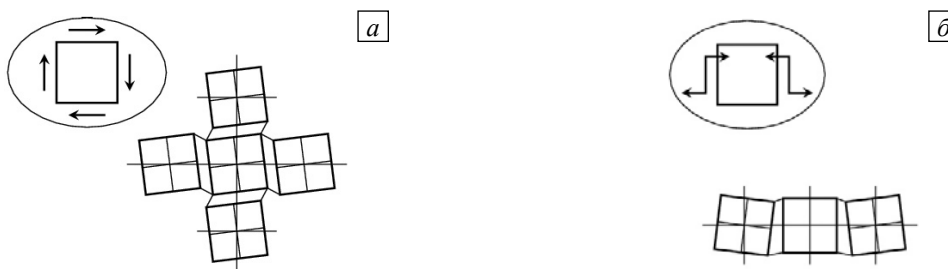


Рис. 4. Схемы деформирования блочной среды: однородное вращение блоков (а) и неоднородное вращение с образованием внутренней кривизны (б)

В схеме, изображенной на рисунке 4, \bar{b} , перемещения центров масс также отсутствуют. Из-за встречного поворота соседних блоков слоистая структура приобретает кривизну $\bar{\alpha} = \partial\varphi/\partial x_1$ (ось x_1 направлена горизонтально), которую приближенно можно рассчитать по формуле: $\bar{\alpha} = \varphi/(h + \delta)$. В прослойке возникает линейное распределение нормального напряжения $\sigma = E'\varepsilon$ и деформации $\varepsilon = -\varphi x_2/\delta$, где x_2 — вертикальная ось, а $E' = \rho'c_2'^2(3c_1'^2 - 4c_2'^2)/(c_1'^2 - c_2'^2)$ — модуль Юнга прослойки. Результатом действия напряжений является изгибающий момент $m = E'\varphi h^3/(12\delta)$. Еще один параметр моментного континуума $g = m/\bar{\alpha}$ определяется по формуле: $g = E'(h + \delta)h^3/(12\delta)$.

Сопоставляя уравнения системы (5) с уравнениями для касательного напряжения и изгибающего момента, коэффициентами которых служат f и g , получаем следующие формулы: $a_2 - b_2 = f$, $\alpha_2 = g/h$. При приведенных выше параметрах материалов блоков и прослоек расчеты дают следующие приближенные значения коэффициентов: $\bar{\rho} = 3417$ кг/м³, $J = 1,37$ кг/м, $a_1 = 37,88$ ГПа, $a_2 = 10,72$ ГПа, $b_1 = 6,75$ ГПа, $b_2 = 6,83$ ГПа, $\alpha_2 = 2,48$ МН. Более точного вычисления параметров ортотропного моментного континуума по заданным механическим и геометрическим характеристикам блочной среды можно добиться, применяя подходы, предложенные в [13–18] и других работах, посвященных структурному моделированию микронеоднородных материалов.

5. Заключение

Для численного исследования процессов распространения упругих волн в блочных средах с податливыми прослойками разработан параллельный вычислительный алгоритм и компьютерная программа, ориентированная на многопроцессорные системы кластерной архитектуры. Расчеты волн, вызываемых локализованными импульсными воздействиями, показали, что блочную среду можно считать изотропной только в случае достаточно тонких прослоек. В блочной среде с относительно толстыми прослойками наблюдаются эффекты анизотропии, которые заключаются в появлении вытянутых вдоль координатных направлений волновых фронтов и периодических колебаний вследствие вращательного движения блоков. Для моделирования упругих волн в многоблочной среде применима теория ортотропного моментного континуума, учитывающая независимые вращения блоков и вызванные этими вращениями моментные напряжения. Значения механических параметров моментного континуума получены на основе сопоставления скоростей распространения упругих волн и коэффициентов податливости материала в специальных схемах квазистатического деформирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00130-а) и Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 18 «Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности».

Литература

1. Баженов В.Г., Капустин С.А., Торопов В.В., Туровцев Г.В. Моделирование процессов деформирования и разрушения кирпичной кладки // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1997. – № 56. – С. 53-58.
2. Lourenço P.B., Milani G., Tralli A., Zucchini A. Analysis of masonry structures: review of and recent trends in homogenization techniques // Can. J. Civil Eng. – 2007. – Vol. 34, No. 11. – P. 1443-1457. DOI
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
4. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
5. Гольдин С.В. Сейсмические волны в анизотропных средах. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – 375 с.
6. Aleksandrova N.I., Chernikov A.G., Sher E.N. Experimental investigation into the one-dimensional calculated model of wave propagation in block medium // J. Min. Sci. – 2005. – Vol. 41, No. 3. – P. 232-239. DOI
7. Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Анализ резонансного возбуждения блочной среды на основе уравнений моментного континуума Коссера // РЭНСИТ. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 111-118.
8. Варыгина М.П., Похабова М.А., Садовская О.В., Садовский В.М. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – Т. 12, № 2. – С. 435-442.
9. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. – 352 с.
10. Sadovskaya O., Sadovskii V. Mathematical modeling in mechanics of granular materials. – Ser.: Advanced Structured Materials, V. 21. – Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer, 2012. – 390 p. DOI
11. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
12. Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 111-121. DOI
13. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. Mechanics of composite structural elements. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2004. – 468 p. DOI

14. Erofeev V.I. *Wave processes in solids with microstructure*. – New Jersey-London-Singapore-Hong Kong-Bangalore-Taipai: World Scientific Publishing, 2003. – 256 p. DOI
15. Erofeev B.I. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 5-10. DOI
16. Erofeev B.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 40-47. DOI
17. Garaash I.A., Nikolaevskii V.N. Механика Коссера для наук о Земле // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 44-66. DOI
18. Korepanov V.V., Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 76-91. DOI

References

1. Bazhenov V.G., Kapustin S.A., Toropov V.V., Turovtsev G.V. Modelirovanie protsessov deformirovaniia i razrusheniia kirpichnoi kladki [Modeling of deformation and fracture of a brickwork]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. – Appl. Problems of Strength and Plasticity*, 1997, no. 56, pp. 53-58.
2. Lourenço P.B., Milani G., Tralli A., Zucchini A. Analysis of masonry structures: review of and recent trends in homogenization techniques techniques. *Can. J. Civil Eng.*, 2007, vol. 34, no. 11, pp. 1443-1457. DOI
3. Brekhovskikh L.M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Moscow, Nauka publ., 1973. 343 p.
4. Kunin I.A. *Teoriia uprugikh sred s mikrostrukturoi* [Theory of elastic media with microstructure]. Moscow, Nauka publ., 1975. 416 p.
5. Goldin S.V. *Seismicheskie volny v anizotropnykh sredakh* [Seismic waves in anisotropic media]. Novosibirsk, SB RAS publ., 2008. 375 p.
6. Aleksandrova N.I., Chernikov A.G., Sher E.N. Experimental investigation into the one-dimensional calculated model of wave propagation in block medium. *J. Min. Sci.*, 2005, vol. 41, no. 3, pp. 232-239. DOI
7. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Varygina M.P. Analysis of resonant excitation of block medium based on equations of the Cosserat momentary continuum. *Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 111-118.
8. Varygina M.P., Pokhabova M.A., Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Numerical algorithms for the analysis of elastic waves in block media with thin interlayers. *Numerical Methods and Programming*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 435-442.
9. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogulskii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniia tverdykh tel* [Solving numerically dynamic problems of elastoplastic deformation of solids]. Novosibirsk, Siberian University publ., 2002. 352 p.
10. Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical modeling in mechanics of granular materials*. Ser.: Advanced Structured Materials, vol. 21. Heidelberg-New York-Dordrecht-London, Springer, 2012. 390 p. DOI
11. Rabotnov Iu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Problems of the mechanics of a deformable solid body]. Moscow, Nauka publ., 1979. 744 p.
12. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Varygina M.P. Numerical modeling of three-dimensional wave motions in couple-stress media. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 111-121. DOI
13. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. *Mechanics of composite structural elements*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 2004. 468 p. DOI
14. Erofeev V.I. *Wave processes in solids with microstructure*. New Jersey-London-Singapore-Hong Kong-Bangalore-Taipai, World Scientific Publishing, 2003. 256 p. DOI
15. Erofeev V.I. The Cosserat brothers and generalized continuum mechanics. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 5-10. DOI
16. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Macromechanical modelling of Cosserat elastic and visco-elastic media. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 40-47. DOI
17. Garaash I.A., Nikolaevskii V.N. Cosserat mechanics in Earth sciences. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 44-66. DOI
18. Korepanov V.V., Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Analytical and numerical solutions in the context of Cosserat continuum as the basis for experiments on detection of couple-stress effects in materials. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 76-91. DOI

Поступила в редакцию 10.12.2013; опубликована в электронном виде 31.03.2014

Сведения об авторах

Садовский Владимир Михайлович, дфмн, проф., зам. дир., Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), 660036, Красноярск, Академгородок; E-mail: sadov@icm.krasn.ru

Садовская Оксана Викторовна, кфмн, снс, ИВМ СО РАН; E-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

Похабова Мария Александровна, асп., ИВМ СО РАН; E-mail: pahomova_mariya@mail.ru