

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.5

УДК 532.517.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УНИВЕРСАЛЬНЫМИ ПРИСТЕНОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А.С. Козелков, В.В. Курулин, О.Л. Пучкова, С.В. Лашкин

*Институт теоретической и математической физики РФЯЦ-ВНИИЭФ,
Саров, Нижегородская обл., Российская Федерация*

В статье рассматривается применение явной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений (EARSМ) для расчета турбулентных течений с использованием универсальных пристеночных функций. Представлен алгоритм численной реализации модели, который обеспечивает устойчивый счет внутри пограничного слоя и приемлемые результаты моделирования на произвольных неструктурированных сетках с различным уровнем сгущения вблизи твердой поверхности. Эффективность работы представленного алгоритма продемонстрирована на задаче турбулентного обтекания плоской пластины. В двух задачах, содержащих асимметричное течение, показано, что предложенный подход к реализации EARSМ дает заметное улучшение результатов моделирования по сравнению с данными, полученными по базовой модели RANS, даже в случае использования неструктурированной сетки с произвольным сеточным разрешением вблизи твердой поверхности.

Ключевые слова: турбулентные течения, модели напряжений Рейнольдса, компоненты тензора напряжений Рейнольдса, анизотропия, универсальные пристеночные функции, пограничный слой

SIMULATION OF TURBULENT FLOWS USING AN ALGEBRAIC REYNOLDS STRESS MODEL WITH UNIVERSAL WALL FUNCTIONS

A.S. Kozelkov, V.V. Kurulin, O.L. Puchkova and S.V. Lashkin

*Institute of Theoretical and Computational Physics FSUE RFNC-VNIIEF,
Sarov, Nizhny Novgorod Region, Russian Federation*

The paper explores the application of an Explicit Algebraic Reynolds Stress Model (EARSМ) to turbulent flow simulation using universal wall functions. With universal wall functions, friction coefficients and velocity derivatives on a solid wall can be predicted with good accuracy, but the correct application of these functions entails changes in the formulation of turbulence models. Despite the fact that the use of this approach has been well investigated for RANS turbulence models, the question of how to introduce these functions in the EARSМ has not been adequately addressed. A detailed consideration shows that in the case of EARSМ, application of a coarser near-wall resolution leads to an unsatisfactory accuracy of the Reynolds stress gradient in the areas of rapid change in the velocity field and, as a consequence, to the oscillations of physical quantities in the boundary layer. The present paper proposes a method for eliminating these oscillations modified by calculating the velocity gradients on the inner faces of computational grid cells. A numerical implementation algorithm for the EARSМ model which provides stable computation in the interface and acceptable simulation results on arbitrary unstructured grids with various level of grid-spacing near the rigid surface is presented. The effectiveness of the proposed algorithm is illustrated by solving the problem of turbulent flow over a flat plate. The results show that the algorithm is able to eliminate the spatial oscillations in velocity inside the boundary layer at any type of a grid. The analysis of two problems considering the asymmetrical flow indicates that the application of the developed EARSМ algorithm gives a noticeable improvement of simulation results compared with the basic RANS model even in the case of the unstructured grid with arbitrary grid-spacing near the rigid surface.

Key words: turbulent flows, Reynolds stress models, Reynolds stress tensor components, anisotropy, universal wall functions, boundary layer

1. Введение

Наиболее распространенными на практике в настоящее время являются RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes) модели турбулентности [1–4], применение которых приводит к устойчивым итерационным процессам и приемлемым результатам для большинства практически важных течений. Однако в RANS моделях турбулентности зачастую используется гипотеза Буссинеска о турбулентной вязкости [2–5], которая, за исключением простейших течений, неверна. Эта гипотеза справедлива в случае изотропной турбулентности, когда в течении доминируют только диагональные компоненты тензора рейнольдсовых напряжений.

В сложных течениях существенное влияние оказывают все компоненты тензора напряжений Рейнольдса. К таким ситуациям относятся, например, рассматриваемые в рамках гидро- и аэродинамики течения вблизи двугранных углов, образованных пересечением стенок. При подобных конфигурациях расчетных областей важную роль играют анизотропные свойства течений, поэтому модели, основанные на гипотезе линейной вихревой вязкости, здесь непригодны.

Одним из инструментов для правильного описания структуры подобных течений являются модели турбулентности класса RSM (Reynolds Stress Modelling), которые учитывают влияние на основное течение всех компонент тензора напряжений Рейнольдса [3, 6–10]. Существует целый класс моделей RSM,

к которым относятся дифференциальные (DRSM) [3, 5, 8, 9], алгебраические (ARSM) [12] и явные алгебраические (EARSM) [4, 6, 10] модели рейнольдсовых напряжений.

Модели DRSM предполагают решение отдельного уравнения переноса каждой компоненты тензора напряжений Рейнольдса и используются совместно с уравнениями переноса, записанными для масштаба скорости и длины турбулентного перемешивания [3, 5]. Вследствие симметрии тензора рейнольдсовых напряжений решается шесть уравнений переноса компонент напряжений и одно уравнение для кинетической энергии турбулентности (или скорости ее диссипации). Это заметно увеличивает требования к вычислительным ресурсам, усложняет реализацию, отладку, постановку граничных условий в модели. В силу данных обстоятельств в практических расчетах к DRSM прибегают довольно редко.

При описании турбулентности по модели ARSM базовые уравнения движения в задаче течения замыкаются с помощью сложных алгебраических связей между рейнольдсовыми напряжениями и осредненными параметрами потока. В итоге для вычисления тензора напряжений необходимо решать алгебраические уравнения, получаемые из дифференциальных с помощью допущений, предложенных Роди [12, 13]. Однако существенным недостатком этих моделей является то, что следующие из алгебраических преобразований уравнения могут быть трансцендентными и иметь несколько решений или вообще не иметь их.

Альтернативой сложным DRSM и ARSM служат более простые и устойчивые модели EARSM, которые устанавливают алгебраические связи, опираясь на нелинейные соотношения между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций [4, 6, 10]. EARSM наиболее популярны в инженерных расчетах, поскольку они менее требовательны к вычислительным ресурсам, обладают достаточно устойчивым итерационным процессом и дают приемлемые результаты.

Применимость модели EARSM для расчета турбулентных течений в областях со сложной конфигурацией исследовалась в работах [6, 7, 11, 14–17], где большое внимание уделяется выбору определяющих соотношений и базовой модели турбулентности. Так, в [14] проводится анализ эффективности моделей EARSM в сравнении с другими распространенными моделями турбулентности. В результате показано, что модели EARSM, базирующиеся на $k-\omega$ представлении турбулентности, лучше прогнозируют течения вблизи стенок. В работе [6] осуществлен анализ EARSM моделей турбулентности в приложении к отрывным течениям и течениям вблизи двугранных углов, показаны преимущества определяющих соотношений, предложенных Wallin и Johansson [см. 14, 17], а также отмечается, что модель EARSM дает наилучшее согласование с экспериментальными данными.

Использование модели EARSM для расчета тройниковых соединений труб квадратного и круглого сечений исследовалось в [15, 16]. Показано, что модель EARSM наилучшим образом отражает гидродинамику внутренних течений и вторичные токи при двугранных углах, но более требовательна к сеточному представлению в пристеночной области, чем RANS SST (Shear Stress Transport) модель.

В большинстве рассмотренных работ, посвященных исследованию практического применения моделей EARSM, строятся блочно-структурированные сетки с качественным сгущением вблизи твердой поверхности и с пристеночным разрешением по безразмерному параметру, обуславливающему расстояние до твердой поверхности $y^+ < 1$. Однако для промышленно-ориентированных задач создание расчетной сетки с подобным пристеночным разрешением связано с большими трудностями. Проблема заключается в том, что вдоль одной и той же области твердой поверхности скорость потока может меняться на порядки, а это означает изменение на порядки безразмерного параметра y^+ . В таких задачах построение расчетной сетки с условием, что первый пристеночный слой на всем протяжении твердой поверхности будет находиться в вязком подслое ($y^+ < 1$), требует большого количества расчетных ячеек, вследствие чего образуются зоны с их избыточным числом, не содействующие уточнению результатов, а лишь создающие дополнительную вычислительную нагрузку [3]. С другой стороны, несоблюдение данного условия даже на малых участках твердой поверхности приводит к неудовлетворительным результатам, поскольку уже при $y^+ > 10$ прямой метод нахождения силы трения на стенке дает значительную погрешность [18].

Выходом здесь является введение универсальных пристеночных функций, которые позволяют с хорошей точностью определять величины коэффициента трения и производной скорости на твердой стенке в большом диапазоне значений параметра y^+ . Корректное применение подобных функций влечет за собой изменения в самих формулировках моделей турбулентности. Использование такого подхода хорошо исследовано для RANS моделей турбулентности [19, 20], несколько вариантов пристеночных функций приведены в работе [2]. Вопрос введения подобных функций в EARSM освещен слабо; в современных работах, в частности в [16], удалось найти лишь упоминание о том, что данный подход возможен.

На первый взгляд может показаться, что технология применения пристеночных функций для EARSM идентична с RANS моделями, однако детальное рассмотрение вопроса показывает, что сочетание модели EARSM и более грубого пристеночного разрешения влечет за собой неудовлетворительную точность вычисления градиента рейнольдсовых напряжений в областях быстрого изменения поля скорости и, как следствие, осцилляции физических величин в пограничном слое.

В статье предлагается способ устранения этих осцилляций за счет модифицированного вычисления градиентов скорости на внутренних гранях ячеек расчетной сетки. Для описания турбулентности берется

модель EARSМ с базовой BSL моделью и определяющими соотношениями Wallin, Johansson [10]. Описывается алгоритм численной реализации решения задачи турбулентного течения, обеспечивающий устойчивость счета внутри пограничного слоя и приемлемые результаты моделирования на произвольных неструктурированных сетках с различным уровнем сгущения вблизи твердой поверхности. Анализируются результаты исследования эффективности представленного алгоритма реализации EARSМ.

Алгоритм апробирован на тестовых задачах. На задаче турбулентного обтекания пластины показано, что он обеспечивает устойчивый счет и с приемлемой точностью позволяет вычислить значения коэффициента трения на сетках с различным значением параметра y^+ . В задачах асимметричного турбулентного течения в диффузоре и течения в канале квадратного сечения установлено, что численная реализация задачи турбулентного течения на основе модели EARSМ дает заметное улучшение результатов по сравнению с расчетными данными, полученными по базовой модели, а уменьшение даже на порядок числа ячеек вблизи твердой поверхности не приводит к заметному ухудшению точности вычислений.

2. Формулировка модели EARSМ

Расчет турбулентных течений с использованием модели EARSМ основан на решении системы уравнений Навье–Стокса, осредненной по Рейнольдсу, которая для однородной несжимаемой жидкости имеет вид (для удобства знаки осреднения опущены) [1–4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \tau_{ij} \right). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: индексы $i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$ определяют направления декартовой системы координат x_i ; u_i , u_j — составляющие скорости; ρ — плотность жидкости; μ — коэффициент молекулярной вязкости; p — давление; t — время. Система (1) является незамкнутой из-за неизвестной связи между тензором рейнольдсовых напряжений $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ и осредненными параметрами гидродинамического потока ($\overline{u'_i u'_j}$ — осреднение пульсаций компонент скорости). Замыкание системы определяющих уравнений и моделирование турбулентности является одной из наиболее сложных задач вычислительной гидродинамики.

При описании турбулентности моделями семейства RSM для вычисления тензора τ_{ij} решаются уравнения переноса для каждой из его компонент, получающиеся из исходных уравнений Навье–Стокса [1–4] с помощью операции осреднения:

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = - \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i u'_j}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u'_j p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i p}}{\partial x_j} \right) \right] - \left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right] + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}, \quad (2)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. Слагаемые в правой части отвечают, соответственно, за турбулентную диффузию, генерацию энергии за счет градиента средней скорости, корреляцию пульсаций давления со скоростями деформации и вязкую диссипацию.

Модели DRSM также основаны на решении уравнения (2) для каждой компоненты тензора τ_{ij} . С учетом его симметрии рассматривается шесть уравнений. Введение замыкающих соотношений, устанавливающих связи между рейнольдсовыми напряжениями и осредненными параметрами потока, позволяет преобразовать дифференциальные уравнения (2) в алгебраические, подобно тому, как осуществляется решение при использовании модели ARSM [12]. В свою очередь, явные алгебраические модели напряжений Рейнольдса (EARSМ) берут за основу явные замыкающие соотношения для τ_{ij} , в которых предполагается, что компоненты τ_{ij} зависят от градиента скорости и являются функциями тензора скоростей деформации и вихревого тензора [6, 10]. Данные модели наиболее широко распространены на практике, поскольку менее требовательны к вычислительным ресурсам по сравнению с DRSM и ARSM, но при этом сохраняют фундаментальные свойства моделей класса RSM.

В модели EARSМ тензор напряжений Рейнольдса определяется через тензор анизотропии:

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = k \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right), \quad a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij},$$

где k — кинетическая энергия турбулентности; a_{ij} — компоненты тензора анизотропии; δ_{ij} — символ Кронекера. Тензор анизотропии является линейной комбинацией шести тензорных групп:

$$a_{ij} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_2 T_{2,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij} + \beta_9 T_{9,ij}, \quad (3)$$

где β_i — коэффициенты, определяемые ниже. Тензорные группы $T_{k,ij}$ обладают свойством симметрии и зависят только от компонент тензора скоростей деформации S_{ij} и вихревого тензора Ω_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь τ — турбулентный масштаб времени. Существует несколько модификаций модели EARSM с различными определяющими соотношениями и разным порядком тензорных групп, входящих в эти соотношения.

Базу модели EARSM составляет RANS BSL модель (Reynolds Stress Model BaseLine) [14], формулировка которой основывается на стандартной RANS SST модели Ментера [19] и отличается только выражением для турбулентной вязкости и константами. В представляемом вниманию исследовании используется модель EARSM с определяющими соотношениями, предложенными Wallin, Johansson [10]. Такой выбор обусловлен их относительной простотой и надлежащим учетом анизотропии нормальных напряжений. Преимущества выбранных соотношений отмечаются в работах [6, 19, 20.]. Согласно [10] тензорные группы $T_{k,ij}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} T_{1,ij} &= S_{ij}, \quad T_{2,ij} = S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} II_s \delta_{ij}, \quad T_{3,ij} = \Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} II_\Omega \delta_{ij}; \\ T_{4,ij} &= S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}, \quad T_{6,ij} = S_{ik} \Omega_{kl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{ij} - \frac{2}{3} IV \delta_{ij} - II_\Omega S_{ij}; \\ T_{9,ij} &= \Omega_{ik} S_{kl} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lm} \Omega_{mj} + \frac{1}{2} II_\Omega (S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}). \end{aligned}$$

Здесь II_s , II_Ω , IV — инварианты тензора скоростей деформации и вихревого тензора: $II_s = S_{ij} S_{ji}$, $II_\Omega = \Omega_{ij} \Omega_{ji}$, $IV = S_{ik} \Omega_{kj} \Omega_{ji}$.

Коэффициенты β_i в выражении (3) также являются функциями тензорных инвариантов:

$$\beta_1 = -N/Q; \quad \beta_2 = 0; \quad \beta_4 = -1/Q; \quad \beta_6 = -N/Q_1; \quad \beta_9 = 1/Q_1; \quad Q = (N^2 - 2II_\Omega)/A_1, \quad Q_1 = Q(2N^2 - II_\Omega)/6.$$

Здесь: N — это решение кубического уравнения $N^3 - C_1' N^2 - (2,7 \cdot II_s + 2 \cdot II_\Omega) N + 2C_1' II_\Omega = 0$; корни этого уравнения следующие:

$$\begin{cases} N = \frac{C_1'}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |P_1 - \sqrt{P_2}|^{1/3}, & P_2 \geq 0; \\ N = \frac{C_1'}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right), & P_2 < 0, \end{cases}$$

где $P_1 = C_1' \left(\frac{C_1'^2}{27} + \frac{9}{20} II_s - \frac{2}{3} II_\Omega \right)$, $P_2 = P_1^2 - \left(\frac{C_1'^2}{9} + \frac{9}{10} II_s + \frac{2}{3} II_\Omega \right)$; константы модели, в соответствии с [6],

имеют значения $A_1 = 1,245$, $C_1' = 9(C_1 - 1)/4$, $C_1 = 1,8$.

3. Универсальные пристеночные функции и особенности численной реализации EARSM

Построение расчетной сетки с качественным разрешением вблизи твердой поверхности (стенки) для практических задач всегда сопряжено с трудностями, поскольку сильно меняющиеся параметры

потока вдоль твердой поверхности приводят к интенсивному изменению толщины пограничного слоя [2–4]. Классический способ вычисления силы трения на стенке, когда значение производной скорости заменяется значением ее разностного аналога, дает хорошие результаты лишь в том случае, если первый расчетный слой ячеек располагается глубоко в вязкой части пограничного слоя. Положение расчетного узла в пограничном слое характеризуется безразмерным параметром расстояния до твердой поверхности y^+ [2]: $y^+ \equiv v_*^* d_1 / \nu$, где v_*^* — динамическая скорость, d_1 — характерный масштаб длины сеточной области. При значениях $y^+ < 10$ узел находится в вязкой части пограничного слоя. Хорошая точность решения задачи течения в пограничном слое без применения специальных процедур достигается лишь тогда, когда для всех ячеек вблизи твердой поверхности $y^+ < 1$ [2, 18]. В области, где скорость потока вдоль стенки меняется значительно, требование $y^+ < 1$ порождает в местах, где скорость потока невелика, избыточное сеточное разрешение. В этих областях y^+ может опускаться до очень малых значений, что при использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса не приводит к уточнению результата [4], а лишь создает дополнительную вычислительную нагрузку. Решением проблемы здесь является введение в модель универсальных пристеночных функций, которые обеспечивают приемлемую точность расчета величины трения на стенке в широком интервале изменения y^+ .

Формулировка вида универсальных пристеночных функций, участвующих в определении тангенциальной компоненты скорости в ближайшей от стенки ячейке, опирается на тот факт, что в вязком подслое основной вклад в величину скорости течения вносят вязкие напряжения, а скорость зависит от расстояния до стенки. В пристеночном слое доминируют напряжения Рейнольдса, и здесь профиль скорости описывается логарифмическим законом [2]. В работах [19, 20] тангенциальная компонента скорости в ближайшей от стенки ячейке имеет вид: $u_1 = v_* \left(1/y^{+4} + (\kappa/\ln(E y^+))^4 \right)^{-1/4}$, где $\kappa = 0,41$, $E = 8,4317$, $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, τ_w — сдвиговое напряжение, ρ — плотность. Из численного решения этого трансцендентного уравнения устанавливается значение v_* , по которому находится необходимое сдвиговое напряжение τ_w , используемое в качестве граничного условия при вычислении вязких членов из уравнения движения (1). При таком подходе в базовой модели BSL удельная скорость диссипации ω в первой от стенки ячейке рассчитывается по формуле

$$\omega_1 = \frac{v_*^2}{\nu} \left(\left(\frac{6}{0,075(y^+)^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{0,3k y^+} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Для кинетической энергии турбулентности k в качестве граничного условия на твердой стенке задается нулевой градиент.

Конечно-объемная дискретизация уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу, предполагает определение градиента тензора напряжений Рейнольдса τ_{ij} в центре расчетной ячейки. Классическая процедура вычисления производной каждой компоненты тензора в центре ячейки осуществляется с помощью соотношения [21]:

$$\nabla \cdot \tau_{ij} = (1/V) \sum_f (\tau_{ij})_f n_j S_f, \quad (4)$$

где n_j — нормаль к грани ячейки, S_f — площадь грани.

При использовании модели EARSМ удобнее всего сначала находить τ_{ij} в центрах расчетных ячеек согласно (4), затем, прибегая к линейной интерполяции, — напряжения $(\tau_{ij})_f$ на внутренних гранях и граничные условия на внешних гранях. Однако следует заметить, что как для модели EARSМ, так и для моделей RANS в выражении τ_{ij} присутствуют различные комбинации градиентов скоростей, которые, в свою очередь, отыскиваются путем линейной интерполяции из центров ячеек на грани. Двойная интерполяция приводит к неудовлетворительной точности вычислений $\nabla \tau_{ij}$ в областях быстрого изменения поля скорости, которое наблюдается в пограничном слое. Исследования показали, что такая процедура и в модели RANS, и в модели EARSМ вызывает появление осцилляций скорости и турбулентной вязкости в пограничном слое уже при $y^+ = 10$ (Рис. 1, а). Возможность возникновения частотных осцилляций вследствие линейной интерполяции производной скорости из центров ячеек при вычислении тензора τ_{ij} отмечается и в работе [22].

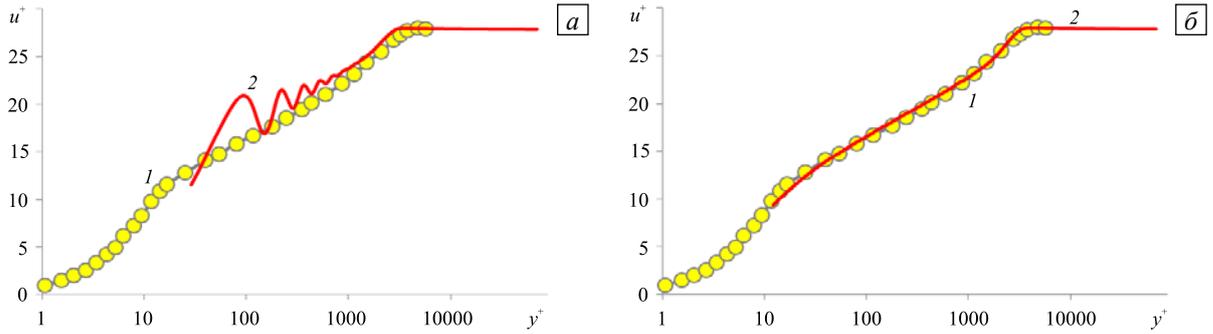


Рис. 1. Профиль безразмерной скорости $u^+ = U/u_1$ (где U – продольная компонента скорости) с осцилляциями (а), без осцилляций (б), полученный из эксперимента (кривая 1) и расчетным путем по модели EARSM (2)

Для моделей турбулентности, основанных на гипотезе Буссинеска, проблема избавления от осцилляций разрешается достаточно просто, поскольку в выражении для $(\tau_{ij})_f$ производные скорости по направлению нормали к грани \vec{n}_f можно легко выделить в явном виде и заменить их прямыми дискретными аналогами:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tau_{ij} &= \frac{1}{V} \sum_f (\tau_{ij})_f n_f S_f = \frac{1}{V} \sum_f \left[2\nu_T \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right] n_f S_f = \\ &= \frac{1}{V} \sum_f \left[2\nu_T \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right] S_f + \frac{1}{V} \sum_f \left[2\nu_T \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] S_f, \end{aligned}$$

где V — объем ячейки; ν_T — турбулентная вязкость; $(\partial u_i / \partial n)_f$ — производная скорости по направлению нормали к грани:

$$(\partial u_i / \partial n)_f = (u_N - u_P) / d. \tag{5}$$

Здесь d — расстояние между ячейками P и N .

Данный подход не применим к модели EARSM напрямую, поскольку в выражении для τ_{ij} нельзя выделить производные скорости явно. Однако здесь можно прибегнуть к следующему: вычислять необходимые величины не в центре ячейки, а в центре грани, используя для τ_{ij} определяющие соотношения (3), а для производных скорости выражения

$$(\partial u_i / \partial x_j) = (u_{iN} - u_{iP}) \cdot (d_j / d^2) + \left[(\partial u_i / \partial x_j)^* - (\partial u_i / \partial x_k)^* \cdot d_k \cdot (d_j / d^2) \right].$$

Здесь $(\partial u_i / \partial x_j)^*$ — набор производных скорости, которые находятся путем линейной интерполяции.

Таким образом, составляющая градиента, направленная по нормали к рассматриваемой грани, заменяется ее дискретным аналогом согласно выражению (5); остальная же часть градиента определяется линейной интерполяцией. Это полностью избавляет поле решения от высокочастотных осцилляций скорости в пограничном слое при любом значении y^+ (Рис. 1, б). Представленные на рисунке 1 расчетные профили безразмерной скорости получены по модели EARSM на сетке с пристеночным разрешением, обеспечивающим значение $y^+ = 30$. Для сравнения приводятся экспериментальные данные [26].

Необходимо заметить, что в формулировке модели EARSM тензор τ_{ij} также входит и в выражение для члена, отвечающего за генерацию энергии в базовой модели BSL, где предполагается его представление в центре расчетной ячейки как [6]

$$\tilde{P}_k = \min \left(-\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 10\rho\beta k\omega \right). \tag{6}$$

Это требует дополнительных вычислительных затрат, однако опыт тестирования EARSM на задачах, рассматриваемых в данной работе, показывает, что вполне допустимо принимать в (6) в качестве τ_{ij} его

линейную интерполяцию по значениям на гранях, окружающих ячейку. При этом малая чувствительность результатов к способу определения τ_{ij} объясняется тем, что низкий порядок дискретизации вполне допустим при расчете турбулентной вязкости с помощью полуэмпирических моделей турбулентности [2].

В представленной реализации модели EARSM алгоритм нахождения τ_{ij} по вычислительной нагрузке отличается от базовой модели RANS лишь этапом вычисления напряжений на внутренних гранях расчетной сетки. Данный этап не связан с составлением матрицы и решением системы линейных уравнений, поэтому проходит достаточно быстро. Однако, как будет показано в следующем разделе, применение модели EARSM приводит к значительному увеличению точности определения асимметричных турбулентных течений, а описанный алгоритм нахождения τ_{ij} позволяет правильно моделировать течение в пограничном слое и получать устойчивое решение на сетках с любым уровнем пристеночного разрешения.

4. Результаты численных экспериментов

Все расчеты в настоящей работе осуществлены с помощью пакета ЛОГОС — российского программного продукта инженерного анализа, предназначенного для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [24, 25]. Для численного решения задач течения вязкой несжимаемой жидкости используется имеющийся в ЛОГОС метод SIMPLE, основанный на расщеплении полной системы уравнений Навье–Стокса и последующей итерационной процедуре коррекции давления [1, 21].

4.1. Расчет аэродинамических характеристик турбулентного пограничного слоя на пластине

Рассматривается обтекание плоской пластины потоком несжимаемой жидкости, в результате которого вблизи твердой поверхности образуется пограничный слой. В данной тестовой задаче исследуется пространственное разрешение турбулентного пограничного слоя путем определения такой турбулентной характеристики течения, как коэффициент трения вдоль пластины при различном значении первой расчетной ячейки вблизи твердой поверхности. Коэффициент сравнивается с экспериментальными данными из [26]. Используется декартова система координат xuz , в которой ось x совпадает с направлением течения, а лежащая в одной плоскости с ней ось z направлена в противоположную от наблюдателя сторону.

Число Рейнольдса, характеризующее течение, рассчитывалось по скорости входного потока и длине пластины и составляло $Re = 10^7$. Для дискретизации расчетной области применялись сетки с различным разрешением вблизи твердой поверхности. Параметры сеток представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры расчетных сеток в случае обтекания плоской пластины

Вариант сетки	Коэффициент роста ячеек	y^+	Количество ячеек
1	1,12	1	59590
2	1,12	8	39100
3	1,12	30	15860
4	1,12	100	8243

В ходе моделирования производился стационарный расчет характеристик основных физических полей до момента времени, когда их разность по норме L1 достигала значения 10^{-9} . В качестве схемы дискретизации по пространству использовались: схема QUICK [27] в уравнении сохранения импульса и

противопоточная схема UD [2] в уравнении переноса турбулентных параметров.

На рисунке 2 приведены графики распределения безразмерного коэффициента поверхностного трения $C_f = 2\tau_w / (\rho U^2)$ (τ_w — касательное напряжение на стенке, U — продольная скорость), полученные с помощью модели EARSM в зависимости от сеточного числа Рейнольдса Re_x .

Рассматриваемая в данной работе реализация модели EARSM дает хорошее согласование с экспериментальными данными на всех типах сетки. Наибольшее отклонение

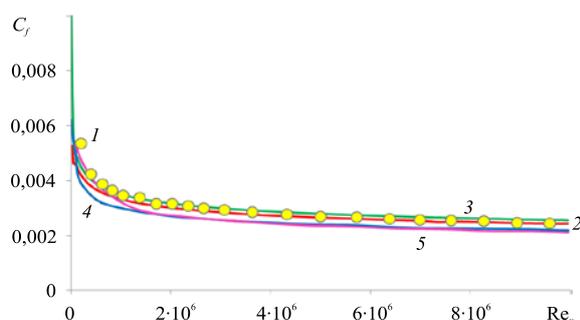


Рис. 2. Распределение коэффициента поверхностного трения: экспериментальное (кривая 1) и вычисленное при различных значениях y^+ : 1 (2), 8 (3), 30 (4), 100 (5)

наблюдается на сетках с $y^+ = 30$ и $y^+ = 100$, поскольку в этих случаях первые расчетные узлы располагаются в переходной области между вязкой и турбулентной частями пограничного слоя, где значение коэффициента трения достаточно сложно определить корректно [18, 20]. Возникновение пространственных осцилляций скорости внутри пограничного слоя не наблюдается ни при одном типе сетки.

4.2. Расчет развитого течения в канале квадратного сечения

Задача исследования развитого течения несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения представляет собой тест, цель которого показать существенное влияние анизотропии турбулентности на основной поток, особым образом изменяющее топологию течения.

Число Рейнольдса, вычисленное по динамической скорости и высоте канала, составляло $Re = 1200$, что соответствовало условиям DNS расчета [28]. Канал имел размеры $0,5 \times 0,5 \times 0,5$. На входе и выходе (в плоскостях xy) выполнялись периодические граничные условия, на верхней и правой боковой стенках — условия симметрии. Течение жидкости обеспечивалось путем задания перепада давления: $\rho^{-1} \partial p / \partial z = 4u_\tau^2 / H = 5,76 \text{ м/с}^2$, где $u_\tau = 1,2 \text{ м/с}$, $H = 1 \text{ м}$. В силу симметрии течения сетка строилась в одной четверти канала со сгущением к твердым стенкам, обеспечивающим значение $y^+ < 1$. В плоскости входного сечения число ячеек составляло 127×127 . Стационарный расчет прекращался при достижении разностей основных характеристик физических полей по норме L1 величины 10^{-8} . Для дискретизации по пространству в уравнении сохранения импульса использовалась схема LUD [2], в уравнении переноса турбулентных параметров — противопоточная схема UD [2].

На рисунках 3, 4 представлены результаты вычислений, полученные по разным моделям. Профили продольной скорости (Рис. 3), нормированной на среднерасходную скорость U_0 , в различных поперечных сечениях канала по моделям EARSM и BSL сравниваются с данными по DNS модели [28]. Согласно рисунку модель EARSM правильно описывает распределение продольной компоненты скорости, поскольку полученные данные хорошо согласуются с результатами DNS расчетов. Структура течения и интенсивность вторичных токов (Рис. 4) по модели EARSM также соответствует данным DNS моделирования. Поле продольной компоненты скорости по модели BSL имеет большую погрешность (Рис. 3), что вызвано учетом лишь одной компоненты тензора напряжений Рейнольдса, а наличие вторичных токов модель и вовсе не способна отобразить, поскольку компоненты скорости U_x, U_y здесь нулевые.

Распределение интенсивности вторичных токов, найденное по модели EARSM (Рис. 4, а) в сечении $z = 0,25 \text{ м}$, сравнивается с распределением по DNS модели [28] (Рис. 4, б). Интенсивность вторичных токов рассчитывалась как $(U_x^2 + U_y^2)^{0,5} / U_0$.

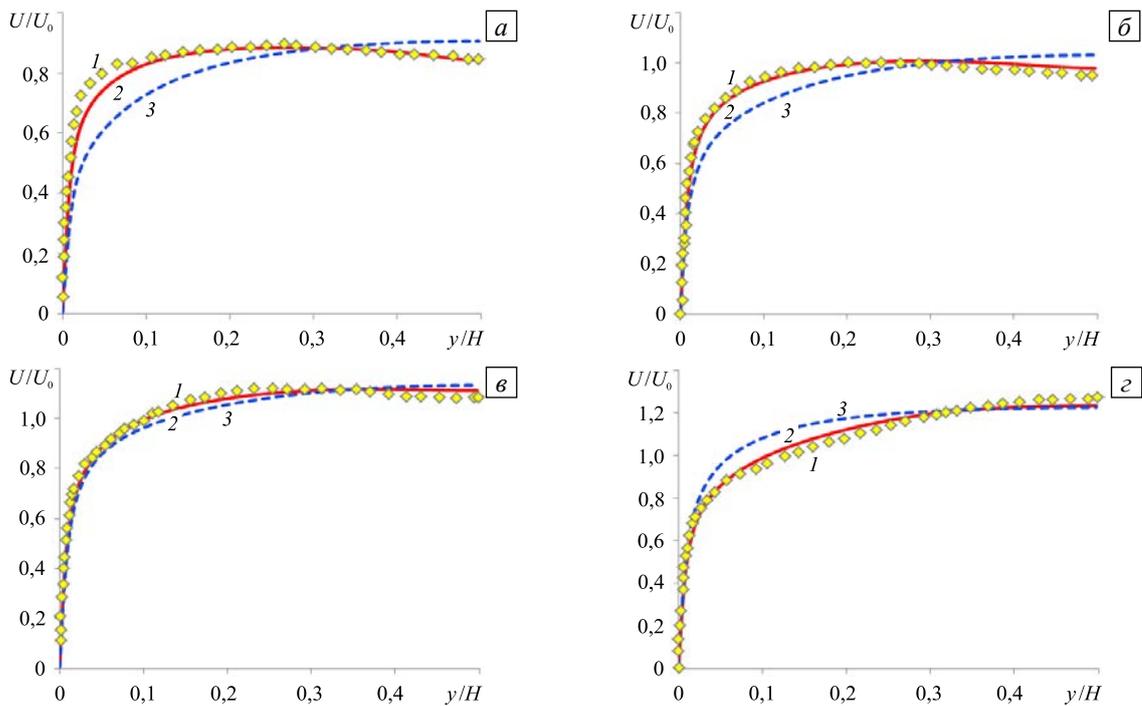


Рис. 3. Профили продольной скорости в четырех сечениях канала $x, \text{ м}$: 0,05 (а); 0,1 (б); 0,2 (в); 0,5 (г); модель DNS [28] (кривая 1), модель EARSM (2), модель BSL (3)

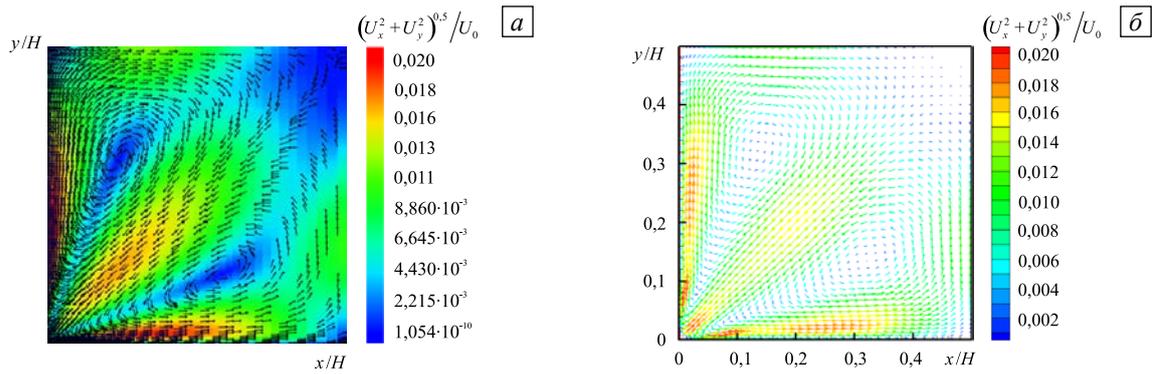


Рис. 4. Интенсивность вторичных токов в поперечном сечении канала $z = 0,25$ м: модель EARSM (а); модель DNS (б)

4.3. Расчет развитого течения в асимметричном диффузоре

Гидродинамический расчет в несимметричном диффузоре с прямоугольным сечением — достаточно сложный тест, поскольку проявляется анизотропия течения жидкости, что типично для прямоугольных каналов. Кроме того, вследствие отрицательного градиента давления в канале образуется обширная отрывная зона, нахождение положения и формы которой, в свою очередь, является непростой задачей.

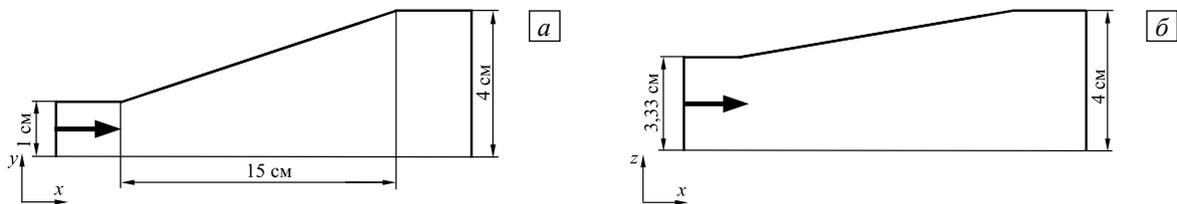


Рис. 5. Геометрия расчетной области: вид сбоку (а), вид сверху (б); стрелкой обозначено направление течения

Параметры расчета (Рис. 5) удовлетворяли условиям эксперимента [29]. Для обеспечения развитого профиля скорости на входе в диффузор начальный участок в расчетной схеме был удлинен и составил 0,2 м. Рассматривались сетки с различным размером первой пристеночной ячейки (Табл. 2). Число Рейнольдса, рассчитанное по среднерасходной скорости и высоте канала, равнялось $Re = 10^4$. В процессе моделирования производился стационарный расчет, который прекращался при достижении разностей величин, характеризующих основные параметры физических полей, по норме L1 значения 10^{-7} . Для дискретизации по пространству использовалась схема QUICK [27]. На рисунке 6 изображено поле скорости в нескольких поперечных сечениях диффузора, найденное экспериментально и рассчитанное с помощью моделей EARSM и BSL.

Таблица 2. Параметры сеток при исследовании развитого течения в асимметричном диффузоре

Вариант сетки	y^+	Количество ячеек
1	1	4800000
2	8	1290000
3	15	850000

Как показывает рисунок 6, результаты по модели EARSM лучше, чем полученные по модели BSL, согласуются с экспериментальными данными. Они верно отражают положение зоны отрыва от верхней стенки диффузора, что наблюдается и в эксперименте. Также хорошо определяются форма и размер зоны отрыва внутри асимметричного диффузора.

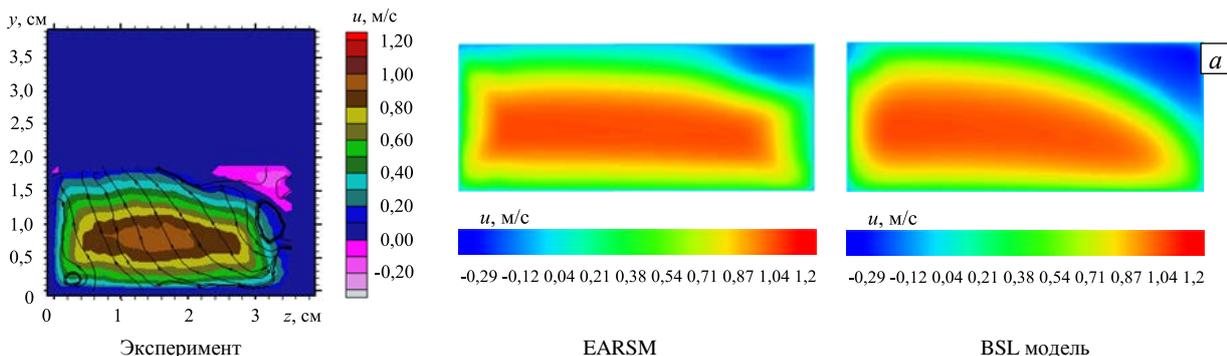


Рис. 6. Профили продольной скорости в сечениях диффузора x , м: 0,04 (а), 0,08 (б) и 0,12 (в)

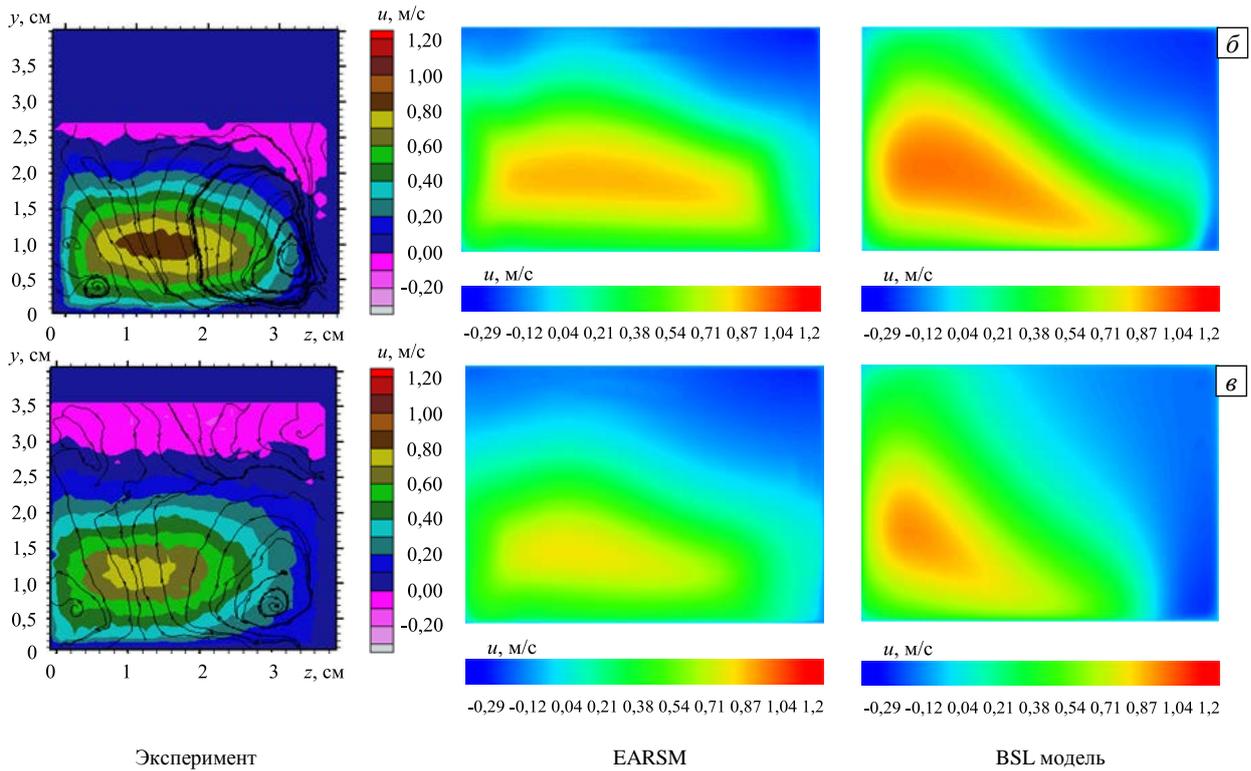


Рис. 6. Продолжение

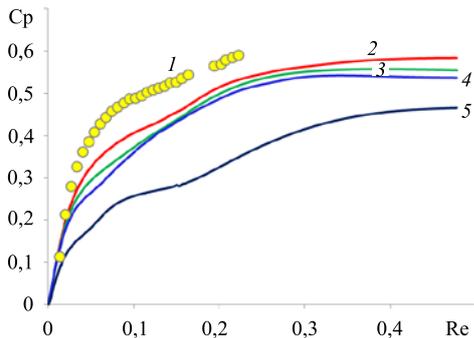


Рис. 7. Распределение безразмерного коэффициента давления: экспериментальные данные (кривая 1); расчет по модели EARSM при $y^+ = 1$ (2), $y^+ = 8$ (3) и $y^+ = 15$ (4); расчет по модели BSL, $y^+ = 1$ (5)

На рисунке 7 приведены расчетные и экспериментальные распределения коэффициента давления жидкости на нижней стенке диффузора и показано, что модель EARSM позволяет отыскивать наиболее близкое к экспериментальному значение этого коэффициента. На всех трех сетках представленный численный алгоритм EARSM с универсальными пристеночными функциями позволил получить результаты без осцилляций физических величин в области пограничного слоя.

5. Заключение

Результаты показывают, что алгоритм численной реализации модели EARSM, включающей универсальные пристеночные функции, обеспечивает устойчивое решение турбулентного течения несжимаемой жидкости в области пограничного слоя при любом значении безразмерного

сеточного параметра y^+ , не требуя значительного увеличения объема вычислений. Эффективность работы данного алгоритма продемонстрирована на нескольких тестовых задачах.

Исследование обтекания плоской пластины при различном сеточном разрешении вблизи твердой поверхности показало эффективность введения универсальных пристеночных функций. Даже на сетках, где первый узел лежит в переходной области пограничного слоя ($y^+ = 30$, $y^+ = 100$), погрешность в определении коэффициента трения не превысила 10%, а такой прием, как расчет компонент тензора рейнольдсовых напряжений на гранях сетки вместо стандартного внутри ячеек, и модифицированное вычисление градиентов скоростей обеспечили отсутствие осцилляций в поле решения при любых значениях y^+ .

В целом использование модели EARSM приводит к улучшению точности описания асимметричных турбулентных течений по сравнению с моделями, основанными на гипотезе Буссинеска. Это хорошо иллюстрируют результаты решения задач течения в канале квадратного сечения и асимметричном диффузоре. Структура течения, выявленная на основе данной модели, лучше согласуется с экспериментом, чем структура, полученная согласно RANS модели BSL, а применение представленного численного алгоритма позволяет исключить осцилляции в ней, а также обеспечить устойчивое решение даже на сетках с сильно изменяющимся разрешением пограничного слоя.

Модель EARSМ с предложенным алгоритмом ее реализации хорошо зарекомендовала себя при решении ряда индустриальных задач вычислительной гидродинамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-07-12079-офи_м).

Литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
2. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: Физматлит, 2008. – 364 с.
3. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во БГТУ, 2001. – 108 с.
4. Снегирев А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 143 с.
5. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. – La Canada, CA: DCW Industries, 1998. – 362 p.
6. Menter F.R., Garbaruk A.V., Egorov Y. Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows // Proc. of 3rd European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), Versailles, July 6-9th, 2009. – 14 p.
7. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. – 1994. – Vol. 32, No. 8. – P. 1598-1605. DOI
8. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 227. – P. 245-272. DOI
9. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech. – 1975. – Vol. 68, No. 3. – P. 537-566. DOI
10. Wallin S., Johansson A.V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows // J. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 403. – P. 89-132. DOI
11. Hellsten A. New two-equation turbulence model for aerodynamics applications / Report A-21, PhD Dissertation. – Espoo, Finland: Helsinki University of Technology Laboratory of Aerodynamics, 2004.
12. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // Z. Angew. Math. Mech. – 1976. – Vol. 56. – P. 219-221.
13. Rodi W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence / PhD Dissertation in Mechanical Engineering. – London: Imperial College, 1972. – 310 p.
14. Jaramillo J.E., Pérez-Segarra C.D., Oliva A., Claramunt K. Analysis of different RANS models applied to turbulent forced convection // Int. J. Heat Mass Tran. – 2007. – Vol. 50, No. 19-20. – P. 3749-3766. DOI
15. Louda P., Kozel K., Přihoda J., Beneš L., Kopáček T. Numerical solution of incompressible flow through branched channels // Comput. Fluids. – 2011. – Vol. 46, No. 1. – P. 318-324. DOI
16. Beneš L., Louda P., Kozel K., Keslerová R., Štigler J. Numerical simulations of flow through channels with T-junction // Appl. Math. Comput. – Vol. 219, No. 13. – P. 7225-7235. DOI
17. Jeyapaul E. Turbulent flow separation in 3-D asymmetric diffusers / NASA postdoctoral fellow. – Langley research center, 2010. – 69 p. (URL: http://hiroakinishikawa.com/niacfds/presentationfiles/Elbert_NIAtalk_11292011.pdf).
18. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Comput. Method. Appl. M. – 1974. – Vol. 3, No. 2. – P. 269-289. DOI
19. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of experience with the SST turbulent model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed. by K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers. – Begell House Inc., 2003. – 8 p. (URL: http://cfm.mace.manchester.ac.uk/flomania/pds_papers/file_pds-1068134610Menter-SST-paper.pdf).
20. Grotjans H., Menter F.R. Wall functions for industrial applications // Proc. of Computational Fluid Dynamics'98, ECCOMAS, ed. by K.D. Papailiou – U.K., Wiley: Chichester, 1998. – Vol. 1 (2). – P. 1112-1117.
21. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows / Thesis submitted for the degree of doctor. – Department of Mechanical Engineering. – London: Imperial College, 1996. – 394 p.
22. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. – М.: Физматлит, 2010. – 488 с.
23. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. – 1994. – Vol. 32, No. 8. – P. 1598-1605. DOI
24. Погосян М.А., Савельских Е.П., Стрелец Д.Ю., Корнев А.В. Отечественные суперкомпьютерные технологии в авиационной промышленности // Наука и технологии в промышленности. – 2012. – № 2. – С. 26-35.
25. Погосян М.А., Савельских Е.П., Шагалиев Р.М., Козелков А.С., Стрелец Д.Ю., Рябов А.А., Корнев А.В., Дерюгин Ю.Н., Стридонов В.Ф., Циберев К.Б. Применение отечественных суперкомпьютерных технологий для создания перспективных образцов авиационной техники // ВАИТ. Серия: Матем. моделир. физич. процессов. – 2013. – № 2. – С. 3-18.
26. Wiegardt K., Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure / NACA TM 1314, 1951. – 46 p. (URL: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/fpturb/NACA-TM-1314-Wiegardt-1951.pdf>).
27. Leonard B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Method. Appl. M. – 1979. – Vol. 19, No. 1. – P. 59-98. DOI
28. Raiesi H., Piomelli U., Pollard A. Evaluation of turbulence models using direct numerical and large-eddy simulation data // J. Fluids Eng. – 2011. – Vol. 133, No. 2. – P. 021203. DOI
29. Cherry E.M., Elkins C.J., Eaton J.K. Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows // Int. J. Heat Fluid Fl. – 2008. – Vol. 29, No. 3. – P. 803-811. DOI

References

1. Roache P.J. *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publishers, 1976. 446 p.
2. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Modelirovanie krupnykh vikhrei v raschetakh turbulentnykh techenii* [Large-eddy simulation of turbulent flows]. Moscow, Fizmatlit publ., 2008. 364 p.

3. Belov I.A., Isaev S.A. *Modelirovanie turbulentnykh techenii* [Simulation of turbulent flows]. St. Petersburg, BGTU publ., 2001. 108 p.
4. Snegirev A.Yu. *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniia v tekhnicheskoi fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techenii* [Computer-intensive simulations in technical physics. Modeling and simulations of turbulent flows]. St. Petersburg, St.Petersburg Polytechnic University publ., 2009. 143 p.
5. Wilcox D.C. *Turbulence modeling for CFD*. La Canada, CA, DCW Industries, 1998. 362 p.
6. Menter F.R., Garbaruk A.V., Egorov Y. *Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows Proc. of 3rd European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), Versailles, July 6-9th, 2009, 14 p.*
7. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598-1605. DOI
8. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 227, pp. 245-272. DOI
9. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566. DOI
10. Wallin S., Johansson A.V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 2000, vol. 403, pp. 89-132. DOI
11. Hellsten A. *New two-equation turbulence model for aerodynamics applications*. Report A-21, PhD Dissertation. Espoo, Finland, Helsinki University of Technology Laboratory of Aerodynamics, 2004.
12. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1976, vol. 56, pp. 219-221.
13. Rodi W. *The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence*. PhD Dissertation in Mechanical Engineering. London, Imperial College, 1972, 310 p.
14. Jaramillo J.E., Pérez-Segarra C.D., Oliva A., Claramunt K. Analysis of different RANS models applied to turbulent forced convection. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2007, vol. 50, no. 19-20, pp. 3749-3766. DOI
15. Louda P., Kozel K., Příhoda J., Beneš L., Kopáček T. Numerical solution of incompressible flow through branched channels. *Comput. Fluids.*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 318-324. DOI
16. Beneš L., Louda P., Kozel K., Keslerová R., Štigler J. Numerical simulations of flow through channels with T-junction. *Appl. Math. Comput.*, vol. 219, no. 13, pp. 7225-7235. DOI
17. Jeyapaul E. *Turbulent flow separation in 3-D asymmetric diffusers*. NASA postdoctoral fellow. Langley research center, 2010, 69 p. (URL: http://hiroakinishikawa.com/niacfds/presentationfiles/Elbert_NIAtalk_11292011.pdf).
18. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Method. Appl. M.*, 1974, vol. 3, no. 2, pp. 269-289. DOI
19. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of experience with the SST turbulent model Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed. by K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers. Begell House Inc., 2003. 8 p. (URL: http://cfm.mace.manchester.ac.uk/flomania/pds_papers/file_pds-1068134610Menter-SST-paper.pdf).
20. Grotjans H., Menter F.R. *Wall functions for industrial applications Proc. of Computational Fluid Dynamics'98, ECCOMAS, ed. by K.D. Papailiou U.K., Wiley: Chichester, 1998, vol. 1 (2), pp. 1112-1117.*
21. Jasak H. *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. Thesis submitted for the degree of doctor. Department of Mechanical Engineering. London, Imperial College, 1996. 394 p.
22. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Techeniia i teploobmen v kanalakh i vrashchaiushchikhsia polostiakh* [Flows and heat transfer in channels and rotating cavities]. Moscow, Fizmatlit publ., 2010. 488 p.
23. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598-1605. DOI
24. Pogosyan M.A., Savel'skikh E.P., Strelec D.Yu., Kornev A.V. Otechestvennye superkomp'uternye tekhnologii v aviatsionnoi promyshlennosti [Domestic supercomputer technology in the aircraft]. *Nauka i tekhnologii v promyshlennosti – Science and Technology in Industry*, 2012, no. 2, pp. 26-35.
25. Pogosyan M.A., Savel'skikh E.P., Shagaliev R.M., Kozelkov A.S., Strelets D.Yu., Ryabov A.A., Kornev A.V., Deryugin Yu.N., Spiridonov V.F., Tsiberev K.B. *Primenenie otechestvennykh superkomp'uternykh tekhnologii dlia sozdaniia perspektivnykh obraztsov aviatsionnoi tekhniki*. [Application of the domestic supercomputation technology to the development advanced models of aeronautical technique]. *VANT. Mathematical Simulation of Physical Processes*, 2013, no. 2, pp. 3-18.
26. Wieghardt K., Tillmann W. *On the turbulent friction layer for rising pressure*. NACA TM 1314, 1951, 46 p. (URL: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/fturb/NACA-TM-1314-Wieghardt-1951.pdf>).
27. Leonard B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Method. Appl. M.*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 59-98. DOI
28. Raiesi H., Piomelli U., Pollard A. Evaluation of turbulence models using direct numerical and large-eddy simulation data. *J. Fluids Eng.*, 2011, vol. 133, no. 2, 021203. DOI
29. Cherry E.M., Elkins C.J., Eaton J.K. Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 2008, vol. 29, no. 3, pp. 803-811. DOI

Поступила в редакцию 31.10.2013; опубликована в электронном виде 31.03.2014

Сведения об авторах

Козелков Андрей Сергеевич, кфмн, нач.лаб., Институт теоретической и математической физики РФЯЦ-ВНИИЭФ, 607188, Нижегородская обл., Саров, пр. Мира, д. 37; E-mail: askozelkov@mail.ru

Курулин Вадим Викторович, мнс, Институт теоретической и математической физики РФЯЦ-ВНИИЭФ; E-mail: V.V.Kurulin@itmf.vniief.ru

Пучкова Ольга Леонидовна, мнс, Институт теоретической и математической физики РФЯЦ-ВНИИЭФ; E-mail: puch9@yandex.ru

Лашкин Сергей Викторович, нс, Институт теоретической и математической физики РФЯЦ-ВНИИЭФ; E-mail: S.V.Lashkin@itmf.vniief.ru