

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.4

УДК 539.3

СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А.В. Андреев

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Российская Федерация

Рассматривается класс одномерных сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с обобщенными ядрами и комплексно-сопряженной неизвестной функцией, описывающий краевые задачи теории упругости в двумерных областях с особыми точками. В рамках теории функций комплексной переменной и на основе аппарата теории специальных функций разработан метод определения особенностей степенно-логарифмического типа в решении интегрального уравнения. С помощью асимптотического анализа характеристической части СИУ задача отыскания показателя степенно-логарифмической особенности решения на конце промежутка интегрирования сведена к группе независимых трансцендентных уравнений относительно этого показателя. Проведен анализ построенных уравнений для комплексного и вещественного показателей особенности, выполнено сопоставление с полученными ранее результатами для классической степенной асимптотики решения. Показано, что степенно-логарифмическая особенность с комплексным показателем может иметь место только в случае, когда краевая задача не разделяется на нормальную и сдвиговую подзадачи, а для вещественного показателя особенности логарифмическое усиление не реализуется в общем случае. Представлены результаты расчетов показателя комплексной степенно-логарифмической особенности для двумерной задачи теории упругости при наличии трещины, выходящей под произвольным углом на границу раздела двух сред.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, обобщенное ядро, степенно-логарифмическая асимптотика, концентрация упругих напряжений, комплексный и вещественный показатель особенности

POWER-LOGARITHMIC SINGULARITIES OF SOLUTION FOR A CLASS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN TWO-DIMENSIONAL ELASTICITY

A.V. Andreev

Joint Institute for High Temperatures RAS, Moscow, Russian Federation

The study is concerned with a class of one-dimensional singular integral equations (SIE) with generalized kernels and the complex conjugate unknown function that describes the elasticity problems in two-dimensional domains with singular points. Within the theory of complex variable functions and based on the formalism of the theory of special functions, a method for determination of the power-logarithmic type singularity in the solution of the integral equation is developed. By means of an asymptotic analysis for the characteristic part of a SIE, the problem of determining a solution singularity exponent at the end of the integration interval is reduced to a group of independent transcendental equations for this exponent. The analysis of the obtained equations for complex and real exponents is carried out, and a comparison with the previous results for classical power-type solution asymptotics is performed. It is shown that the power-logarithmic singularity with a complex exponent can only take place when the boundary value problem is not divided into normal and shear subproblems, and for the real exponent the logarithmic intensification of singularity is not realized in the general case. Numerical results for the complex power-logarithmic singularity exponent are presented for the two-dimensional elasticity problem of a crack approaching the interface at arbitrary angle.

Key words: singular integral equation, generalized kernel, power and power-logarithmic asymptotics, elastic stress concentration, complex and real singularity exponent

1. Введение

В теории упругости при оценке влияния концентрации напряжений одной из центральных проблем является построение собственных решений задач вблизи особых точек, где имеет место неограниченный рост упругих напряжений. Ранее проводились многочисленные прямые исследования двумерных краевых задач со степенной сингулярной асимптотикой упругого поля напряжений при различных геометрических и механических параметрах задач, условиях нагружения и граничных условиях. При этом использовались метод разделения переменных для бигармонической функции напряжений Эри, метод комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили, а также интегральное преобразование Меллина [1].

В данной работе предложен подход к построению сингулярных степенно-логарифмических решений плоской теории упругости на основе метода сингулярных интегральных уравнений, что позволило выявить некоторые общие свойства таких решений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (СИУ) второго рода

$$A(\eta)\phi(\eta) + B(\eta) \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - \eta} + \int_{-1}^1 K_{gen}(\xi, \eta)\phi(\xi)d\xi + \int_{-1}^1 L_{gen}(\xi, \eta)\overline{\phi(\xi)}d\xi +$$

$$+\int_{-1}^1 K(\xi, \eta)\phi(\xi)d\xi + \int_{-1}^1 L(\xi, \eta)\overline{\phi(\xi)}d\xi = p(\eta), \quad -1 < \eta < 1, \quad (1)$$

где $\phi(\xi)$ и $\overline{\phi(\xi)}$ — соответственно неизвестная и комплексно-сопряженная с ней функция, а правая часть $p(\eta)$ — заданная на отрезке $[-1, 1]$ функция. Функции $p(\eta)$, $A(\eta)$ и $B(\eta)$ ограничены при $\eta \rightarrow \pm 1$, причем $A(\eta)$ и $B(\eta)$ имеют пределы при $\eta \rightarrow \pm 1$, ядра $K(\xi, \eta)$ и $L(\xi, \eta)$ удовлетворяют условию Гельдера по обоим переменным, а ядра $K_{gen}(\xi, \eta)$ и $L_{gen}(\xi, \eta)$ обладают неподвижными особенностями на концах промежутка интегрирования и неограниченно возрастают, когда вещественные параметры ξ и η одновременно стремятся к одному из концов отрезка $[-1, 1]$ ($\xi = \eta \rightarrow \pm 1$). Функции $A(\eta)$, $B(\eta)$, ядра уравнения, а также правая часть $p(\eta)$ могут быть как вещественными, так и комплексными.

Будем полагать, что ядра $K_{gen}(\xi, \eta)$ и $L_{gen}(\xi, \eta)$ являются обобщенными ядрами типа Коши [2], имеющими неподвижные особенности вида x^{-1} ($x \rightarrow 0$) при $\xi = \eta \rightarrow \pm 1$, и представимы в форме

$$K_{gen}(\xi, \eta) = \sum'_{p, j, k, r} a_k(\eta) \frac{(1+\xi)^p (1+\eta)^j}{(\xi - z_r^*)^{p+j+1}} + \sum'_{l, m, n, s} b_l(\eta) \frac{(1-\xi)^m (1-\eta)^n}{(\xi - z_s^{**})^{m+n+1}}, \quad (2)$$

$$L_{gen}(\xi, \eta) = \sum''_{p, j, k, r} c_k(\eta) \frac{(1+\xi)^p (1+\eta)^j}{(\xi - z_r^*)^{p+j+1}} + \sum''_{l, m, n, s} d_l(\eta) \frac{(1-\xi)^m (1-\eta)^n}{(\xi - z_s^{**})^{m+n+1}}. \quad (3)$$

Здесь: индексы и показатели степени принимают значения $p, j, k, l, m, n, r, s = 0, 1, 2, \dots$ и изменяются независимо в рамках каждой из сумм \sum' , \sum'' ; заданные функции $a_k(\eta)$, $b_l(\eta)$, $c_k(\eta)$ и $d_l(\eta)$ имеют конечные пределы при $\eta \rightarrow \pm 1$; переменные z_r^* и z_s^{**} зависят от параметра η согласно формулам

$$z_r^*(\eta) = -1 + (1+\eta)e^{i\theta_r}, \quad 0 < \theta_r < 2\pi; \quad z_s^{**}(\eta) = 1 + (1-\eta)e^{i\theta_s}, \quad -\pi < \theta_s < \pi; \quad i^2 = -1. \quad (4)$$

Обобщенные ядра в форме (2), (3) характерны для большого числа прикладных задач математической физики и механики, в которых граничные условия задаются на кусочно-гладких контурах с угловыми точками (например, для двумерных задач линейной теории упругости, см. [3, 4]).

Хорошо известно [2, 5–8], что для степенной асимптотики решения наличие в ядрах СИУ неподвижных особенностей на концах промежутка интегрирования существенным образом обуславливает поведение решения вблизи этих концов. В частности, в отсутствие неподвижных особенностей решение СИУ (1) имеет только корневые степенные особенности при $A \equiv 0$ либо — для уравнения второго рода — комплексные степенные особенности при фиксированных значениях A и B [5]. И если в этих двух случаях теория СИУ вида (1) изучена хорошо [5, 9], то теория СИУ с обобщенными ядрами не получила к настоящему времени должного развития. Исключение составляет монография [6], в которой рассматриваются вопросы теории СИУ с обобщенным ядром $K_{gen}(\xi, \eta)$ весьма общего вида при $L_{gen}(\xi, \eta) \equiv 0$ в пространстве функций, имеющих степенные особенности на концах промежутка интегрирования. В работах [2, 7] излагаются конкретные методики нахождения показателей степенной особенности решения для частных случаев СИУ (1) и обобщенного ядра (2) при $L_{gen}(\xi, \eta) \equiv 0$, то есть при отсутствии сопряженной неизвестной функции в характеристической части СИУ. В [8] эти методики обобщаются на случай степенных особенностей решения для СИУ в форме (1) с ядрами (2), (3), и выявляется существенная роль сопряженной неизвестной функции в характеристической части СИУ.

Следует подчеркнуть, что определение особенностей решения упругой задачи и их последующий учет при его численном построении особенно важны в случае, когда необходимо с достаточной точностью построить главные члены асимптотического разложения решения вблизи концов промежутка интегрирования. В связи с этим проводились многочисленные прямые исследования особенностей напряжений в двумерных задачах [см. обзоры 1, 10, 11], при этом решение некоторых трехмерных задач представляется в виде суперпозиции двумерного и антиплоского решений [12].

Положим, что решение СИУ (1) принадлежит классу функций, имеющих на концах промежутка интегрирования интегрируемые особенности степенно-логарифмического типа, которые обуславливаются как подвижной особенностью интеграла в смысле главного значения, так и неподвижными особенностями ядер $K_{gen}(\xi, \eta)$ и $L_{gen}(\xi, \eta)$. Выделяя явным образом степенно-логарифмическую асимптотику, представим такого рода функцию в форме

$$\phi(\xi) = \phi_{+1}(1-\xi)^\alpha \ln(1-\xi) + \phi_{-1}(1+\xi)^\beta \ln(1+\xi) + \phi_0(\xi), \quad -1 < \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta < 0. \quad (5)$$

Здесь: α и β — отыскиваемые показатели особенности, в общем случае комплексные; ϕ_{+1} и ϕ_{-1} — некоторые отличные от нуля комплексные постоянные; $\phi_0(\xi)$ — функция, обращающаяся в нуль на концах промежутка интегрирования. Отметим, что все упоминавшиеся выше исследования СИУ отвечают главной части представления (5), в которой логарифмические множители отсутствуют.

3. Некоторые вспомогательные результаты

Основной метод отыскания особенностей решения СИУ (1) основан на асимптотическом анализе поведения характеристической части СИУ вблизи концов промежутка интегрирования [5]. В рассматриваемом СИУ его характеристическую часть составляют четыре первых члена, включающие, как видно, интеграл в смысле главного значения, интегралы с обобщенными ядрами (2), (3) и комплексно сопряженной неизвестной функцией. С использованием (5) запишем отдельно характеристические части СИУ (1) на левом — $I_{sing}^-(\eta)$, и правом — $I_{sing}^+(\eta)$, концах промежутка интегрирования:

$$I_{sing}^-(\eta) = \phi_{-1} \left\{ A(\eta)(1+\eta)^\beta \ln(1+\eta) + B(\eta) \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)^\beta \ln(1+\xi)}{\xi-\eta} d\xi + \int_{-1}^1 K_{gen}(\xi, \eta)(1+\xi)^\beta \ln(1+\xi) d\xi \right\} + \overline{\phi_{-1}} \int_{-1}^1 L_{gen}(\xi, \eta)(1+\xi)^\beta \ln(1+\xi) d\xi, \quad (6)$$

$$I_{sing}^+(\eta) = \phi_{+1} \left\{ A(\eta)(1-\eta)^\alpha \ln(1-\eta) + B(\eta) \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^\alpha \ln(1-\xi)}{\xi-\eta} d\xi + \int_{-1}^1 K_{gen}(\xi, \eta)(1-\xi)^\alpha \ln(1-\xi) d\xi \right\} + \overline{\phi_{+1}} \int_{-1}^1 L_{gen}(\xi, \eta)(1-\xi)^\alpha \ln(1-\xi) d\xi. \quad (7)$$

Как будет показано далее, эти характеристические части неограниченно возрастают, когда $\eta \rightarrow -1$ и $\eta \rightarrow +1$ соответственно, в то время как другие члены СИУ (1), возникающие при подстановке в него представления (5), остаются ограниченными. Ограниченность членов, содержащих $\phi_0(\xi)$, немедленно следует из свойств интегралов типа Коши для обращаемой на концах промежутка в нуль их плотности [5]. Отметим, что наиболее общий подход к исследованию интегрального уравнения с сопряженными неизвестными предполагает рассмотрение системы уравнений относительно двух неизвестных функций $\phi(\xi)$ и $\overline{\phi(\xi)}$ [5]. Первое уравнение такой системы — это само СИУ (1), а второе уравнение получается переходом в (1) к сопряженным значениям и соответствующим характеристическим частям $I_{sing}^-(\eta)$ и $I_{sing}^+(\eta)$.

Проведем анализ асимптотики характеристических частей (6) и (7) при $\eta \rightarrow \mp 1$ ($z_v^* \rightarrow -1$, $z_s^{**} \rightarrow +1$), который, как будет показано ниже, откроет путь к определению показателей особенности неизвестной функции. В этих целях построим мультипликативные представления главных членов интеграла в смысле главного значения и интегралов, содержащих обобщенные ядра (2) и (3), при $\eta \rightarrow \mp 1$.

Итак, последовательно интегрируя по частям и учитывая формулу дифференцирования по параметру и табличные значения интегралов (см. с. 195 в [13] и с. 265 в [14]), найдем следующие выражения для интегралов со степенно-логарифмической весовой функцией:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 \pm \xi)^\lambda \ln(1 \pm \xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{2^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2(1 \pm z)} \left[\pm {}_3F_2 \left(\lambda+1, 1, \lambda+1; \lambda+2, \lambda+2; \frac{2}{1 \pm z} \right) \mp \mp(\lambda+1) \ln 2F \left(1, \lambda+1, \lambda+2, \frac{2}{1 \pm z} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь: $F(a, b, c, z)$ и ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; z)$ — соответственно гипергеометрическая и обобщенная гипергеометрическая функции. Используя в формуле ${}_3F_2(a, b, c; a+1, b+1; z) = [bF(a, c, a+1, z) - aF(b, c, b+1, z)]/(b-a)$ (см. с. 419, [14]) значение предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z^\varepsilon - 1)/\varepsilon = \ln z$, а также частные значения и функциональные соотношения для гипергеометрической и гамма- функций [15], получим из (8) следующие представления главных членов интеграла типа Коши вблизи концов промежутка интегрирования, обозначаемых ниже как *l.t.*:

$$l.t. \left\{ \int_{z \rightarrow -1}^1 \frac{(1+\xi)^p \ln(1+\xi)}{\xi-z} d\xi \right\} = -\frac{\pi e^{\mp i\pi p}}{\sin(\pi p)} \left\{ (1+z)^p \ln(1+z) \right\} \Big|_{z \rightarrow -1} + \frac{\pi^2 e^{\mp i\pi p}}{\sin(\pi p)} [\operatorname{ctg}(\pi p) \pm i] \left\{ (1+z)^p \right\} \Big|_{z \rightarrow -1},$$

$$z \notin [-1, 1], \quad (9)$$

$$l.t. \left\{ \int_{z \rightarrow +1}^1 \frac{(1-\xi)^\sigma \ln(1-\xi)}{\xi-z} d\xi \right\} = \frac{\pi e^{\pm i\pi \sigma}}{\sin(\pi \sigma)} \left\{ (1-z)^\sigma \ln(1-z) \right\} \Big|_{z \rightarrow +1} - \frac{\pi^2 e^{\mp i\pi \sigma}}{\sin(\pi \sigma)} [\operatorname{ctg}(\pi \sigma) \pm i] \left\{ (1-z)^\sigma \right\} \Big|_{z \rightarrow +1},$$

$$z \notin [-1, 1]. \quad (10)$$

В представлении (9) верхние знаки следует выбирать при $\operatorname{Im} z \geq 0$, а нижние — при $\operatorname{Im} z < 0$; в представлении же (10) верхние знаки соответствуют $\operatorname{Im} z > 0$, а нижние — $\operatorname{Im} z \leq 0$. Отметим, что здесь можно было бы воспользоваться известными из [9] выражениями для главных частей интегралов типа Коши со степенно-логарифмической плотностью. Однако в рамках используемого подхода благодаря правилу дифференцирования гипергеометрической функции [15] становится очевидной возможность вычисления главных частей в производных интегралов типа Коши по параметру z на основе асимптотических представлений (9) и (10).

Из формулы Сохоцкого–Племеля $2\Phi(x) = \Phi^+(x) + \Phi^-(x)$ [5] и соотношений (9), (10) для главных частей интеграла в смысле главного значения следуют формулы:

$$l.t. \left\{ \int_{\eta \rightarrow -1}^1 \frac{(1+\xi)^\beta \ln(1+\xi)}{\xi-\eta} d\xi \right\} = -\pi \operatorname{ctg}(\pi\beta) \left\{ (1+\eta)^\beta \ln(1+\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \pi^2 [1 + \operatorname{ctg}^2(\pi\beta)] \left\{ (1+\eta)^\beta \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1}, \quad (11)$$

$$l.t. \left\{ \int_{\eta \rightarrow +1}^1 \frac{(1-\xi)^\alpha \ln(1-\xi)}{\xi-\eta} d\xi \right\} = \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha) \left\{ (1-\eta)^\alpha \ln(1-\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow +1} - \pi^2 [1 + \operatorname{ctg}^2(\pi\alpha)] \left\{ (1-\eta)^\alpha \right\} \Big|_{\eta \rightarrow +1}. \quad (12)$$

Интегралы от членов ядер (2) и (3), степени знаменателей которых превышают единицу, представим, воспользовавшись формулой дифференцирования интеграла типа Коши по параметру z и вспомогательными соотношениями:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(\xi) d\xi}{(\xi-z)^s} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \int_{-1}^1 \frac{w(\xi) d\xi}{\xi-z} \quad (s = 2, 3, \dots); \quad (13)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} (1+z)^\rho = P_n(\rho) (1+z)^{\rho-n}; \quad (14)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} [(1+z)^\rho \ln(1+z)] = P_n(\rho) [S_n(\rho) + \ln(1+z)] (1+z)^{\rho-n}; \quad (15)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} (1-z)^\sigma = (-1)^n P_n(\sigma) (1-z)^{\sigma-n}; \quad (16)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^\sigma \ln(1-z)] = (-1)^n P_n(\sigma) [S_n(\sigma) + \ln(1-z)] (1-z)^{\sigma-n}; \quad (17)$$

$$S_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda-k+1}, \quad S_0(\lambda) \equiv 0; \quad (18)$$

$$P_n(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) = \prod_{k=1}^n (\lambda-k+1), \quad P_0(\lambda) \equiv 1. \quad (19)$$

На основе (9), а также (5) и (13)–(15) для интеграла от общего члена первого из рядов в (2) со степенно-логарифмическим весом (второй ряд ограничен при $\eta \rightarrow -1$) после промежуточных выкладок, которые опускаются, получим

$$l.t. \left\{ \int_{\eta \rightarrow -1}^1 a_k(\eta) \frac{(1+\xi)^p (1+\eta)^j}{(\xi-z_r^*(\eta))^{p+j+1}} (1+\xi)^\beta \ln(1+\xi) d\xi \right\} = -a_k (-1) \frac{\pi e^{-i\pi\beta} e^{i\theta_r(\beta-j)}}{(p+j)! \sin(\pi\beta)} P_{p+j}(\beta+p) \times$$

$$\times \left[\left\{ (1+\eta)^\beta \ln(1+\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} - \left[\pi(\operatorname{ctg}(\pi\beta) + i) - S_{p+j}(\beta+p) - i\theta_r \right] \left\{ (1+\eta)^\beta \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} \right]. \quad (20)$$

Аналогично из (12) с использованием (4), (13), (16) и (17) при $\eta \rightarrow +1$ имеем:

$$l.f. \left\{ \int_{-1}^1 b_l(\eta) \frac{(1-\xi)^m (1-\eta)^n}{(\xi - z_s^{**}(\eta))^{m+n+1}} (1-\xi)^\alpha \ln(1-\xi) d\xi \right\} = b_l(+1) \frac{\pi(-1)^m e^{i\theta_s(\alpha-n)}}{(m+n)! \sin(\pi\alpha)} P_{m+n}(\alpha+m) \times \\ \times \left[\left\{ (1-\eta)^\alpha \ln(1-\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow +1} - [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\alpha) + i) - S_{m+n}(\alpha+m) - i(\pi + \theta_s)] \left\{ (1-\eta)^\alpha \right\} \Big|_{\eta \rightarrow +1} \right]. \quad (21)$$

Как видно, в определениях вспомогательных функций (18) и (19) представления вида (20) и (21) для интегралов от общих членов рядов из (2), (3) охватывают и случаи $p = j = 0$, $m = n = 0$ (см. также (9), (10)). Выражения для главных частей интегралов от общих членов рядов в (3) с сопряженным степенно-логарифмическим весом (см. (6) и (7)) идентичны выражениям (20) и (21) с точностью до замен α и β на сопряженные — $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, а a_k и b_l — на c_k и d_l соответственно. Суммирование всех этих представлений по параметрам соответствующего ряда из (2), (3) совместно с выражениями (11) и (12) дает возможность аналитически вычислить главные части всех интегралов, входящих в (6) и (7), и отделить неограниченно возрастающие при $\eta \rightarrow \mp 1$ ($-1 < \operatorname{Re} \alpha$, $\operatorname{Re} \beta < 0$) множители.

4. Уравнения относительно показателей особенности

Предыдущий раздел предоставляет инструментарий для получения уравнений относительно искомых показателей степенно-логарифмической особенности α и β на концах промежутка интегрирования. Начнем построение уравнения для показателя β с записи представления (6) характеристической части СИУ вблизи левого конца промежутка интегрирования в форме

$$I_{sing}^-(\eta) = \Delta_1^-(\beta) \phi_{-1} \left\{ (1+\eta)^\beta \ln(1+\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \Delta_2^-(\bar{\beta}) \overline{\phi_{-1}} \left\{ (1+\eta)^{\bar{\beta}} \ln(1+\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \\ + \Delta_3^-(\beta) \phi_{-1} \left\{ (1+\eta)^\beta \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \Delta_4^-(\bar{\beta}) \overline{\phi_{-1}} \left\{ (1+\eta)^{\bar{\beta}} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1}, \quad (22)$$

где

$$\Delta_1^-(\beta) = A(-1) - \pi \operatorname{ctg}(\pi\beta) B(-1) - \frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\sin(\pi\beta)} \sum'_{p,j,k,r} a_k (-1) \frac{e^{i\theta_r(\beta-j)}}{(p+j)!} P_{p+j}(\beta+p), \quad (23)$$

$$\Delta_2^-(\bar{\beta}) = -\frac{\pi e^{-i\pi\bar{\beta}}}{\sin(\pi\bar{\beta})} \sum''_{p,j,k,r} c_k (-1) \frac{e^{i\theta_r(\bar{\beta}-j)}}{(p+j)!} P_{p+j}(\bar{\beta}+p), \quad (24)$$

$$\Delta_3^-(\beta) = \pi^2 [1 + \operatorname{ctg}^2(\pi\beta)] B(-1) + \frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\sin(\pi\beta)} \sum'_{p,j,k,r} a_k (-1) \frac{e^{i\theta_r(\beta-j)}}{(p+j)!} P_{p+j}(\beta+p) [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\beta) + i) - S_{p+j}(\beta+p) - i\theta_r], \quad (25)$$

$$\Delta_4^-(\bar{\beta}) = \frac{\pi e^{-i\pi\bar{\beta}}}{\sin(\pi\bar{\beta})} \sum''_{p,j,k,r} c_k (-1) \frac{e^{i\theta_r(\bar{\beta}-j)}}{(p+j)!} P_{p+j}(\bar{\beta}+p) [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\bar{\beta}) + i) - S_{p+j}(\bar{\beta}+p) - i\theta_r]. \quad (26)$$

Перепишем выражение (22) по-другому:

$$I_{sing}^-(\eta) = \left[\Delta_1^-(\beta) \phi_{-1} (1+\eta)^{i\operatorname{Im}\beta} + \Delta_2^-(\bar{\beta}) \overline{\phi_{-1}} (1+\eta)^{-i\operatorname{Im}\beta} \right] \left\{ (1+\eta)^{\operatorname{Re}\beta} \ln(1+\eta) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \\ + \left[\Delta_3^-(\beta) \phi_{-1} (1+\eta)^{i\operatorname{Im}\beta} + \Delta_4^-(\bar{\beta}) \overline{\phi_{-1}} (1+\eta)^{-i\operatorname{Im}\beta} \right] \left\{ (1+\eta)^{\operatorname{Re}\beta} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1}. \quad (27)$$

Как видно, здесь вторые множители неограниченно возрастают при $\eta \rightarrow -1$, $-1 < \operatorname{Re} \beta < 0$. Поскольку другие члены СИУ (1), не входящие в (6), и правая его часть ограничены при $\eta \rightarrow -1$, необходимо потребовать в (27) равенства нулю множителей, заключенных в квадратные скобки:

$$\begin{cases} \left[\Delta_1^-(\beta) \phi_{-1} \left\{ (1+\eta)^{i\operatorname{Im}\beta} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \Delta_2^-(\bar{\beta}) \overline{\phi_{-1}} \left\{ (1+\eta)^{-i\operatorname{Im}\beta} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} \right] = 0; \\ \left[\Delta_3^-(\beta) \phi_{-1} \left\{ (1+\eta)^{i\operatorname{Im}\beta} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} + \Delta_4^-(\bar{\beta}) \overline{\phi_{-1}} \left\{ (1+\eta)^{-i\operatorname{Im}\beta} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow -1} \right] = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Дальнейший анализ этих соотношений можно проводить, разделяя ϕ_{-1} на вещественную и мнимую составляющие, поскольку в них множители вида $(1+\eta)^{\pm i\operatorname{Im}\beta}$ не определены при $\operatorname{Im} \beta \neq 0$ и $\eta \rightarrow -1$. В то же время удобнее присоединить к (28) сопряженные к ним соотношения

$$\begin{cases} \overline{\Delta_2(\bar{\beta})}\phi_{-1}\left\{(1+\eta)^{i\text{Im}\beta}\right\}\Big|_{\eta\rightarrow-1} + \overline{\Delta_1(\bar{\beta})}\phi_{-1}\left\{(1+\eta)^{-i\text{Im}\beta}\right\}\Big|_{\eta\rightarrow-1} = 0, \\ \overline{\Delta_4(\bar{\beta})}\phi_{-1}\left\{(1+\eta)^{i\text{Im}\beta}\right\}\Big|_{\eta\rightarrow-1} + \overline{\Delta_3(\bar{\beta})}\phi_{-1}\left\{(1+\eta)^{-i\text{Im}\beta}\right\}\Big|_{\eta\rightarrow-1} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

которые ограничивают характеристическую часть СИУ, сопряженного к (1), и рассматривать ϕ_{-1} и $\overline{\phi_{-1}}$ как независимые переменные в однородных уравнениях (28) и (29). По постановке задачи неизвестная величина ϕ_{-1} (соответственно и $\overline{\phi_{-1}}$) не равна нулю (см. (5)), следовательно, для удовлетворения системы двух однородных уравнений относительно ϕ_{-1} и $\overline{\phi_{-1}}$ требуется обращение в нуль её определителя. Комбинируя попарно уравнения из групп (28) и (29) и вычисляя определители (попутно раскрываются неопределенности вида $\varepsilon^{i\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), окончательно получим три различных варианта уравнения для отыскания комплексного показателя степенно-логарифмической особенности β :

$$\Delta_1^-(\beta)\Delta_4^-(\bar{\beta}) - \Delta_2^-(\bar{\beta})\Delta_3^-(\beta) = 0, \quad (30)$$

$$\begin{cases} \left| \Delta_1^-(\beta) \right|^2 - \left| \Delta_2^-(\bar{\beta}) \right|^2 = 0, \\ \left| \Delta_3^-(\beta) \right|^2 - \left| \Delta_4^-(\bar{\beta}) \right|^2 = 0, \end{cases} \quad (31)$$

$$\Delta_1^-(\beta)\overline{\Delta_3^-(\beta)} - \Delta_2^-(\bar{\beta})\overline{\Delta_4^-(\beta)} = 0. \quad (32)$$

Как видно, левая часть построенного уравнения (30) является комплекснозначной функцией показателя $\beta \equiv x + iy$. Это соответствует системе двух вещественных уравнений, содержащих вещественную и мнимую части β :

$$\begin{cases} \text{Re} \left[\Delta_1^-(x+iy)\Delta_4^-(x-iy) - \Delta_2^-(x-iy)\Delta_3^-(x+iy) \right] \equiv g(x, y) = 0, \\ \text{Im} \left[\Delta_1^-(x+iy)\Delta_4^-(x-iy) - \Delta_2^-(x-iy)\Delta_3^-(x+iy) \right] \equiv h(x, y) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

В свою очередь, уравнения (33) можно рассматривать как уравнения $g(x, y) = 0$ и $h(x, y) = 0$ некоторых кривых на плоскости xOy (заданные неявно). В специальных случаях кривые $g(x, y) = 0$ и $h(x, y) = 0$ могут иметь бесконечное множество общих точек (то есть совпадать на некоторой конечной дуге L), однако в прикладных задачах число точек их пересечения, как правило, конечно. Точки пересечения, лежащие в полосе $-1 < x < 0$, — это допустимые для СИУ (1) показатели степенно-логарифмической особенности решения $\beta \equiv x + iy$. Два других варианта уравнений — (31) и (32), для показателя комплексной особенности носят аналогичный характер (вещественная система (31) сформировалась уже на этапе вычисления соответствующего определителя). Совокупность всех корней уравнений (30)–(32) в полосе $-1 < \text{Re}\beta < 0$ образует полный набор допустимых для СИУ (1) комплексных показателей степенно-логарифмической особенности, а показатель главной особенности соответствует корню с минимальной вещественной частью.

Для класса вещественных показателей степенно-логарифмической особенности ($\text{Im}\beta \equiv 0$) уравнения (30)–(32) принимают форму:

$$\Delta_1^-(\beta)\Delta_4^-(\beta) - \Delta_2^-(\beta)\Delta_3^-(\beta) = 0, \quad (34)$$

$$\begin{cases} \left| \Delta_1^-(\beta) \right|^2 - \left| \Delta_2^-(\beta) \right|^2 = 0; \\ \left| \Delta_3^-(\beta) \right|^2 - \left| \Delta_4^-(\beta) \right|^2 = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\Delta_1^-(\beta)\overline{\Delta_3^-(\beta)} - \Delta_2^-(\beta)\overline{\Delta_4^-(\beta)} = 0. \quad (36)$$

Эти выражения следуют из (24) и (26), если в них заменить $\bar{\beta}$ на β ; при этом в уравнении (36) знаки комплексного сопряжения относятся уже только к функциям (25) и (26), но не к их аргументу β . Очевидно, что в данном случае как вещественная система (35), так и системы двух вещественных уравнений, на которые распадаются комплексные уравнения (34) и (36), оказываются переопределенными, поскольку накладывают два различных ограничения в форме равенств на один и тот же вещественный корень β . Следовательно, при произвольных, но фиксированных параметрах СИУ (1) и обобщенных ядер (2) и (3) класс вещественных показателей степенно-логарифмической особенности не содержит допустимых

для СИУ (1) значений этого показателя. Безусловно, если придать системе вещественных уравнений еще одну степень свободы, то есть отыскивать не только β , но и один из вещественных параметров СИУ исходя из уравнений (34)–(36), то система может дать допустимое для СИУ значение β . В то же время, такой подход, использованный при непосредственном асимптотическом анализе некоторых краевых задач [11], представляется паллиативным.

Для получения уравнений относительно показателя особенности α следует записать представление (7) характеристической части СИУ вблизи правого конца промежутка интегрирования на основе изложенных вспомогательных результатов и реализовать последовательность рассуждений и вычислений, аналогичную проделанной. Опуская промежуточные выкладки, приведем три варианта трансцендентного уравнения для комплексного показателя степенно-логарифмической особенности α :

$$\Delta_1^+(\alpha)\Delta_4^+(\bar{\alpha}) - \Delta_2^+(\bar{\alpha})\Delta_3^+(\alpha) = 0, \quad (37)$$

$$\begin{cases} |\Delta_1^+(\alpha)|^2 - |\Delta_2^+(\bar{\alpha})|^2 = 0, \\ |\Delta_3^+(\alpha)|^2 - |\Delta_4^+(\bar{\alpha})|^2 = 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$\Delta_1^+(\alpha)\overline{\Delta_3^+(\alpha)} - \Delta_2^+(\bar{\alpha})\overline{\Delta_4^+(\bar{\alpha})} = 0, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1^+(\alpha) &= A(+1) + \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha)B(+1) + \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \sum'_{l,m,n,s} b_l(+1) \frac{(-1)^m e^{i\theta_s(\alpha-n)}}{(m+n)!} P_{m+n}(\alpha+m), \\ \Delta_2^+(\bar{\alpha}) &= \frac{\pi}{\sin(\pi\bar{\alpha})} \sum''_{l,m,n,s} d_l(+1) \frac{(-1)^m e^{i\theta_s(\bar{\alpha}-n)}}{(m+n)!} P_{m+n}(\bar{\alpha}+m), \\ \Delta_3^+(\alpha) &= -\pi^2 [1 + \operatorname{ctg}^2(\pi\alpha)] B(+1) - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \sum'_{l,m,n,s} b_l(+1) \frac{(-1)^m e^{i\theta_s(\alpha-n)}}{(m+n)!} \times \\ &\quad \times P_{m+n}(\alpha+m) [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\alpha) + i) - S_{m+n}(\alpha+m) - i(\pi + \theta_s)], \\ \Delta_4^+(\bar{\alpha}) &= -\frac{\pi}{\sin(\pi\bar{\alpha})} \sum''_{l,m,n,s} d_l(+1) \frac{(-1)^m e^{i\theta_s(\bar{\alpha}-n)}}{(m+n)!} \times P_{m+n}(\bar{\alpha}+m) [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\bar{\alpha}) + i) - S_{m+n}(\bar{\alpha}+m) - i(\pi + \theta_s)]. \end{aligned}$$

Уравнения (37)–(39) и соответствующие им уравнения для вещественного показателя α аналогичны (30)–(32) и (34)–(36), следовательно, результаты анализа последних уравнений можно в полном объеме перенести на уравнения относительно показателя степенно-логарифмической особенности α на правом конце промежутка интегрирования.

Заметим, что построение уравнений (30)–(32) и (37)–(39) базируется на переходе к сопряженным значениям в соотношениях (28). Этот переход оказывается содержательным только при наличии сопряженной неизвестной функции в характеристической части СИУ. Если же $L_{gen}(\xi, \eta) \equiv 0$ или один из двух членов (3) отсутствует, то непосредственное использование построенных уравнений дает ложный результат (см. (32) и (39)), и в такой ситуации следует вернуться к исходным соотношениям вида (28). Из них следует, что при сохранении обобщенным ядром $L_{gen}(\xi, \eta)$ ограниченности при $\xi = \eta \rightarrow -1$ (первый член (3) отсутствует) значение показателя особенности β должно удовлетворять системе комплексных уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1^-(\beta) = 0, \\ \Delta_3^-(\beta) = 0, \end{cases} \quad (40)$$

которая является переопределенной уже как для вещественных, так и для комплексных значений β . Как следствие, в общем случае система (40) не имеет корней, а решению СИУ (1) не присущи степенно-логарифмические особенности на левом конце промежутка интегрирования. Аналогичная ситуация реализуется на правом конце, когда $L_{gen}(\xi, \eta)$ ограничено при $\xi = \eta \rightarrow +1$.

С точки зрения двумерных задач теории упругости этот частный случай отсутствия сопряженной неизвестной функции в характеристической части СИУ соответствует особой точке, в окрестности которой задача разделяется на нормальную и сдвиговую подзадачи. Тогда комплексное

СИУ, в том числе содержащее сопряженную неизвестную функцию, можно разделить на два независимых уравнения относительно компонент упругих перемещений в декартовой системе координат, связанной с особой точкой. И, как показано в [8], в этом случае решение СИУ (1) с обобщенными ядрами (2) и (3) будет иметь особенности степенного типа.

Отметим, что необходимое (но не достаточное) условие такого разделения связано, что очевидно, с геометрией задачи, а именно окрестность особой точки должна состоять из однородных областей (клиньев или вырезов) с углами раствора, кратными $\pi/2$. Кроме того, граничные условия на краях областей также должны допускать разделение задачи на нормальную и сдвиговую подзадачи. Но, например, граничное условие скольжения с кулоновским трением не позволит выполнить такое разделение. Следовательно, вывод о наличии логарифмического множителя в главной части решения (5) может быть сделан на основе только лишь качественного анализа краевой задачи (без построения описывающего ее СИУ).

5. Трещина, выходящая на границу раздела упругих сред

В качестве приложения используем разработанный подход для определения показателей особенности одного СИУ, которое возникает в двумерной задаче теории упругости при наличии прямолинейной трещины единичной полудлины, одна из вершин которой лежит на границе раздела двух сред, обладающих разными упругими свойствами (Рис. 1). На основе результатов работы [4] задача может быть сведена к СИУ вида [8]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \int_{-1}^1 K_{gen}(\xi, \eta) \phi(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 L_{gen}(\xi, \eta) \overline{\phi(\xi)} d\xi = \pi p(\eta), \quad -1 < \eta < 1, \quad (41)$$

$$K_{gen}(\xi, \eta) = \frac{a_0}{\xi - z_0^*} + \frac{a_1}{\xi - z_1^*} + a_2 \frac{1 + \xi}{(\xi - z_0^*)^2} + a_3 \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{(\xi - z_0^*)^3}, \quad (42)$$

$$a_0 = -\chi_1 e^{2i\gamma} / 2, \quad a_1 = -\chi_2 e^{2i\gamma} / 2, \quad a_2 = \chi_2 (1 - e^{-2i\gamma})^2 e^{4i\gamma} / 2, \quad a_3 = 2a_2 e^{2i\gamma},$$

$$L_{gen}(\xi, \eta) = c_0 \frac{1 + \xi}{(\xi - z_0^*)^2} + c_1 \frac{1 + \xi}{(\xi - z_1^*)^2}, \quad (43)$$

$$c_0 = -\chi_2 (1 - e^{-2i\gamma}) e^{4i\gamma} / 2, \quad c_1 = -\chi_2 (1 - e^{2i\gamma}) e^{2i\gamma} / 2,$$

$$z_0^* = -1 + (1 + \eta) e^{i\theta_0}, \quad 0 < \theta_0 = 2\gamma < 2\pi; \quad z_1^* = -1 + (1 + \eta) e^{i\theta_1}, \quad 0 < \theta_1 = 2(\pi - \gamma) < 2\pi,$$

$$\chi_1 \equiv (\kappa_2 \mu_1 - \kappa_1 \mu_2) / (\mu_2 + \kappa_2 \mu_1), \quad \chi_2 \equiv (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_1 + \kappa_1 \mu_2).$$

Здесь: $p(\eta)$ — самоуравновешенная нагрузка на поверхностях трещины; $\kappa_r = 3 - 4\nu_r$ при плоской деформации и $\kappa_r = (3 - \nu_r) / (1 + \nu_r)$ при плоском напряженном состоянии, где ν_r — коэффициент Пуассона, μ_r — модуль сдвига ($r = 1, 2$), индекс $r = 2$ соответствует верхней полуплоскости, а индекс $r = 1$ — нижней полуплоскости с трещиной, линия которой составляет угол γ ($0 < \gamma < \pi$) с положительным направлением оси Ox , связанной с границей раздела сред (Рис. 1). Функция $\phi(\xi)$ из уравнения (41) несет смысл производной комплексной комбинации компонент вектора смещений (скачков) поверхностей трещины, а асимптотика $\phi(\xi)$ вблизи концов промежутка интегрирования отражает особенности поля напряжений ($\sigma \sim r^\beta \ln r$, $r \rightarrow 0$; r — расстояние от произвольной точки до вершины трещины).

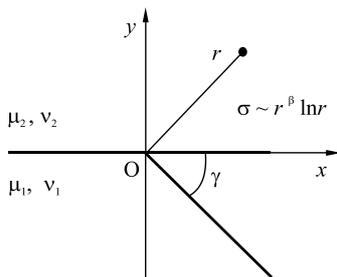


Рис. 1. Трещина, выходящая на границу раздела упругих сред

Как видно, обобщенные ядра типа Коши СИУ, возникающего в данной прикладной задаче, являются одним из частных случаев выражений (2) и (3), при этом $L_{gen}(\xi, \eta) = 0$ только для $\gamma = \pi/2$. Вычисляя выражения (23)–(26) для ядер (42) и (43), получим

$$\Delta_1^-(\beta) = -\pi \text{ctg}(\pi\beta) - \frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\sin(\pi\beta)} \left[a_0 e^{i\beta\theta_0} + a_1 e^{i\beta\theta_1} + a_2 e^{i\beta\theta_0} (\beta + 1) + a_3 e^{i(\beta-1)\theta_0} \frac{(\beta + 1)\beta}{2} \right],$$

$$\Delta_2^-(\bar{\beta}) = -\frac{\pi e^{-i\pi\bar{\beta}}}{\sin(\pi\bar{\beta})} \left[c_0 e^{i\bar{\beta}\theta_0} (\bar{\beta} + 1) + c_1 e^{i\bar{\beta}\theta_1} (\bar{\beta} + 1) \right],$$

$$\Delta_3^-(\beta) = \pi^2 [1 + \operatorname{ctg}^2(\pi\beta)] + \frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\sin(\pi\beta)} \left\{ a_0 e^{i\beta\theta_0} [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\beta) + i) - i\theta_0] + \right. \\ \left. + a_1 e^{i\beta\theta_1} [\pi(\operatorname{ctg}(\pi\beta) + i) - i\theta_1] + a_2 e^{i\beta\theta_2} (\beta + 1) \left[\pi(\operatorname{ctg}(\pi\beta) + i) - \frac{1}{\beta + 1} - i\theta_0 \right] + \right. \\ \left. + a_3 e^{i(\beta-1)\theta_0} \frac{(\beta+1)\beta}{2} \left[\pi(\operatorname{ctg}(\pi\beta) + i) - \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\beta} - i\theta_0 \right] \right\}, \\ \Delta_4^-(\bar{\beta}) = \frac{\pi e^{-i\pi\bar{\beta}}}{\sin(\pi\bar{\beta})} \left\{ c_0 e^{i\bar{\beta}\theta_0} (\bar{\beta} + 1) \left[\pi(\operatorname{ctg}(\pi\bar{\beta}) + i) - \frac{1}{\bar{\beta} + 1} - i\theta_0 \right] + c_1 e^{i\bar{\beta}\theta_1} (\bar{\beta} + 1) \left[\pi(\operatorname{ctg}(\pi\bar{\beta}) + i) - \frac{1}{\bar{\beta} + 1} - i\theta_1 \right] \right\}.$$

На рисунке 2 представлена зависимость комплексного показателя степенно-логарифмической особенности β от угла наклона трещины γ ($0 < \gamma < \pi/2$) в условиях плоской деформации при двух отношениях модулей сдвига (μ_1/μ_2) и равных значениях коэффициента Пуассона ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Результаты получены путем численного решения уравнений (30) и (32). При $\mu_1/\mu_2 = 5$ и угле наклона трещины, изменяющемся в диапазоне $46,6^\circ < \gamma < 75,6^\circ$, в полосе $-1 < \operatorname{Re}\beta < 0$ система (31) также имеет корни, однако их вещественная часть очень мала по модулю ($\operatorname{Re}\beta > -0,08$). Зависимость вещественной части показателя особенности изображена сплошной линией, а зависимость мнимой части, маркированная идентичным символом, — штриховой линией. Как видно из рисунка, и уравнение (30), и уравнение (32)

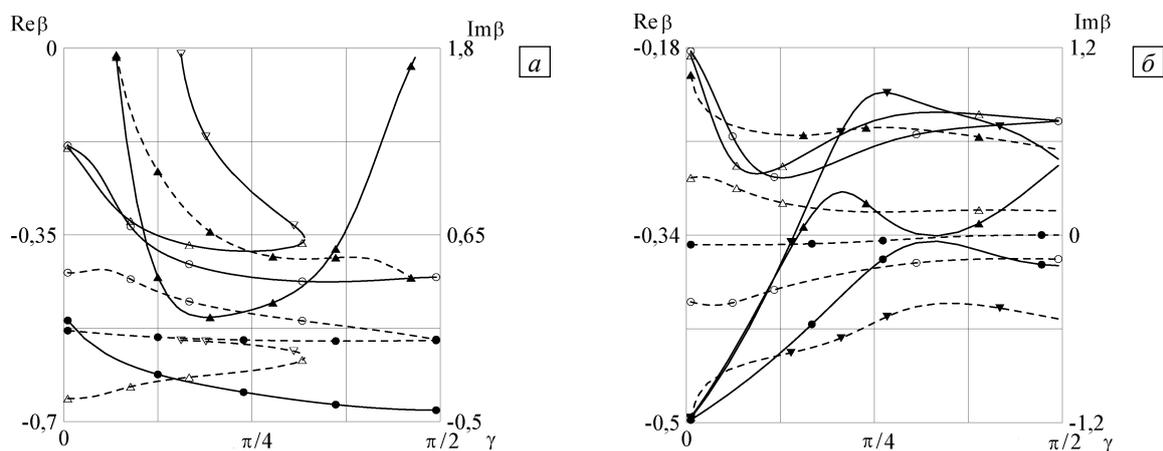


Рис. 2. Зависимость комплексных показателей степенно-логарифмической особенности решения от угла наклона трещины при отношении модулей сдвига μ_1/μ_2 : 5 (а) и 1/5 (б); численное решение уравнения (30) – полые маркеры, а уравнения (32) – сплошные маркеры; вещественная часть β – сплошная линия, мнимая – штриховая

предоставляют несколько комплексных показателей особенности (помечены маркерами разной формы), допустимых для решения СИУ (1) в форме (5), причем один из корней каждого из уравнений охватывает весь диапазон $0 < \gamma < \pi/2$. Более жесткая система (31) имеет корень только при указанных механических и геометрических параметрах задачи. Отметим, что корни уравнения (30) с минимальной вещественной частью перемежаются между собой при небольших значениях угла наклона трещины, однако глобальный минимум вещественной части соответствует одному из корней уравнения (32).

6. Заключение

Таким образом, если для степенной асимптотики поля упругих напряжений при $L_{gen}(\xi, \eta) \neq 0$ (то есть краевая задача не разделяется на нормальную и сдвиговую подзадачи) комплексные показатели особенности образуют непрерывный спектр [8], то в случае степенно-логарифмической асимптотики для них характерен конечный дискретный набор. В аналогичной ситуации вещественные показатели степенной особенности также составляют дискретный набор, а мультипликативное логарифмическое усиление вещественной степенной особенности в форме (5) в общем случае не реализуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (гранты НШ-4082.2014.1 и НШ-1275.2014.1).

Литература

1. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* – 2008. – Vol. 61, No. 2. – P. 020801. DOI
2. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations // *Mechanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems* / Ed. G.C. Sih. – Noordhoff Intern. Publ., 1973. – P. 368-425.
3. Саверук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.
4. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
6. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. – Тбилиси: Мецниереба, 1979. – 135 с.
7. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1999. – Vol. 45, No. 10. – P. 1457-1470. DOI
8. Андреев А.В. Метод определения комплексных особенностей степенного типа в решениях сингулярных интегральных уравнений с обобщенными ядрами и сопряженными неизвестными // МТТ. – 2009. – № 5. – С. 42-58. DOI
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
10. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *Appl. Mech. Rev.* – 2004. – Vol. 57, No. 5. – P. 385-439. DOI
11. Dempsey J.P. Power-logarithmic stress singularities at bi-material corners and interface cracks // *J. Adhes. Sci. Technol.* – 1995. – Vol. 9, No. 2. – P. 253-265. DOI
12. Матвеев В.П., Накарякова Т.О., Севодина Н.В., Шардаков И.Н. Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // ПММ. – 2008. – Т. 72, № 3. – С. 477-484. DOI
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 1. Элементарные функции. – 632 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – 688 с.
15. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.

References

1. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.*, 2008, vol. 61, no. 2, p. 020801. DOI
2. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. *Mechanics of fracture. Vol. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems*. Ed. by G.C. Sih. Noordhoff Intern. Publ., 1973, pp. 368-425.
3. Savruk M.P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks]. Kiev, Naukova dumka publ., 1981. 324 p.
4. Linkov A.M. *Kompleksnyi metod granichnykh integral'nykh uravnenii teorii uprugosti* [Complex variable boundary integral equations of elasticity theory]. St.Petersburg, Nauka publ., 1999. 382 p.
5. Muskhelishvili N.I. *Singuliarnye integral'nye uravneniia* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka publ., 1968. 511 p.
6. Duduchava R.V. *Integral equations with fixed singularities*. Leipzig: Teubner, 1979. 173 p.
7. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1999, vol. 45, no. 10, pp. 1457-1470. DOI
8. Andreev A.V. Method for determining power-type complex singularities in solutions of singular integral equations with generalized kernels and complex conjugate unknowns. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 691-704. DOI
9. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka publ., 1977. 640 p.
10. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity II: Asymptotic identification. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, no. 5, pp. 385-439. DOI
11. Dempsey J.P. Power-logarithmic stress singularities at bi-material corners and interface cracks. *J. Adhes. Sci. Technol.*, 1995, vol. 9, no. 2, pp. 253-265. DOI
12. Matveenko V.P., Nakaryakova T.O., Sevodina N.V., Shardakov I.N. Stress singularity at the vertex of homogeneous and composite cones for different boundary conditions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 36 pp. 331-337. DOI
13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and series: Elementary functions, vol. 1*. Amsterdam, The Netherlands: Gordon and Breach, 1986.
14. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and series: More special functions, vol. 3*. London, UK: Taylor and Francis, 2002.
15. Nikiforov A.F., Uvarov V.B. *Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki*. [Special functions of mathematical physics]. Moscow, Nauka publ., 1984. 344 p.

Поступила в редакцию 29.10.2013; опубликована в электронном виде 31.03.2014

Сведения об авторе

Андреев Андрей Вячеславович, кфмн, снс, Объединенный институт высоких температур РАН (ОИВТ РАН); 125412, Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2; E-mail: andrey.andreev@inbox.ru