

DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.10
УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЛОЕНИЯ ТОНКИХ ПЛЕНОК ПРИ СЖАТИИ

В.Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Рассмотрены процессы упругой деформации тонких пленок при механическом нагружении. Пленка моделируется продольно сжатой балкой на упругом основании. Решается задача потери устойчивости балки, частично покоящейся на упругом основании, при осевом сжатии. Деформации изгиба балки предполагаются малыми, поэтому используется приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Сформулированы условия склейки решений для отслоившейся балки и для балки на упругом основании. Исследовано закритическое поведение системы «балка–подложка». С точностью до постоянного множителя получены формы потери устойчивости балки при превышении сжимающей силой значения, равного эйлеровой критической нагрузке. Проведено сравнение решения по предложенной модели деформирования балки с решением геометрически нелинейной задачи, полученным методом конечных элементов. Показана возможность прогрессирующего отслаивания тонкой пленки от подложки при превышении критической нагрузки.

Ключевые слова: тонкие пленки, отслоение, упругое основание, потеря устойчивости, нелинейное деформирование

SIMULATION OF THIN FILMS DELAMINATION UNDER COMPRESSION

V.D. Kurguzov

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

Processes of elastic deformation of thin films under mechanical loading conditions are considered. A film is modeled as a longitudinally compressed beam with a small-area of initial delamination of the film from the initial film carrier. The compressive buckling problem of a beam partially fixed on the elastic foundation is solved. Bending strains of the beam are considered to be small; therefore the approximate differential equation of the bending line of a beam is used. The gluing conditions for the solution of both the delaminated beam and the beam on the elastic foundation have been defined. The post-buckling behavior of the “beam – foundation” system has been studied. The forms of beam buckling within the constant factor have been derived when exceeding the Euler critical loading by a compressive force takes place. Comparison of the proposed deformation model of a beam partially glued on the elastic foundation with the numerical solution of the buckling problem of a thin plate fixed on the elastic foundation obtained in the geometrically nonlinear statement by the finite element method shows the qualitative agreement between these solutions. The computer simulation shows a possibility for progressive delamination of a thin film from the film carrier when exceeding a critical loading. In contrast to the currently available approaches, the proposed one takes into consideration the elastic strain of a film carrier that provides the relationship of critical bending stress versus foundation stiffness.

Key words: thin films, delamination, elastic foundation, buckling, nonlinear strains

1. Введение

Тонкие пленки — основа современной микроэлектроники. Они широко используются при производстве интегральных схем, микросенсоров, датчиков и другого. Разработка новых химических и физических способов нанесения тонких пленок позволяет получать гетероструктуры с уникальными функциональными характеристиками, а также различные композитные материалы с градиентной структурой и свойствами. Другое направление исследований — нанесение пленок на большую площадь, что позволяет практически в промышленном масштабе производить функциональные материалы с нелинейными электрофизическими, оптическими, трибологическими и другими параметрами [1–3].

Тонкие пленки могут быть твердыми или жидкими, а их состав, структура и свойства — отличающимися от таковых для объемной фазы, из которой они образуются. К твердым тонким пленкам относятся оксидные пленки на поверхности металлов и искусственные пленочные покрытия, формируемые на различных материалах с целью создания приборов микроэлектроники, защиты от коррозии, улучшения внешнего вида и тому подобного [4–6].

Основные функции тонких металлических пленок определяются их электрическими свойствами, однако прочностные характеристики также играют важную роль. Различие коэффициентов термического расширения пленки и подложки при нагревании или охлаждении тонкопленочных структур при эксплуатации приводит к появлению значительных внутренних напряжений. Релаксация напряжений обуславливает пластическую деформацию пленок с последующим разрушением вследствие образования микропор, трещин, а также отслоения от подложки [7–10].

В процессе производства микроэлектронных устройств возникает проблема устойчивости тонких пленок на подложке. При вакуумном напылении на поверхность металлов они осаждаются в виде тонких пленок, в которых в процессе наращивания, а также при термомеханических воздействиях зарождаются

напряжения, обусловленные различием температурных и механических характеристик пленки и подложки. Под действием напряжений пленка и подложка испытывают деформации разной степени, но, поскольку они жестко связаны друг с другом, система «пленка–подложка» вынуждена изгибаться, стремясь сохранить положение равновесия. Изгиб тонких пленок на подложке аналогичен по своей природе классическому случаю эйлеровой упругой неустойчивости стержня под действием продольных сжимающих сил [11]. При превышении сжимающей силой некоторого критического значения происходит потеря устойчивости стержня в виде его изгиба вследствие сколь угодно малого возмущения, вызванного начальными несовершенствами (эксцентриситета приложенной силы, неоднородности материала по сечению и другого). Изгиб минимизирует энергию упругой деформации стержня и зависит от типа закрепления его концов.

В работе [12] рассматривались процессы упругой деформации металлических пленок при сжимающем механическом нагружении. Показано, что при продольном сжатии тонких пленок на податливой подложке формируются поверхностные складки; система «пленка–подложка» деформируется когерентно (Рис. 1, а). В случае жесткой подложки сжимающие напряжения приводят к упругому изгибу пленки с локальным отслоением от подложки (Рис. 1, б), особенно если связь пленки с подложкой недостаточно сильная, либо ослаблена теми или иными дефектами на границе раздела. Локальное отслоение пленки от подложки есть следствие действия растягивающих напряжений в местах изгиба, который является результатом потери устойчивости тонкой пленки при ее сжатии продольными усилиями. Представленные на рисунке 1 схемы позаимствованы в [12].

Хрупкое разрушение при сжатии было и остается предметом огромного числа исследований, однако некоторые фундаментальные аспекты механизма разрушения по-прежнему остаются неясными [13]. Цель предлагаемой вниманию читателя работы заключается хотя бы в частичном заполнении этого пробела. Ниже построена модель квазихрупкого отслоения тонкой пленки от упругой подложки при осевом сжатии, показывающая возможность прогрессирующего отслаивания при превышении критической нагрузки.

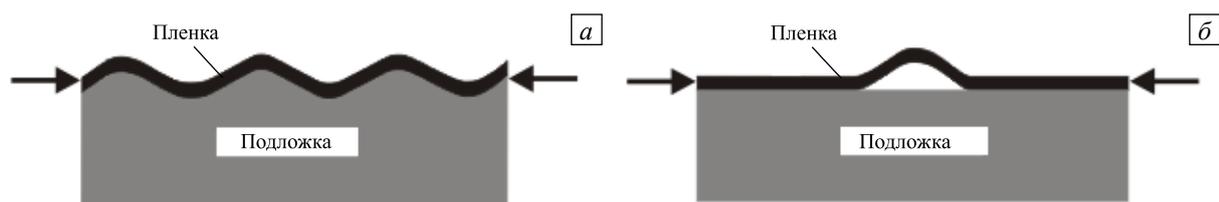


Рис. 1. Схемы деформирования тонких пленок на подложке под действием сжимающих сил: гофрирование пленки на податливой подложке (а); отслоение пленки на жесткой подложке (б)

Теоретическое исследование потери устойчивости стержней, лежащих на нескольких упругих опорах, впервые выполнено Ф.С. Ясинским [14, 15]. Однако, несмотря на то, что теория балок и плит, лежащих на упругом основании, является в настоящее время разработанным разделом механики [16–19], существующие методы расчета не совершенны и не дают ответов на многие вопросы, выдвигаемые практикой. Большая часть этих методов слишком сложна для практического использования. Не могут считаться совершенными и те гипотезы, которые принимаются за основу при построении математических моделей. Исследование локализации выпучивания в реальных конструкциях [20–22] показывает, что основные закономерности процесса хорошо описываются одномерной моделью. В качестве исходного выражения для анализа устойчивости стержня на упругом основании обычно используют либо дифференциальное уравнение равновесия изогнутой оси стержня [21–23], либо интегральное выражение потенциальной энергии системы [24, 25]. В обоих случаях получают одинаковые значения для критических нагрузок, при которых происходит потеря устойчивости системы. Тем не менее, закритическое поведение системы «стержень–основание» мало изучено [26].

2. Модель деформирования балки, частично приклеенной к упругому основанию

Рассмотрим тонкую пленку на жесткой подложке (Рис. 1, б) в тот момент деформирования, когда на участке границы раздела уже произошло отслоение. Исследуем устойчивость такой пленки на основе модели продольно сжатой балки Бернулли–Эйлера, частично покоящейся на упругом основании (Рис. 2).

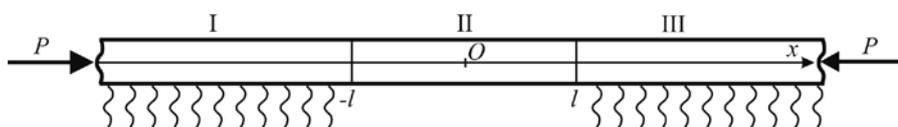


Рис. 2. Модель балки на упругом основании с участком отслоения

На участках I и III балка сцеплена с подложкой, на участке II длиной $2l$ произошло ее отслоение от подложки.

Дифференциальное уравнение равновесия упругой линии балки в областях I и III имеет вид [16]:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cw = -P \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (1)$$

где w — прогиб балки, P — продольная сила, E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения, c — коэффициент жесткости упругого основания.

Краевые условия на бесконечности запишем как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{dw}{dx} = 0. \quad (2)$$

Поведение балки в области II опишем дифференциальным уравнением, соответствующим изгибу стержня [16]:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -P \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (3)$$

В точках склейки решений $x = \pm l$ должны совпадать прогибы w , углы поворота $\theta = dw/dx$, изгибающие моменты $M = -EI(d^2 w/dx^2)$ и поперечные силы $Q = -EI(d^3 w/dx^3)$. Следовательно, условия склейки решений должны иметь вид:

$$\begin{aligned} w_I(-l) &= w_{II}(-l), & w_{II}(l) &= w_{III}(l); \\ \frac{dw_I(-l)}{dx} &= \frac{dw_{II}(-l)}{dx}, & \frac{dw_{II}(l)}{dx} &= \frac{dw_{III}(l)}{dx}; \\ \frac{d^2 w_I(-l)}{dx^2} &= \frac{d^2 w_{II}(-l)}{dx^2}, & \frac{d^2 w_{II}(l)}{dx^2} &= \frac{d^2 w_{III}(l)}{dx^2}; \\ \frac{d^3 w_I(-l)}{dx^3} &= \frac{d^3 w_{II}(-l)}{dx^3}, & \frac{d^3 w_{II}(l)}{dx^3} &= \frac{d^3 w_{III}(l)}{dx^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

В силу симметрии задачи в точке $x = 0$ выполняются соотношения $w_I(-x) = w_{III}(x)$ и $w_{II}(-x) = w_{II}(x)$. Следовательно, достаточно рассмотреть решение при $x \geq 0$ с краевыми условиями в нулевой точке:

$$\frac{dw_{II}(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^3 w_{II}(0)}{dx^3} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, требуется найти решения уравнений (1), (3) при условиях (2), (4), (5). В используемой модели критическая сила P_c удовлетворяет неравенствам $P_c^* < P_c < P_c^{**}$ или

$$\pi^2 EI / (4l^2) < P_c < \pi^2 EI / l^2, \quad (6)$$

где P_c^* — эйлерова критическая нагрузка для шарнирно опертой балки, P_c^{**} — критическая сила для балки с защемленными концами (длина балки в обоих случаях полагается равной $2l$) [11].

Введем обозначение $k^2 = P/EI$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{d^4 w_{II}}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w_{II}}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

Запишем для него характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + k^2 \lambda^2 = 0,$$

корнями которого будут $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm ik$. Общее решение уравнения (7) можно представить как

$$w_{II}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx.$$

Из граничных условий (5) получим:

$$\frac{dw_{II}(0)}{dx} = C_2 + kC_4 = 0, \quad \frac{d^3 w_{II}(0)}{dx^3} = -k^3 C_4 = 0,$$

откуда $C_2 = C_4 = 0$. Таким образом, решение в области II имеет вид

$$w_{II}(x) = C_1 + C_3 \cos kx. \quad (8)$$

Найдем теперь общее решение дифференциального уравнения (1) в области III. Обозначим $\eta^4 = c/(EI)$; с учетом введенных обозначений уравнение (1) станет следующим:

$$\frac{d^4 w_{III}}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w_{III}}{dx^2} + \eta^4 w_{III} = 0. \quad (9)$$

Запишем для него характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + k^2 \lambda^2 + \eta^4 = 0.$$

Пусть $m = \lambda^2$. Тогда $m^2 + k^2 m + \eta^4 = 0$. Найдем дискриминант этого уравнения $D = k^4 - 4\eta^4$. Если $D < 0$, характеристическое уравнение имеет четыре комплексно-сопряженных корня $\lambda = \pm \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = \sqrt{2\eta^2 - k^2}/2$, $\beta = \sqrt{2\eta^2 + k^2}/2$. Тогда общее решение уравнения (9) можно представить как

$$w_{III}(x) = e^{\alpha(x-l)} [C_1 \cos \beta(x-l) + C_2 \sin \beta(x-l)] + e^{\alpha(l-x)} [C_3 \cos \beta(x-l) + C_4 \sin \beta(x-l)].$$

Так как $e^{\alpha(x-l)} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, из краевых условий (2) получим, что $C_1 = C_2 = 0$, и, следовательно, общее решение уравнения (9) примет вид

$$w_{III}(x) = e^{\alpha(l-x)} [C_3 \cos \beta(x-l) + C_4 \sin \beta(x-l)]. \quad (10)$$

Запишем решение (8) по-другому:

$$w_{II}(x) = C_1 + C_2 \cos kx. \quad (11)$$

Из условий (4) после склейки решений (10) и (11) придем к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \cos kl - C_3 &= 0, \\ C_2 k \sin kl - C_3 \alpha + C_4 \beta &= 0, \\ C_2 k^2 \cos kl + C_3 (\alpha^2 - \beta^2) - C_4 \cdot 2\alpha\beta &= 0, \\ C_2 k^3 \sin kl + C_3 (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) + C_4 (\beta^3 - 3\alpha^2\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда найдем трансцендентное (характеристическое) уравнение

$$\operatorname{tg} kl = k \sqrt{2\eta^2 - k^2} / (k^2 - \eta^2). \quad (13)$$

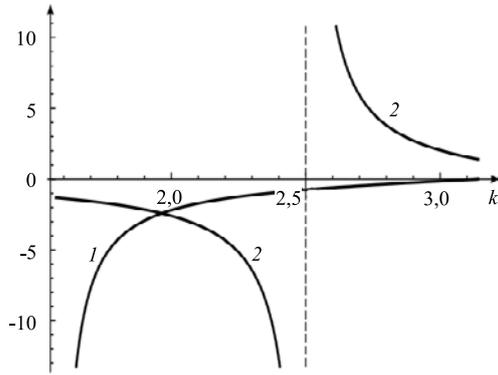


Рис. 3. Пересечение графиков функций (13)

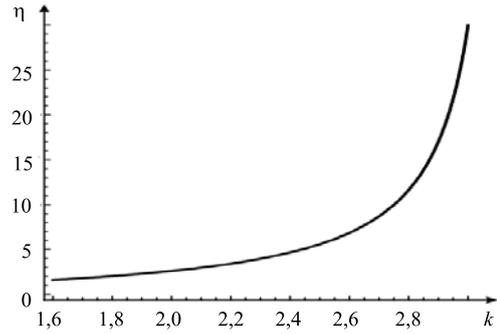


Рис. 4. График зависимости η от k при l=1

На рисунке 3 показаны графики функций $\operatorname{tg} kl$ (кривая 1) и $k\sqrt{2\eta^2 - k^2} / (k^2 - \eta^2)$ (кривая 2) при $\eta = 2,5$, $l = 1$ (безразмерные значения); штриховая линия — вертикальная асимптота кривой 2. Так как $\alpha > 0$, то $k < \sqrt{2}\eta$, кроме того критическая сила P_c ограничена условиями (6), следовательно, $\pi^2 / (4l^2) < k^2 < \pi^2 / l^2$. Тогда из соотношения (13) вытекает, что $\eta \rightarrow \pi / (2l)$ при $k \rightarrow \pi / (2l)$. График зависимости η от k (13) при $l = 1$ представлен на рисунке 4.

При выполнении условия (13) однородная система линейных алгебраических уравнений (12) имеет бесконечно много решений. Положим $C_1 = 1$, тогда получим, что $C_2 = 1$, $C_3 = k^2 / \eta^2$, $C_4 = -(k^2 / \eta^2) \sqrt{2\eta^2 - k^2} / \sqrt{2\eta^2 + k^2}$. Обозначим $\chi = k^2 / \eta^2$, $\gamma = \sqrt{2\eta^2 - k^2} / \sqrt{2\eta^2 + k^2}$, $0 \leq \gamma \leq 1$. С учетом введенных обозначений решения (10), (11) примут вид

$$w_{II}(x) = 1 + \cos kx, \quad w_{III}(x) = \chi e^{\alpha(l-x)} [\cos \beta(x-l) - \gamma \sin \beta(x-l)]. \quad (14)$$

На рисунке 5 показано отслоение балки от подложки при $l = 1$ для $\eta = 2,5$ (кривая 1) и для $\eta = 1,75$ (кривая 2): отслоившаяся часть занимает область II ($0 \leq x \leq 1$), балка на упругом основании — область III ($1 \leq x \leq 6$). Амплитуды прогибов (14) найдены с точностью до постоянного множителя. Критические напряжения изгиба балки и подложки в точках $x = \pm l$ (Рис. 2) зависят от амплитуды прогиба при закритическом деформировании ($P > P_c^*$); амплитуда прогиба будет обуславливаться величиной, на которую продольная сила P превысит критическую нагрузку P_c^* .

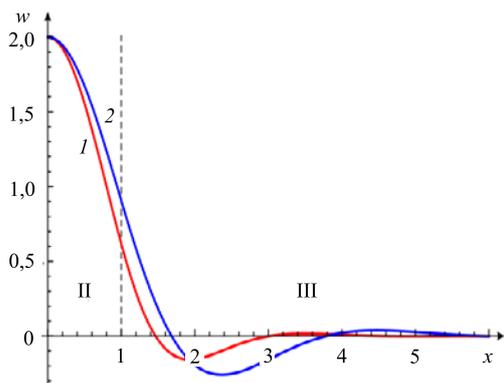


Рис. 5. Отслоение балки от подложки

Заметим, что решение (14) получено на основе следующего предположения: закритическое поведение рассматриваемой в качестве модели балки совпадает с закритическим поведением шарнирно опертой балки. Полный анализ нелинейного деформирования продольно сжатого стержня на упругом основании, в том числе и исследование зависимости закритической нагрузки от амплитуды прогибов, выполнен в работах [21, 26, 27].

3. Сравнение авторских результатов с данными, полученными численным методом

Проведем сравнение результатов квазихрупкого отслоения балки от упругой подложки при осевом сжатии, полученных по предложенной модели деформирования балки, частично приклеенной к упругому основанию, с результатами решения методом конечных элементов.

В нелинейных задачах деформирования тонкостенных конструкций (балок, пластин и оболочек) важен вопрос выбора определяющих соотношений в условиях упругой деформации тела. При изгибе балки, как правило, выполняются требования малости деформаций, хотя смещения и повороты могут быть довольно большими. Поэтому для формулировки уравнений, описывающих изгиб тонкостенных

конструкций в рамках упругости, предпочтение отдается геометрически нелинейным уравнениям механики деформируемого твердого тела [28].

Будем моделировать балку (половину балки на рисунке 2) 3D-пластиной длиной 200 мм, шириной 10 мм, толщиной 0,1 мм с участком отслоения, равным 25 мм. Пластина частично покоится на упругом основании длиной 175 мм. На ее левом торце поставим условия симметрии: $u = 0$, где u — горизонтальные смещения, на правом — шарнирное опирание. Пластина подвергается продольному сжатию в режиме жесткого нагружения, то есть на правом торце заданы горизонтальные смещения $u = -20$ мм. Считаем закон нарастания нагрузки по времени линейным (под временем, как принято в квазистатических задачах, будем понимать некоторый монотонно возрастающий параметр нагружения).

Разобьем пластину на 50000 гексагональных элементов размером $0,2 \times 0,2 \times 0,1$ мм с 20 узлами в каждом. В элементе применим квадратичную аппроксимацию перемещений. Механические характеристики материала возьмем следующие: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,45$.

Компьютерное моделирование деформирования пластины проводилось с использованием пакета MSC.Marc 2012 [29]. Результаты тестовых расчетов по определению форм потери устойчивости продольно сжатой свободной (отсутствует упругое основание) шарнирно опертой по обоим торцам пластины представлены на рисунке 6. Показаны деформированные конфигурации пластины с числом полуволн от 1 до 5. Следует отметить, что компьютерная модель дает тривиальное решение ($w = 0$) — пластина сжимается без потери устойчивости, то есть остается плоской. Для того чтобы получить изгибные формы, показанные на рисунке 6, вводилось начальное несовершенство в виде действия на поверхность пластины малых поперечных сил величиной порядка 10^{-7} Н.

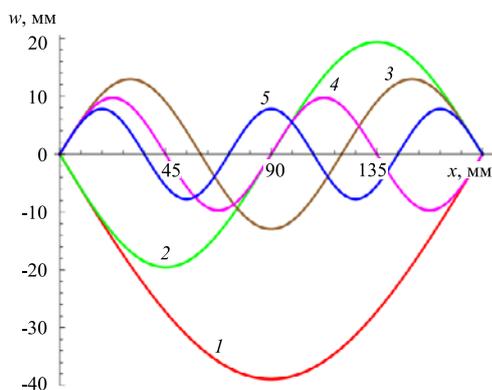


Рис. 6. Формы потери устойчивости продольно сжатой шарнирно опертой пластины, цифрами у кривых обозначено число полуволн

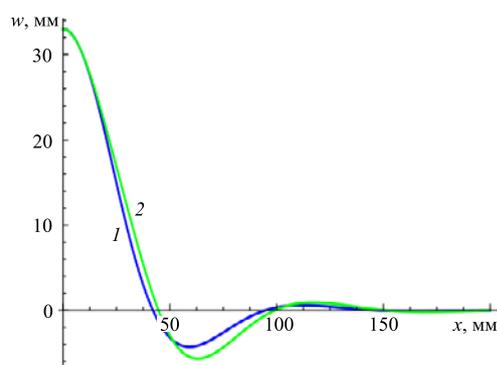


Рис. 7. Эпюры прогибов балки (кривая 1, аналитическая модель) и пластины (кривая 2, метод конечных элементов) в случае упругого основания и учета отслоения

Для сравнения результатов, полученных по предложенной аналитической модели балки на упругом основании с данными компьютерного моделирования для пластины перейдем от безразмерных к размерным переменным, полагая, что характерным линейным параметром является длина участка отслоения. Напомним, что для прогибов балки кривая 2 на рисунке 5 получена при значении параметра $\eta = 1,75$. Из соотношения связи $c = \eta^4 EI$ коэффициента жесткости упругого основания c и параметра η , с учетом ширины пластины, находим: $c = 4 \cdot 10^{-4}$ Н/мм³. На рисунке 7 представлены эпюры прогибов балки (кривая 1) и пластины (кривая 2). Полное совпадение значений прогибов в плоскости симметрии ($x = 0$) достигнуто искусственно: поскольку амплитуды прогибов в уравнениях (14) определяются с точностью до постоянного множителя, то значение константы C_1 в (14), для удобства сравнения моделей, выбрано таким, чтобы прогибы при $x = 0$ оказались одинаковыми. Поэтому можно говорить только о качественном совпадении решений по разным моделям, что и показывает рисунок 7. Формы потери устойчивости пластины на рисунке 6 представлены в деформированной конфигурации, а на рисунке 7 — в отсчетной, поэтому координаты правого торца различаются: $x = 180$ (Рис. 6) и $x = 200$ (Рис. 7).

Критические напряжения, вызывающие потерю устойчивости пластины на упругой подложке с участком границы раздела длиной $2l$, где уже произошло отслоение (Рис. 2), получены в [2] в виде:

$$\sigma^* = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (15)$$

где h — толщина пластины. Когда продольные напряжения σ достигают критического значения σ^* , пластина теряет устойчивость, изгибаясь с формированием трех полуволн (Рис. 7). Как видно

из формулы (15), критические напряжения не зависят от свойств основания и определяются относительными размерами отслоившегося участка. Результаты расчетов при различных длинах участка отслоения ($l = 25, 38, 50$ мм) показывают, что критические напряжения уменьшаются с увеличением l , вследствие чего можно утверждать о возможности прогрессирующего отслаивания при достижении нагрузкой критического значения. Однако, как отмечается в [12], формула (15) справедлива только при условии, что края отслоившегося участка жестко защемятены, чем исключается влияние упругой деформации подложки. Предложенные аналитическая и компьютерная модели свободны от указанных недостатков. Например, при $c = 0,0016 \text{ Н/мм}^3$ расчет дает значение критических напряжений $\sigma^* = 5,169 \text{ МПа}$, при $c = 0,0004 \text{ Н/мм}^3$ — $\sigma^* = 1,837 \text{ МПа}$; по формуле (15) в обоих случаях получаем $\sigma^* = 3,3 \text{ МПа}$.

4. Заключение

Построена аналитическая модель квазихрупкого отслоения тонкой пленки от упругой подложки при осевом сжатии. Пленка представляется балкой Бернулли–Эйлера на упругом основании с малым участком первоначального отслоения пленки от подложки. Решена задача потери устойчивости продольно сжатой балки, частично скрепленной с упругим основанием; для сжатой балки построены формы потери устойчивости; исследовано закритическое поведение системы «балка–подложка». Проведено сравнение результатов, полученных по предложенной модели деформирования балки, частично приклеенной к упругому основанию, с данными численного решения задачи определения потери устойчивости тонкой пластины на упругом основании в геометрически нелинейной постановке, которое показало качественное совпадение решений. На границе участка отслоения ($x = l$, Рис. 2) в области изгиба пластины возникают большие градиенты напряжений. Они вызывают дальнейшее отслаивание пластины от подложки и соответствующее изменение формы изгиба. Компьютерное моделирование показало возможность прогрессирующего отслаивания тонкой пленки от основания при достижении нагрузкой критического значения. Предлагаемый подход, в отличие от существующих [2, 3, 7, 8, 30, 31], учитывает упругую деформацию подложки, то есть зависимость критических напряжений изгиба от жесткости основания. Как показали расчеты, критические напряжения в случае податливых подложек могут быть существенно меньше величины, определяемой формулой (15).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00113-а).

Литература

1. Фелдман Л., Майер Д. Основы анализа поверхности и тонких пленок. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
2. Freund L.B., Suresh S. Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 750 p.
3. Janssen G.C.A.M., Dammers A.J., Sivel V.G.M., Wang W.R. Tensile stress in hard metal films // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83, No. 16. – P. 3287-3289. DOI
4. Панин А.В., Шугуров А.П., Шрайбер Ю., Оскомов К.В. Особенности пластической деформации и разрушения тонких металлических пленок при термическом и механическом нагружении // Физ. мезомех. – 2004. – Т. 7, № S1-1. – С. 142-145.
5. Панин А.В., Шугуров А.П., Оскомов К.В., Сидоренко А.И. Мезомеханика поведения тонких пленок Cu на подложке при одноосном растяжении и термическом отжиге. Многоуровневый подход // Физ. мезомех. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 27-35.
6. Панин В.Е., Панин А.В., Сергеев В.П., Шугуров А.П. Эффекты скейлинга в структурно-фазовой самоорганизации на интерфейсе «тонкая пленка–подложка» // Физ. мезомех. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 9-21.
7. Nix W.D. Mechanical properties of thin films // Metall. Trans. A. – 1989. – Вып. 20, No. 11. – P. 2217-2245. DOI
8. Smith U., Kristensen N., Ericson F., Schweitz J.-A. Local stress relaxation phenomena in thin aluminum films // J. Vac. Sci. Technol. A. – 1991. – Vol. 9, No. 4. – P. 2527-2535. DOI
9. Cherepanov G.P. On the theory of thermal stresses in a thin bonding layer // J. Appl. Phys. – 1995. – Vol. 78. – P. 6826-6832. DOI
10. Vinci R.P., Zielinski E.M., Bravman J.C. Thermal strain and stress in copper thin films // Thin Solid Films. – 1995. – Vol. 262, No. 1-2. – P. 142-153. DOI
11. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
12. Шугуров А.П., Панин А.В. Механизмы периодической деформации системы «пленка–подложка» под действием сжимающих напряжений // Физ. мезомех. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 23-32.
13. Wang E.Z., Shrive N.G. Brittle fracture in compression: Mechanisms, models and criteria // Eng. Fract. Mech. – 1995. – Vol. 52, No. 6. – P. 1107-1126. DOI
14. Ясинский Ф.С. О сопротивлении продольному изгибу / Ф.С. Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – С. 11-137.
15. Ясинский Ф.С. Опыт развития теории продольного изгиба / Ф.С. Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – С. 138-194.
16. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.

17. Астапов И.С., Астапов Н.С., Васильева Е.Л. Квадратичная аппроксимация больших перемещений гибкого сжатого стержня // МТТ. – 2003. – № 1. – С. 164-171.
18. Александров В.М. Устойчивость системы покрытие–подложка при продольном сжатии покрытия // МТТ. – 2001. – № 4. – С. 76-79.
19. Александров В.М., Зарубов Д.И. Устойчивость бесконечной плиты при продольном сжатии на несжимаемом преднапряженном силами тяжести упругом полупространстве // МТТ. – 2006. – № 6. – С. 61-70.
20. Tvergaard V., Needleman A. On the localization of buckling patterns // J. Appl. Mech. – 1980. – Vol. 47, No. 3. – P. 613-619. DOI
21. Астапов Н.С., Демешкин А.Г., Корнев В.М. Выпучивание стержня, лежащего на упругом основании // ПМТФ. – 1994. – Т. 35, № 5. – С. 106-112.
22. Астапов Н.С., Корнев В.М. Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПМТФ. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 162-169.
23. Panayotounakos D.E. Non-linear and buckling analysis of bars lying on an elastic foundation // Int. J. Nonlinear Mech. – 1989. – Vol. 24, No. 4. – P. 295-307. DOI
24. Waas A.M. Initial postbuckling behavior of beams on non-linear elastic foundations // Mech. Res. Commun. – 1990. – Vol. 17, No. 4. – P. 239-248. DOI
25. Vallabhan C.V.G., Das Y.C. A refined model for beams on elastic foundations // Int. J. Solids Struct. – 1991. – Vol. 27, No. 5. – P. 629-637. DOI
26. Астапов Н.С., Корнев В.М. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // ПМТФ. – 1994. – Т. 35, № 2. – С. 130-142.
27. Астапов Н.С. Приближенное представление формы сжатого гибкого стержня // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 200-203.
28. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
29. MARC Users Guide. Vol. A: Theory and Users Information. – Santa Ana (CA): MSC Software Corporation, 2012. – 813 p.
30. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin films on compliant substrates under compression // Int. J. Fracture. – 2000. – Vol. 104, No. 2. – P. 169-179. DOI
31. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Int. J. Fracture. – 2002. – Vol. 113, No. 1. – P. 39-55. DOI

References

1. Feldman L.C., Maier J.W. *Fundamentals of surface and thin film analysis*. North Holland, New York, 1986.
2. Freund L.B., Suresh S. *Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003. 750 p.
3. Janssen G.C.A.M., Dammers A.J., Sivel V.G.M., Wang W.R. Tensile stress in hard metal films. *Appl. Phys. Lett.*, 2003, vol. 83, no. 16, pp. 3287-3289. DOI
4. Panin A.V., Shugurov A.R., Shreiber J., Oskomov K.V. Peculiarities of plastic deformation and fracture of thin metal films under thermal and mechanical loading. *Phys. Mesomech.*, 2004, vol. 7, no. S1-1, pp. 142-145.
5. Panin A.V., Shugurov A.R., Oskomov K.V., Sidorenko A.I. Mesomechanics of the behavior of thin Cu films on substrates during uniaxial tension and thermal annealing. Multilevel approach. *Phys. Mesomech.*, 2005, vol. 8, no. 4, pp. 27-35.
6. Panin V.E., Panin A.V., Sergeev V.P., Shugurov A.R. Scaling effects in structural-phase self-organization at the “thin film-substrate” interface. *Phys. Mesomech.*, 2007, vol. 10, no. 3-4, pp. 117-128.
7. Nix W.D. Mechanical properties of thin films. *Metall. Trans. A*, 1989, vol. 20, no. 11, pp. 2217-2245. DOI
8. Smith U., Kristensen N., Ericson F., Schweitz J.-A. Local stress relaxation phenomena in thin aluminum films. *J. Vac. Sci. Technol. A*, 1991, vol. 9, no. 4, pp. 2527-2535. DOI
9. Cherepanov G.P. On the theory of thermal stresses in a thin bonding layer. *J. Appl. Phys.*, 1995, vol. 78, pp. 6826-6832. DOI
10. Vinci R.P., Zielinski E.M., Bravman J.C. Thermal strain and stress in copper thin films. *Thin Solid Films*, 1995, vol. 262, no. 1-2, pp. 142-153. DOI
11. Volmir A.S. *Stability of deformable systems*. Moscow, Nauka publ., 1967. 984 p.
12. Shugurov A.R., Panin A.V. Mechanisms of periodic deformation of the film-substrate system under compressive stress. *Phys. Mesomech.*, 2010, vol. 13, no. 1-2, pp. 83-91.
13. Wang E.Z., Shrive N.G. Brittle fracture in compression: Mechanisms, models and criteria. *Eng. Fract. Mech.*, 1995, vol. 52, no. 6, pp. 1107-1126. DOI
14. Yasinskiy F.S. *Selected works on stability of compressed rods*. Moscow, Gostekhizdat publ., 1952, pp. 11-137.
15. Yasinskiy F.S. *Selected works on stability of compressed rods*. Moscow, Gostekhizdat publ., 1952, pp. 138-194.
16. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic foundation]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1960. 492 p.
17. Astapov I.S., Astapov N.S., Vasil'eva E.L. Quadratic approximation of large displacements of a flexible compressed beam. *Mechanics of Solids*, 2003, vol. 38, no. 1, pp. 133-138.
18. Alexandrov V.M. Stability of a coating-substrate system under longitudinal compression of the coating. *Mechanics of Solids*, 2001, vol. 36, no. 4, pp. 60-63.
19. Alexandrov V.M., Zarubov D.I. Stability of an infinite plate in longitudinal compression on an incompressible elastic half-space prestressed by gravity. *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, no. 6, pp. 48-56.
20. Tvergaard V., Needleman A. On the localization of buckling patterns. *J. Appl. Mech.*, 1980, vol. 47, no. 3, pp. 613-619. DOI
21. Astapov N.S., Demeshkin A.G., Kornev V.M. Buckling of a bar on an elastic base. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1994, vol. 35, no. 5, pp. 739-744. DOI

22. Astapov N.S., Kornev V.M. Buckling of an eccentrically compressed bar. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1996, vol. 37, no. 2, pp. 287-293. [DOI](#)
23. Panayotounakos D.E. Non-linear and buckling analysis of bars lying on an elastic foundation. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1989, vol. 24, no. 4, pp. 295-307. [DOI](#)
24. Waas A.M. Initial postbuckling behavior of beams on non-linear elastic foundations. *Mech. Res. Commun.*, 1990, vol. 17, no. 4, pp. 239-248. [DOI](#)
25. Vallabhan C.V.G., Das Y.C. A refined model for beams on elastic foundations. *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol. 27, no. 5, pp. 629-637. [DOI](#)
26. Astapov N.S., Kornev V.M. Postbuckling behavior of an ideal bar on an elastic foundation. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1994, vol. 35, no. 2, pp. 286-296. [DOI](#)
27. Astapov N.S. An approximation of the form of a compressed flexible rod. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 535-538. [DOI](#)
28. Korobeinikov S.N. *Nelineinoe deformirovanie tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk, SB RAS publ., 2000. 262 p.
29. MARC Users Guide. Vol. A: Theory and Users Information. Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2012. 813 p.
30. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin films on compliant substrates under compression. *Int. J. Fracture*, 2000, vol. 104, no. 2, pp. 169-179. [DOI](#)
31. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fracture*, 2002, vol. 113, no. 1, pp. 39-55. [DOI](#)

Поступила в редакцию 13.11.2013; опубликована в электронном виде 31.03.2014