

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.4.52](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.4.52)
УДК 539.319

ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СТЕКЛЮЩИХСЯ ПОЛИМЕРОВ В СЛУЧАЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

К.А. Тихомирова¹, Н.А. Труфанов¹, И.Н. Шардаков²

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Рассмотрено численное моделирование и экспериментальное исследование термомеханического поведения стеклющихся полимерных материалов с учетом больших деформаций. Для случая одноосного напряженного состояния реализована процедура численного решения, предусматривающая предварительную линеаризацию построенных определяющих соотношений. Проведена серия термомеханических экспериментов для образцов из слабосшитой эпоксидной смолы. Найдены материальные константы модели, достигнуто удовлетворительное соответствие экспериментальных данных и результатов численного прогноза.

Ключевые слова: математическое моделирование, термомеханика, стеклование, напряженно-деформированное состояние, численный и физический эксперимент

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF GLASSY POLYMERS IN THE CASE OF LARGE DEFORMATIONS

K.A. Tikhomirova¹, N.A. Trufanov¹ and I.N. Shardakov²

¹Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

An experimental research and numerical simulation of thermomechanical behavior of glassy polymers at large deformations are considered. The obtained constitutive equations are linearized for numerical implementation and applied to uniaxial compression case. A series of thermomechanical experiments for lightly-linked epoxy specimens has been conducted. Material constants for constitutive model are obtained. A satisfying accordance of numerical and experimental data is shown.

Key words: mathematical simulation, thermomechanics, glass transition, stress-strain state, numerical and physical experiments

1. Введение

Полимерные материалы характеризуются значительной зависимостью механических свойств от температуры, что определяется их высокомолекулярным строением и ярко проявляется, например, в терморелаксационных переходах, из которых наиболее выраженными являются стеклование при охлаждении и обратное явление — размягчение при нагреве (расстекловывание). Большинство технологических процессов производства изделий из полимерных материалов включает изменение температуры в достаточно широком диапазоне, что может приводить к формированию остаточных напряжений и деформаций в изделиях. Стеклование аморфных полимеров служит одной из причин проявления эффекта памяти формы — способности материала временно сохранять деформированную форму и восстанавливать исходную форму под воздействием внешних параметров. Такие материалы находят широкое применение в медицине [1, 2], микроэлектронике и некоторых других отраслях промышленности. Поэтому актуальной становится проблема изучения термомеханического поведения полимеров.

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных моделированию термомеханического поведения аморфных и кристаллических полимеров в случае малых [3–11] и больших [12–19] деформаций. В данной работе рассматривается вариант построения определяющих соотношений, учитывающих большие деформации стеклющихся полимеров, и приводится экспериментальное обоснование полученных соотношений, а также методика численной реализации задачи деформирования при одноосном нагружении стеклющегося полимерного стержня. Следует отметить, что для корректного описания эффекта памяти формы необходим учет именно больших деформаций.

2. Построение определяющих соотношений

Стеклование сопровождается изменением механических свойств охлаждающегося материала при переходе через некоторый температурный интервал (интервал стеклования с границами T_{g1} и T_{g2}), что связано с ограничением сегментарной подвижности макромолекул полимера. Для математического

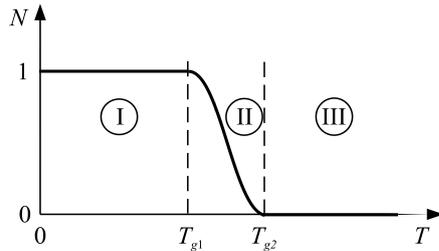


Рис. 1. Зависимость функции стеклования $N(T)$ от температуры; I – область застеклованного состояния, II – переходная область, III – область размягченного состояния

описания данного эффекта вводится функция стеклования $N(T)$ (Рис. 1), представляющая собой степень застеклованности материала и принимающая значения от 0 до 1 [11].

При температурах выше T_{g2} материал находится в размягченном состоянии, ниже T_{g1} — в застеклованном состоянии. В процессе охлаждения увеличение $N(T)$ внутри интервала стеклования соответствует наращиванию межмолекулярных связей в материале, причем считается, что каждая новая связь в момент своего возникновения не деформирована.

В данной работе принята упругая модель поведения материала как в застеклованном, так

и в размягченном состояниях. Предполагается также, что в процессе деформирования материал сохраняет изотропию свойств.

Для описания поведения среды при больших деформациях используются понятия начальной и текущей конфигураций [20]. Первой из них соответствует радиус-вектор $\mathbf{r}(q^i)$, второй — $\mathbf{R}(q^i)$, где q^i — материальные координаты ($i=1, 2, 3$). В каждой конфигурации введем ее локальный базис: \mathbf{r}^i и \mathbf{R}^i .

Упругий потенциал стеклующейся системы можно записать в виде [12]:

$$W(C_t) = W_1(\hat{C}_t) + \int_0^t W_2(\hat{C}_{\tau^*-t}) dN(\tau), \quad (1)$$

где W_1 соотносится с размягченным состоянием, W_2 — с дополнительными связями полностью застеклованного состояния; $\hat{C}_t = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}}$ — тензор меры деформаций Коши–Грина, характеризующий деформирование от начального до текущего момента времени t ; $\hat{C}_{\tau^*-t} = \hat{\mathbf{F}}_{\tau^*}^{-T} \cdot \hat{C}_t \cdot \hat{\mathbf{F}}_{\tau^*}^{-1}$ — тензор меры деформаций Коши–Грина при деформировании от момента времени τ^* , соответствующего степени стеклования $N(\tau)$ на этапе охлаждения, до текущего момента времени; $\hat{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{r}^i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right)^T = (\nabla \mathbf{R})^T$ — градиент места, преобразующий начальную конфигурацию в текущую; $\hat{\mathbf{F}}_{\tau^*}$ — градиент места, перестраивающий начальную конфигурацию в соотносящуюся с моментом времени τ^* . Символ «-T» означает операцию транспонирования обратной матрицы.

Упругий потенциал позволяет перейти к энергетическому тензору напряжений:

$$\hat{\mathbf{Q}} = 2J^{-1} \partial W(\hat{C}_t) / \partial \hat{C}_t, \quad (2)$$

где $J = \sqrt{G/g}$ — якобиан; $G = \det(G_{ij})$ — определитель матрицы ковариантных компонент метрического тензора в текущей конфигурации; $g = \det(g_{ij})$ — определитель матрицы ковариантных компонент метрического тензора \mathbf{g} в начальной конфигурации.

Выберем конкретный вид составляющих упругого потенциала W_1 и W_2 одинаковым; воспользуемся двухконстантным потенциалом Пенга–Ландела (3), рекомендуемым в [21] для описания поведения полимерных материалов:

$$W = \frac{1}{2} \mu (I_1 I_3^{-1/3} - 3) + \frac{1}{2} B (I_3^{1/2} - 1)^2. \quad (3)$$

Здесь μ — модуль сдвига; B — объемный модуль; $I_1 = \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{C}}$, $I_3 = \det(\hat{\mathbf{C}})$ — первый и третий инварианты тензора меры деформаций Коши–Грина.

На основании выражений (1)–(3) определяющие соотношения, учитывающие большие деформации стеклующихся полимеров, принимают вид:

$$\hat{Q}(t) = \mu_1 \left[\left(I_3(\hat{C}_t) \right)^{-5/6} \cdot \left(\hat{g} - \frac{I_1(\hat{C}_t)}{3} \hat{C}_t^{-1} \right) \right] + B_1 \left(\theta(\hat{C}_t) \hat{C}_t^{-1} \right) + \int_0^t \mu_2 \left[\left(I_3(\hat{C}_{\tau^*-t}) \right)^{-5/6} \cdot \left(\hat{g} - \frac{I_1(\hat{C}_{\tau^*-t})}{3} \hat{C}_{\tau^*-t}^{-1} \right) \right] dN_C(\tau) + \int_0^t B_2 \left(\theta(\hat{C}_{\tau^*-t}) \hat{C}_{\tau^*-t}^{-1} \right) dN_V(\tau), \quad (4)$$

где μ_1, B_1 — материалы константы, характерные для размягченного состояния; $\mu_2 = \mu_g - \mu_1, B_2 = B_g - B_1$; μ_g, B_g — материалы константы для застеклованного состояния; $\theta(C_t) = I_3^{1/2}(C_t) - 1$ — относительное изменение объема; $N_V(t), N_C(t)$ — функции стеклования, соответствующие объемной деформации и деформации сдвига.

3. Описание экспериментов

С целью верификации модели и определения ее параметров проведена серия экспериментов с применением динамического механического анализатора DMA Q800 V20.24 Build 43. Ведущим инженером Института технической химии УрО РАН (г. Пермь) С.Н. Лысенко для испытаний были изготовлены образцы из эпоксидной смолы специального состава с относительно слабой сшивкой, так что в размягченном состоянии возможно проявление больших деформаций. Образцы имели вид цилиндров диаметром 5,8 мм и высотой 7,8 мм. Проводился нагрев образцов с разной скоростью при постоянной сжимающей нагрузке. Получена серия термомеханических кривых при нагрузке 1,55 Н и разных скоростях нагрева: 0,63; 1,25; 2,5; 5°С/мин (см. Рис. 2, жирные линии).

В численной модели, описывающей экспериментальные данные, в качестве функции стеклования $N(T)$ использовалось распределение Лапласа:

$$N = \begin{cases} 1 - 0,5 \exp\left(\frac{T - T_g}{\gamma_L}\right), & T < T_g; \\ 0,5 \exp\left(-\frac{T - T_g}{\gamma_L}\right), & T \geq T_g, \end{cases}$$

где γ_L — параметр, отвечающий за ширину температурного интервала стеклования, а T_g — за его положение на температурной оси. Считалось, что $N_C = N_V = N$.

Также выполнены эксперименты по температурному деформированию образцов без нагрузки (Рис. 3). Полученная кривая аппроксимировалась двумя прямыми за пределами интервала стеклования при помощи метода наименьших квадратов. Отсюда были найдены линейные коэффициенты температурного расширения, соответствующие размягченному и застеклованному состояниям материала: $\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ при $T > T_{g\alpha}$, $\alpha_2 = 19 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, при $T \leq T_{g\alpha}$. Здесь $T_{g\alpha}$ — средняя температура интервала стеклования. Таким образом, в соотношения (4) входят шесть независимых материальных параметров: $B_1, B_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2$, и три параметра модели, зависящие от скорости нагрева: $\gamma_L, T_g, T_{g\alpha}$.

Таблица. Параметры модели

Скорость нагрева, °С/мин	$\gamma_L, \text{ } ^\circ\text{C}$	$T_g, \text{ } ^\circ\text{C}$	$T_{g\alpha}, \text{ } ^\circ\text{C}$
0,63	3,5	52,5	77
1,25	4,6	52	80
2,5	5,5	54	95
5	5,6	66	105

Экспериментально получены диаграммы деформирования образцов, из анализа которых в зоне малых деформаций определены значения модулей упругости материала в размягченном и застеклованном состояниях: $E_1 = 378 \text{ КПа}$, $E_g = 0,77 \text{ ГПа}$. Так как материал в размягченном состоянии ведет себя как несжимаемый, его коэффициент Пуассона ν_1 принят равным 0,49. Проведена серия численных

исследований и установлено, что значение коэффициента Пуассона для застеклованного состояния фактически не влияет на результат. По этой причине в данной работе в соответствии с [11] принято значение $\nu_g = 0,42$. От этих материальных характеристик нетрудно перейти к сдвиговому и объемному модулям. Остальные параметры (см. Табл.) определялись на основе аппроксимации экспериментально измеренных термомеханических кривых. Анализ полученных данных показывает, что увеличение скорости нагрева ведет к росту температуры стеклования и увеличению ширины интервала стеклования.

4. Алгоритм численного решения задачи

Для построения численных алгоритмов нелинейные определяющие соотношения (4) линеаризуются с использованием методики, предложенной в [22]. Согласно этой методике вводится в рассмотрение промежуточная конфигурация с радиус-вектором \mathbf{R}_0 , близкая к текущей. Справедливо равенство $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{u}$, где \mathbf{u} — вектор перемещения точки, ε — малый формальный параметр. Ниже приведены входящие в (4) линеаризованные кинематические величины с удержанием линейных слагаемых относительно ε :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_t &= \hat{\mathbf{C}}_{t_0} + 2\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \\ (\hat{\mathbf{C}}_t)^{-1} &= (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} - 2\varepsilon (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1}, \\ I_1(\hat{\mathbf{C}}_t) &= I_1(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) + 2\varepsilon I_1(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*), \\ I_3(\hat{\mathbf{C}}_t) &= I_3(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) + I_3(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-T} \cdot 2\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \\ I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_t) &= I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) - \frac{10}{6} \varepsilon I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-T} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \\ \theta(\hat{\mathbf{C}}_t) &= \theta(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) + \frac{1}{\sqrt{I_3(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})}} \varepsilon I_3(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-T} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \hat{\mathbf{F}}_{t_0}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{t_0}$ — тензор малых деформаций; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{h}}^T)/2$, где $\hat{\mathbf{h}} = (\nabla_0 \mathbf{u})^T$; $\nabla_0 = \mathbf{R}_0^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ — оператор Гамильтона относительно промежуточной конфигурации, близкой к текущей; t_0 — момент времени, соответствующий промежуточной конфигурации. Для величин с индексами $\tau^* - t$ (см. (4)) линеаризованные выражения аналогичны выражениям (5), но вместо $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ в них входят $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} = \hat{\mathbf{f}}_{\tau^*}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{\tau^*}^{-1}$, где $\hat{\mathbf{f}}_{\tau^*}$ — градиент места, преобразующий конфигурацию в момент времени τ^* в текущую.

Подставляя (5) в (4), получаем линеаризованные определяющие соотношения для сложного напряженного состояния стеклующихся материалов в случае больших деформаций:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}(t) &= \hat{\mathbf{Q}}(t_0) + \mu_1 \left[I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) \left(2 \frac{I_1(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})}{3} (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} - \frac{2}{3} I_1(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{10}{6} I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-T} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \right] \left(\hat{\mathbf{g}} - \frac{I_1(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})}{3} \hat{\mathbf{C}}_{t_0}^{-1} \right) + \\ &\quad + B_1 \left\{ -2\theta(\hat{\mathbf{C}}_{t_0}) (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} + \left(\sqrt{I_3(\hat{\mathbf{C}}_{t_0})} (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-T} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \right) (\hat{\mathbf{C}}_{t_0})^{-1} \right\} + \\ &\quad + \int_0^{t_0} \mu_2 \left[I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0}) \left(2 \frac{I_1(\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})}{3} (\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \cdot (\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})^{-1} - \frac{2}{3} I_1(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}) (\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})^{-1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{10}{6} I_3^{-5/6}(\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0}) (\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})^{-T} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \right] \left(\hat{\mathbf{g}} - \frac{I_1(\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})}{3} (\hat{\mathbf{C}}_{\tau^*-t_0})^{-1} \right) \Big] dN_C(\tau) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\mu_2 \left\{ I_3^{-5/6}(\hat{C}_{\tau^*-t_0}) \left[\hat{g} - \frac{1}{3} \left(I_1(\hat{C}_{\tau^*-t_0})(\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} - 2I_1(\hat{C}_{\tau^*-t_0})(\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \cdot \hat{e}^{*'} \cdot (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} + 2I_1(\hat{e}^{*}')(\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{10}{6} I_3^{-5/6}(\hat{C}_{\tau^*-t_0}) \left((\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-T} \cdot \hat{e}^{*'} \right) \left(\hat{g} - \frac{I_1(\hat{C}_{\tau^*-t_0})}{3} (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \right) \right\} (N_C(t) - N_C(t_0)) + \\
 & \quad + \int_0^{t_0} B_2 \left[-2\theta(\hat{C}_{\tau^*-t_0})(\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \cdot \hat{e}^{*'} \cdot (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} + \left(\sqrt{I_3(\hat{C}_{\tau^*-t_0})} (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-T} \cdot \hat{e}^{*'} \right) (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \right] dN_V(\tau) + \\
 & \quad + B_2 \left\{ \theta(\hat{C}_{\tau^*-t_0})(\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} - 2\theta(\hat{C}_{\tau^*-t_0})(\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \cdot \hat{e}^{*'} \cdot (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sqrt{I_3(\hat{C}_{\tau^*-t_0})} (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-T} \cdot \hat{e}^{*'} \right) (\hat{C}_{\tau^*-t_0})^{-1} \right\} (N_V(t) - N_V(t_0)). \tag{6}
 \end{aligned}$$

Здесь $\hat{Q}(t_0)$ — начальные напряжения, найденные на предыдущем шаге линеаризации. Форма перехода от энергетического тензора к тензору истинных напряжений имеет вид $\hat{T} = \hat{F} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{F}^T$. Для учета температурной деформации используется мультипликативное разложение градиента места на упругую (\hat{F}_E) и температурную (\hat{F}_T) составляющие [23]: $\hat{F} = \hat{F}_E \cdot \hat{F}_T$, где \hat{F}_T — шаровой тензор.

Рассмотрим случай однородного одноосного напряженного состояния, соответствующий продольному нагружению стержня. Осевые напряжения считаются известными: $\sigma_{11}(t) = P/S(t)$, где $S(t)$ — площадь сечения стержня, изменяющаяся в процессе деформирования; P — нагрузка. Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Полный градиент места представим через величины относительного удлинения $\lambda_i(t)$; $\lambda_3(t) = \lambda_2(t)$ в силу изотропии материала. Запишем также его температурную составляющую:

$$\hat{F}_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix}; \quad \hat{F}_T = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha \Delta T \end{pmatrix},$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения (ЛКТР); ΔT — приращение температуры.

Кинематические величины, входящие в (5), выраженные через относительные удлинения, будут иметь вид:

$$\hat{C}_t = \begin{pmatrix} \lambda_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2(t) \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$I_1(\hat{C}_t) = \lambda_1^2(t) + 2\lambda_2^2(t), \quad I_3(\hat{C}_t) = \lambda_1^2(t)\lambda_2^4(t), \quad \theta(\hat{C}_t) = \lambda_1(t)\lambda_2^2(t) - 1;$$

$$\hat{C}_{\tau^*-t} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-2}(\tau^*)\lambda_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2}(\tau^*)\lambda_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^{-2}(\tau^*)\lambda_2^2(t) \end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$I_1(\hat{C}_{\tau^*-t}) = \lambda_1^{-2}(\tau^*)\lambda_1^2(t) + 2\lambda_2^{-2}(\tau^*)\lambda_2^2(t);$$

$$I_3(\hat{C}_{\tau^*-t}) = \lambda_1^{-2}(\tau^*)\lambda_1^2(t)\lambda_2^{-4}(\tau^*)\lambda_2^4(t), \quad \theta(\hat{C}_{\tau^*-t}) = \frac{\lambda_1(t)\lambda_2^2(t)}{\lambda_1(\tau^*)\lambda_2^2(\tau^*)} - 1;$$

$$\hat{e}^* = \begin{pmatrix} (\lambda_1(t) - \lambda_1(t_0))\lambda_1(t_0) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2(t) - \lambda_2(t_0))\lambda_2(t_0) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_2(t) - \lambda_2(t_0))\lambda_2(t_0) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Подстановка выражений (7)–(9) в соотношения (6) приводит к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ на каждом шаге линеаризации:

$$\begin{cases} Q_{11}(t) = Q_{11}(t_0) + a_1(t_0) + b_1(t_0)\lambda_1(t) + c_1(t_0)\lambda_2(t); \\ 0 = a_2(t_0) + b_2(t_0)\lambda_1(t) + c_2(t_0)\lambda_2(t), \end{cases} \quad (10)$$

где выражения для коэффициентов a_i , b_i , c_i опущены в силу их громоздкости.

Полученное решение использовалось для описания экспериментальных термомеханических кривых, представленных на рисунках 2, 3. Путем численных исследований установлено, что при увеличении количества шагов линеаризации наблюдается сходимость решения. Задача решалась с числом шагов 100, 500, 1000 и 10000, и поскольку два последних варианта дали практически совпадающий результат, в дальнейшем применялось значение t_0 , соответствующее 1000 шагов. Сопоставление экспериментальных данных и результатов численного расчета подтверждает их хорошее соответствие во всем температурном диапазоне, в том числе в диапазоне температур релаксационного перехода (стеклования).

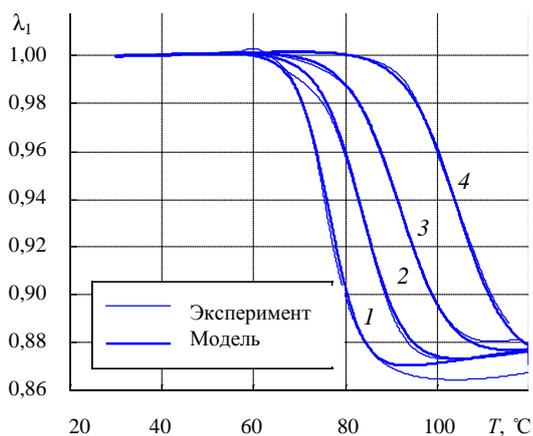


Рис. 2. Деформирование образца сжимающей нагрузкой 1,55 Н при различных скоростях нагрева $T, ^\circ\text{C}$: 0,63 (кривая 1); 1,25 (2); 2,5 (3); 5 (4)

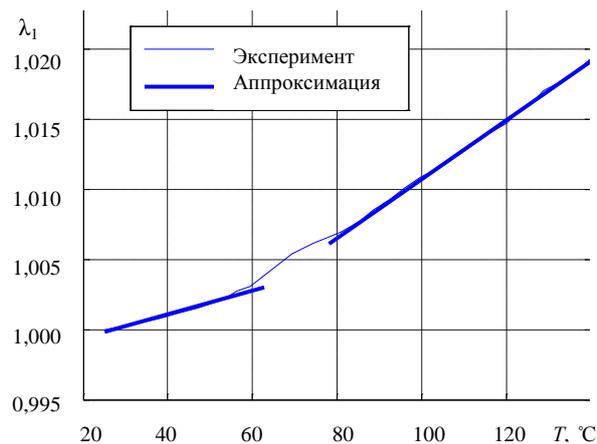


Рис. 3. Нагрев образца без нагрузки со скоростью 1,25 $^\circ\text{C}/\text{мин}$

5. Заключение

Таким образом, для описания термомеханического поведения стеклующихся материалов предложен вариант определяющих соотношений, учитывающих большие деформации. Применительно к задаче исследования одноосного напряженного состояния реализована процедура численного решения, предусматривающая предварительную линеаризацию полученных соотношений. Проведена серия термомеханических экспериментов для образцов из слабосшитой эпоксидной смолы. Установлены материальные константы модели. Получено удовлетворительное соответствие экспериментальных данных и результатов численного прогноза.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-08-00832-а, 13-01-00553а, 13-08-96038-р_урал_а).

Литература

1. Sharifi S., van Kooten T.G., Kranenburg H.-J.C. et al. An annulus fibrosus closure device based on a biodegradable shape-memory polymer network // *Biomaterials*. – 2013. – V. 34, N. 33. – P. 8105-8113. DOI
2. Yakacki C.M., Shandas R., Lanning C. et al. Unconstrained recovery characterization of shape-memory polymer networks for cardiovascular applications // *Biomaterials*. – 2007. – V. 28, N. 14. – P. 2255-2263. DOI
3. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Бегишев В.П., Шадрин О.А., Сметанников О.Ю. Описание наследственных эффектов при стекловании и размягчении эпоксидных связующих // *Пластические массы*. – 1991. – № 9. – С. 55-58.
4. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Определяющие соотношения термомеханического поведения полимерных материалов в условиях стеклования и размягчения // *МТТ*. – 1997. – № 3. – С. 106-114.
5. Shardakov I.N., Matveyenko V.P., Pistov N.V., Beghishev V.P. Simulation of thermomechanical processes in crystallizing polymers // *Polym. Eng. Sci.* – 1997. – V. 37, N. 8. – P. 1270-1279. DOI
6. Матвеев В.П., Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода // *Физ. мезомех.* – 1999. – Т. 2, № 4. – С. 23-29.
7. Завьялова Т.Г., Труфанов Н.А. Определяющие соотношения для вязкоупругого тела в условиях кристаллизации // *ПМТФ*. – 2005. – Т. 46, № 4. – С. 78-87.

8. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Численный анализ технологических и остаточных напряжений в стеклюющихся телах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 92-108. DOI
9. Голотина Л.А., Шардаков И.Н. Численное моделирование термомеханического поведения аморфно-кристаллических полимеров с памятью формы // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 5-10. DOI
10. Matveenko V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition // Acta Mech. – 2012. – V. 223, N. 6. – P. 1261-1284. DOI
11. Матвеев В.П., Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода. – М.: Физматлит, 2009. – 176 с.
12. Куликова Т.Г., Труфанов Н.А. Определяющие соотношения для кристаллизующегося полимерного материала и пошаговая процедура решения с учетом конечных деформаций // Вычислительная механика: Сборник научных трудов. – 2008. – № 7. – С. 170-180.
13. Anand L., Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part I: Formulation // Int. J. Plasticity. – 2009. – V. 25, N. 8. – P. 1474-1494. DOI
14. Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A., Anand L. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part II: Applications // Int. J. Plasticity. – 2009. – V. 25, N. 8. – P. 1495-1539. DOI
15. Dupaix R.B., Boyce M.C. Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition // Mech. Mater. – 2007. – V. 39, N. 1. – P. 39-52. DOI
16. Richeton J., Ahzi S., Vecchio K.S. et al. Modeling and validation of the large deformation inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates // Int. J. Solids Struct. – 2007. – V. 44, N. 24. – P. 7938-7954. DOI
17. Srivastava V., Chester S.A., Anand L. Thermally actuated shape-memory polymers: Experiments, theory, and numerical simulations // J. Mech. Phys. Solids. – 2010. – V. 58, N. 8. – P. 1100-1124. DOI
18. Srivastava V., Chester S.A., Ames N.M., Anand L. A thermo-mechanically-coupled large-deformation theory for amorphous polymers in a temperature range which spans their glass transition // Int. J. Plasticity. – 2010. – V. 26, N. 8. – P. 1138-1182. DOI
19. Роговой А.А., Столбова О.С. Определяющее уравнение в «упругом» приближении для полимеров с памятью формы при больших деформациях // Вестник ПГУ. Физика. – 2012. – № 4 (22). – С. 165-168.
20. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
21. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
22. Новокианов П.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // МТТ. – 2002. – № 4. – С. 77-94.
23. Vujošević L., Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theor. Appl. – 2002. – V. 28-29. – P. 379-399. DOI

References

1. Sharifi S., van Kooten T.G., Kranenburg H.-J.C. et al. An annulus fibrosus closure device based on a biodegradable shape-memory polymer network // Biomaterials. – 2013. – V. 34, N. 33. – P. 8105-8113. DOI
2. Yakacki C.M., Shandas R., Lanning C. et al. Unconstrained recovery characterization of shape-memory polymer networks for cardiovascular applications // Biomaterials. – 2007. – V. 28, N. 14. – P. 2255-2263. DOI
3. Shardakov I.N., Trufanov N.A., Begishev V.P., Shadrin O.A., Smetannikov O.Iu. Opisaniye nasledstvennykh effektiv pri steklovanii i razmiagchenii epoksidnykh sviazuiushchikh // Plasticheskie massy. – 1991. – N. 9. – S. 55-58.
4. Smetannikov O.Iu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Opredel'iaushchie sootnosheniia termomekhanicheskogo povedeniia polimernykh materialov v usloviakh steklovanii i razmiagcheniia // МТТ. – 1997. – N. 3. – S. 106-114.
5. Shardakov I.N., Matveenko V.P., Pistsov N.V., Beghishev V.P. Simulation of thermomechanical processes in crystallizing polymers // Polym. Eng. Sci. – 1997. – V. 37, N. 8. – P. 1270-1279. DOI
6. Matveenko V.P., Smetannikov O.Iu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Termomekhanika polimernykh materialov v usloviakh relaksatsionnogo perekhoda // Fiz. mezomekh. – 1999. – T. 2, N. 4. – S. 23-29.
7. Zavialova T.G., Trufanov N.A. Opredel'iaushchie sootnosheniia dlia viazkouprugogo tela v usloviakh kristallizatsii // PMTF. – 2005. – T. 46, N. 4. – S. 78-87.
8. Smetannikov O.Iu., Trufanov N.A. Chislennyi analiz tekhnologicheskikh i ostatocnykh napriazhenii v stekliushchikhsia telakh // Vychisl. mekh. splosh. sred. – 2008. – T. 1, N. 1. – S. 92-108. DOI
9. Golotina L.A., Shardakov I.N. Chislennoe modelirovanie termomekhanicheskogo povedeniia amorfno-kristallicheskih polimerov s pamiat'iu formy // Vychisl. mekh. splosh. sred. – 2011. – T. 4, N. 4. – S. 5-10. DOI
10. Matveenko V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition // Acta Mech. – 2012. – V. 223, N. 6. – P. 1261-1284. DOI
11. Matveenko V.P., Smetannikov O.Iu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Termomekhanika polimernykh materialov v usloviakh relaksatsionnogo perekhoda. – М.: Физматлит, 2009. – 176 с.
12. Kulikova T.G., Trufanov N.A. Opredel'iaushchie sootnosheniia dlia kristallizuiushchegosia polimernogo materiala i poshagovaia protsedura resheniia s uchetom konechnykh deformatsii // Vychislitel'naia mekhanika: Sbornik nauchnykh trudov. – 2008. – N. 7. – S. 170-180.
13. Anand L., Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part I: Formulation // Int. J. Plasticity. – 2009. – V. 25, N. 8. – P. 1474-1494. DOI
14. Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A., Anand L. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part II: Applications // Int. J. Plasticity. – 2009. – V. 25, N. 8. – P. 1495-1539. DOI

15. *Dupaix R.B., Boyce M.C.* Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition // *Mech. Mater.* – 2007. – V. 39, N. 1. – P. 39-52. DOI
16. *Richeton J., Ahzi S., Vecchio K.S. et al.* Modeling and validation of the large deformation inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – V. 44, N. 24. – P. 7938-7954. DOI
17. *Srivastava V., Chester S.A., Anand L.* Thermally actuated shape-memory polymers: Experiments, theory, and numerical simulations // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2010. – V. 58, N. 8. – P. 1100-1124. DOI
18. *Srivastava V., Chester S.A., Ames N.M., Anand L.* A thermo-mechanically-coupled large-deformation theory for amorphous polymers in a temperature range which spans their glass transition // *Int. J. Plasticity.* – 2010. – V. 26, N. 8. – P. 1138-1182. DOI
19. *Rogovoi A.A., Stolbova O.S.* Opredel'aiushchee uravnenie v «uprugom» priblizhenii dlia polimerov s pamiat'iu formy pri bol'shikh deformatsiiakh // *Vestnik PGU. Fizika.* – 2012. – N. 4 (22). – S. 165-168.
20. *Lur'e A.I.* Nelineinaia teoriia uprugosti. – M.: Nauka, 1980. – 512 s.
21. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Metody prikladnoi viazkouprugosti. – Ekaterinburg: UrO RAN, 2003. – 411 s.
22. *Novoksharov R.S., Rogovoi A.A.* O postroenii zvoliutsionnykh opredel'aiushchikh sootnoshenii dlia konechnykh deformatsii // *MTT.* – 2002. – N. 4. – S. 77-94.
23. *Vujošević L., Lubarda V.A.* Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // *Theor. Appl.* – 2002. – V. 28-29. – P. 379-399. DOI

Поступила в редакцию 18.11.13; опубликована в электронном виде 27.12.13

Сведения об авторах

Тихомирова Ксения Алексеевна, магистрант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский пр., д. 29; E-mail: kse-tikh@yandex.ru

Труфанов Николай Александрович, д.т.н., проф., зав.каф., ПНИПУ; E-mail: nat@pstu.ru

Шардаков Игорь Николаевич, д.ф.м.н., проф., зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; E-mail: shardakov@icmm.ru