

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.48

УДК 539.374

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ К СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

И.Э. Келлер

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

Интегрируемая нелинейная модель вязкопластичности с метастабильной зависимостью от скорости деформации представляет интерес для описания пространственных автоволновых процессов в активных сплошных средах. Предложена процедура численного решения задач Коши, Гурса и смешанной задачи для нелинейных уравнений квазистатического движения данной среды в области гиперболичности. Любая из названных задач расщепляется на две несвязанные подзадачи, которые можно решать параллельно. Для численного решения каждой из них используются методы, разработанные для идеально пластического тела, не содержащие каких-либо итерационных процедур. Обсуждается постановка неклассических задач со свободными и межфазными границами.

*Ключевые слова:* вязкопластичность, отрицательная чувствительность к скорости деформации, полная интегрируемость, краевые задачи

## NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR QUASISTATICAL FLOW OF VISCOPLASTIC MEDIUM WITH NEGATIVE STRAIN RATE SENSITIVITY

I.E. Keller

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

An integrable nonlinear viscoplastic model with metastable strain rate dependence is of interest for describing the spatial autowave processes in the active media. The procedure for integrating the Cauchy, Goursat and mixed boundary-value problems has been developed for nonlinear equations of quasistatistical flow of these media in their hyperbolicity area. Each problem is decoupled into two non-interacted subproblems which are solved in parallel. These subproblems are solved numerically with the aid of the noniterative methods developed for perfectly plastic solids. The formulations of nonclassical boundary-value problems with free and interphase boundaries are discussed.

*Key words:* viscoplasticity, negative strain rate sensitivity, complete integrability, boundary-value problems

### 1. Введение

Автоволновые процессы в активных сплошных средах являются интереснейшими явлениями в естественных науках [1–3]. Экспериментально установлено, что при одноосном растяжении целого ряда материалов вместе с процессом распространения фронта локализации деформации регистрируется  $N$ -образная макроскопическая зависимость напряжения от скорости деформаций, что характеризует такие вязкопластические материалы как разновидность активных сред. Подобную аномальную зависимость от скорости деформации обнаруживают различные материалы: металлы в условиях динамического деформационного старения (эффект Портевена–Ле Шателье) [4], динамической рекристаллизации [5], перлитных превращений и двойникования; твердые полимеры [6]; среды с внутренним сухим трением — сыпучие среды и трещиноватые горные породы [7]. Такая скоростная аномалия среды может порождать режимы деформирования, сопровождаемые распространением уединенных и периодических волн локализации деформаций, сильной акустической эмиссией и характеризуемые прерывистостью диаграммы деформирования [3–6, 8–10].

Автоволновые решения существуют при наличии скрытой симметрии соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений и, как правило, обладают устойчивостью к малым возмущениям начальных и граничных условий [1–3]. Модели автоволновых явлений при одноосном растяжении образца должны быть связаны с некоторыми частными видами определяющих соотношений пластичности, расширяющими симметрию уравнений равновесия такой среды. Материальная функция  $N$ -образного вида, обеспечивающая в рамках тензорно-линейных определяющих соотношений вязкопластичности полную интегрируемость уравнений равновесия и совместности и, тем самым, выделение скрытых симметрий этих уравнений, найдена автором настоящей работы ранее [11].

Поведение пластически деформируемого металла на микроскопическом уровне сопровождается непрерывным рядом превращений дислокационных структур и связанной с этими превращениями метастабильностью его свойств. Вызванная этой метастабильностью свобода формирования макроскопических диссипативных свойств материала может быть подчинена некоторому экстремальному принципу, выделяющему максимально возможную симметрию упомянутых уравнений путем «притягивания» поведения материала к некоторому частному виду определяющих соотношений (если

такой вид «поблизости» существует и если флуктуации в системе достаточно велики). Тем самым полагается справедливой гипотеза устойчивости автоволновых решений начально-краевой задачи к малым возмущениям самих дифференциальных уравнений течения вязкопластической среды, записанных для обсуждаемого частного случая материальной функции. Это оправдывает необходимость разработки методов решения краевых задач квазистатического движения вязкопластической среды с найденной материальной функцией.

Наиболее интересные перспективы применения названных методов видятся в решении задач моделирования распространения автоволн локализации пластической деформации. Свойство интегрируемости полевых уравнений обеспечивает построение эффективной численной процедуры решения краевых задач и допускает существование аналитических решений модельных двумерных или пространственных задач. Эффект Портевена–Ле Шателье теоретически изучается путем качественного исследования одномерных моделей [12–14], сводящихся к автоколебательным системам с градиентным членом [12, 13] или системам реакция–диффузия [14]. Однако при этом теряется роль свободной поверхности, пространственный характер задачи, вследствие чего остается нераскрытой природа градиентного члена в одномерных моделях. Сложные численные модели [15, 16] также не способны ответить на эти вопросы.

В настоящей работе показано, что уравнения с найденным частным видом материальной функции удовлетворяют необходимому и достаточному условию расщепляемости квазилинейной системы на две не взаимодействующие подсистемы. В терминах замкнутых характеристических подпространств уравнения гиперболического и эллиптического типов приведены к простейшему виду. В областях, где они имеют гиперболический тип, предложен метод численного решения задач Коши и Гурса, а также смешанной задачи, каждая из которых распадается на две несвязанные подзадачи, которые могут решаться параллельно. Получены уравнения для поля скоростей в терминах характеристических переменных и разработан метод их интегрирования при условии, что поля интегралов системы (инвариантов Римана) уже найдены. Технически все сводится к процедуре численного дифференцирования и вычисления квадратур и не требует итераций. Полученные результаты представляются важными, в том числе для разработки методов решения неклассических задач со свободными границами, а также с подвижными границами, которые разделяют области с разным типом уравнений и на которых краевые условия не могут быть сформулированы в терминах инвариантов Римана.

## 2. Полевые уравнения и их запись в виде квазилинейной системы

Рассматриваются уравнения квазистатического движения несжимаемой вязкопластической среды в двумерном случае

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \quad \sigma = -pI + \frac{\tau(\xi)}{2\xi} D, \quad D = (\nabla v + v\nabla)/2, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla$  — оператор Гамильтона в текущей конфигурации,  $\sigma$  и  $D$  — тензоры истинных напряжений и деформаций скорости,  $p$  — гидростатическое давление,  $I$  — единичный тензор второго ранга,  $v$  — скорость перемещений,  $\xi = \sqrt{(1/2)D:D}$  — интенсивность деформации скорости. Предполагается, что уравнения (1) удовлетворяются в произвольной точке области, занятой движущейся средой. Их полная интегрируемость обеспечивается найденной в [11] частной моделью вязкопластической среды. Настоящая работа посвящена построению метода численного решения краевых задач для уравнений данной модели при их гиперболичности.

В декартовых ортогональных координатах  $x, y$  уравнения (1) принимают вид:

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0, \quad \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = -p + \frac{\tau(\xi)}{2\xi} v_{x,x}, \quad \sigma_{yy} = -p - \frac{\tau(\xi)}{2\xi} v_{x,x}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\tau(\xi)}{4\xi} (v_{x,y} + v_{y,x}), \\ v_{x,x} + v_{y,y} = 0, \quad \xi = \left( (v_{x,x})^2 + \frac{1}{4} (v_{x,y} + v_{y,x})^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее в работе запятая в нижних индексах означает частную производную по указанной координате. Обозначение ковариантной производной будет введено в разделе 8.

Известны лишь два частных вида функции  $\tau(\xi)$ , обеспечивающих полную интегрируемость системы (1):  $\tau = 2\mu\xi$ ,  $\mu = \text{const}$  (линейно-вязкая жидкость) и  $\tau \equiv \tau_*$ ,  $\tau_* = \text{const}$  (идеально-пластическое тело). Последний случай соответствует нелинейным уравнениям. Для другой нелинейной функции  $\tau = \tau_* + 2\mu\xi$  (тело Бингама) А.А. Ильюшиным были разработаны методы численного интегрирования уравнений (2), (3) в терминах текущего лагранжева подхода [17]. Простота определяющих соотношений тела Бингама, представляющего собой соединение двух упомянутых выше классических диссипативных сред, не гарантирует простоты численного интегрирования краевых задач, требующего организации итерационного процесса по физическим свойствам среды [18].

Компоненты тензоров напряжений и деформаций скорости записываются в виде [20]

$$\sigma_{xx} = -p - \tau(\xi)\sin(2\phi)/2, \quad \sigma_{yy} = -p + \tau(\xi)\sin(2\phi)/2, \quad \sigma_{xy} = \tau(\xi)\cos(2\phi)/2, \quad (4)$$

$$v_{x,x} = -\xi\sin(2\phi), \quad v_{y,y} = \xi\sin(2\phi), \quad v_{x,y} + v_{y,x} = 2\xi\cos(2\phi), \quad (5)$$

удовлетворяющем уравнениям (3), где  $\phi$  — угол между одной из линий максимальных касательных напряжений и осью  $x$ . Выражения (4) подставляются в уравнения (2), а выражения (5) и

$$v_{y,x} = \xi\cos(2\phi) + q, \quad v_{x,y} = \xi\cos(2\phi) - q, \quad (6)$$

где  $q = (v_{y,x} - v_{x,y})/2$  есть вихрь скорости, — в уравнения совместности деформаций скорости  $(v_{x,x})_{,y} = (v_{x,y})_{,x}$ ,  $(v_{y,y})_{,x} = (v_{y,x})_{,y}$ . В итоге уравнения равновесия и совместности сводятся к однородной квазилинейной системе

$$2p_{,x} + \tau'\sin(2\phi)\xi_{,x} + 2\tau\cos(2\phi)\phi_{,x} - \tau'\cos(2\phi)\xi_{,y} + 2\tau\sin(2\phi)\phi_{,y} = 0,$$

$$2p_{,y} - \tau'\cos(2\phi)\xi_{,x} + 2\tau\sin(2\phi)\phi_{,x} - \tau'\sin(2\phi)\xi_{,y} - 2\tau\cos(2\phi)\phi_{,y} = 0,$$

$$q_{,x} - \cos(2\phi)\xi_{,x} + 2\xi\sin(2\phi)\phi_{,x} - \sin(2\phi)\xi_{,y} - 2\xi\cos(2\phi)\phi_{,y} = 0,$$

$$q_{,y} - \sin(2\phi)\xi_{,x} - 2\xi\cos(2\phi)\phi_{,x} + \cos(2\phi)\xi_{,y} - 2\xi\sin(2\phi)\phi_{,y} = 0,$$

представимой в матричном виде

$$\mathbf{u}_{,x} + \mathbf{L}\mathbf{u}_{,y} = 0, \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad (7)$$

$$\text{где } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \\ p \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tau'\sin(2\phi) & 2\tau\cos(2\phi) & 2 & 0 \\ -\tau'\cos(2\phi) & 2\tau\sin(2\phi) & 0 & 0 \\ -\cos(2\phi) & 2\xi\sin(2\phi) & 0 & 1 \\ -\sin(2\phi) & -2\xi\cos(2\phi) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\tau'\cos(2\phi) & 2\tau\sin(2\phi) & 0 & 0 \\ -\tau'\sin(2\phi) & -2\tau\cos(2\phi) & 2 & 0 \\ -\sin(2\phi) & -2\xi\cos(2\phi) & 0 & 0 \\ \cos(2\phi) & -2\xi\sin(2\phi) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau' = d\tau/d\xi.$$

Для исследования системы (7) далее используются стандартные методы [20].

### 3. Условия полной интегрируемости системы

Собственные числа матрицы  $\mathbf{L}$  суть:

– действительные при гиперболическом типе системы (7)

$$\lambda_{1\pm} = \text{tg}(\phi \pm \beta), \quad \lambda_{2\pm} = -\text{ctg}(\phi \pm \beta), \quad \text{tg}2\beta = \sqrt{-m}, \quad m \leq 0; \quad (8)$$

– комплексные при эллиптическом типе системы (7)

$$\lambda_{1\pm} = -\text{ctg}(\vartheta \pm i\bar{\beta}), \quad \lambda_{2\pm} = \text{tg}(\vartheta \pm i\bar{\beta}), \quad \text{cth}2\bar{\beta} = \sqrt{m}, \quad m > 0, \quad (9)$$

где

$$m = \frac{d \ln \tau}{d \ln \xi} = \frac{\tau' \xi}{\tau} \quad (10)$$

есть функция чувствительности к скорости деформации,  $\vartheta = \phi - \pi/4$  — угол между одной из линий главных напряжений и осью  $x$ , а  $\beta = i\bar{\beta} + \pi/4$ . Линии в плоскости  $(x, y)$ , удовлетворяющие уравнениям  $dy/dx = -\lambda(x, y)$ , где  $\lambda = \{\lambda_{1\pm}, \lambda_{2\pm}\}$ , являются характеристиками системы (7). Выражения (8), (9) позволяют увидеть, что система (7) в каждой точке имеет при  $m < 0$  две пары ортогональных действительных характеристик, сливающихся в одну такую же пару при  $m \rightarrow 0$  (когда  $\beta \rightarrow 0$ ), а при  $m > 0$  — две пары ортогональных комплексных характеристик, сливающихся в подобную пару при  $m \rightarrow 1$  (когда  $\bar{\beta} \rightarrow \infty$ ). Оба вырожденных случая соответствуют двумерным характеристическим пространствам; при  $m = 0$  тип уравнений гиперболический, а при  $m = 1$  — эллиптический.

Дифференциальные соотношения на характеристиках находятся умножением (7) на левые собственные векторы матрицы  $\mathbf{L}$  и имеют вид

$$\begin{aligned} \tau \xi^{-1} \sqrt{m(m-1)} d\xi \pm 2\tau \sqrt{1-m} d\phi \pm 2dp - \tau \xi^{-1} \sqrt{-m} dq &= 0, \\ \tau \xi^{-1} \sqrt{m(m-1)} d\xi \pm 2\tau \sqrt{1-m} d\phi \mp 2dp + \tau \xi^{-1} \sqrt{-m} dq &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

для  $\lambda_{1\pm}$  и  $\lambda_{2\pm}$  соответственно (для эллиптического типа  $\phi$  в (11) заменяется на  $\vartheta$ ).

Каждое из пфаффовых уравнений системы (11) имеет вид  $P(\xi)d\xi + Q(\xi)d\phi + Rdp + S(\xi)dq = 0$  и вполне интегрируется при выполнении теоремы Фробениуса [21, 22], вследствие которой должны выполняться условия  $Q \equiv \alpha$ ,  $S \equiv \gamma$ , где  $\alpha, \gamma$  — произвольные константы. Эти условия с учетом обозначения (10) принимают вид двух дифференциальных уравнений  $\tau' - \xi^{-1}\tau + \alpha^2 \xi^{-1} \tau^{-1} = 0$ ,  $\tau' + \gamma^2 \xi \tau^{-1} = 0$ , которым удовлетворяет функция

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{\tau_*^2 - 4\mu^2 \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq \xi_*, \\ \sqrt{4\mu^2 \xi^2 - \tau_*^2}, & \xi > \xi_*, \end{cases} \tag{12}$$

где  $\xi_* = \tau_*/(2\mu)$ , причем первый случай соответствует  $\alpha = \tau_*$ ,  $\gamma = 2\mu$ , а второй —  $\alpha = i\tau_*$ ,  $\gamma = i2\mu$ . Эти условия обеспечивают существование для каждой пфаффовой формы некоторой функции  $z(\mathbf{u})$ , сохраняющей постоянное значение вдоль соответствующей характеристики и задающей интегральную поверхность в пространстве зависимых переменных, то есть  $P(\xi)d\xi + Q(\xi)d\phi + Rdp + S(\xi)dq = dz = 0$  (в этом заключается смысл полной интегрируемости рассматриваемого уравнения). В невырожденном случае ( $m \neq 0$ ,  $m \neq 1$ ) решение системы (7) формируется в результате пересечения четырех семейств трехмерных интегральных поверхностей. Менее сильных ограничений на функцию  $\tau(\xi)$ , обеспечивающих разрешимость пфаффовой системы при записи дифференциальных форм в виде  $v dz$  или  $v dz + dw$ , где  $v = v(\mathbf{u})$ ,  $w = w(\mathbf{u})$ , не существует [23].

Существенно нелинейная материальная функция (12), гарантирующая полную интегрируемость уравнений (1), имеет  $N$ -образный вид (см. рисунок) и допускает линии разрыва, разделяющие области сплошной среды с гиперболическим и эллиптическим типами оператора. Подобно уравнениям газовой динамики [24], где переход от гиперболического к эллиптическому типу происходит при некоторой величине модуля скорости перемещений  $|\mathbf{v}| = c$ , в данной модели такой переход имеет место при определенной величине интенсивности скорости деформации:  $\xi = \xi_*$ .

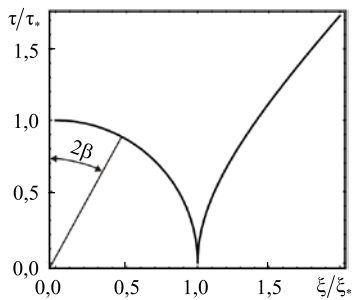


График функции (12)

Негладкость кривой (12) оказывается важной особенностью, гарантирующей существование однородных стационарных решений динамической системы, состоящей из последовательно соединенных элементов — упругого и вязкопластического с функцией (12) [10]. Эти решения оказываются неустойчивыми по отношению к уединенно-волновым решениям, что будет подробно рассмотрено в последующих публикациях. В рамках двумерной формулировки уравнений данная особенность, за исключением вырожденных случаев ( $m \equiv 0$  и  $m \equiv 1$ ), не может быть ликвидирована. Вероятно, гладкая материальная функция, обеспечивающая полную интегрируемость системы уравнений равновесия и совместности, может существовать для трехмерной формулировки уравнений, менее ограничительной по сравнению с двумерной.

Следует отметить также, что вследствие характера функции (12) автоматически гарантируется текучесть среды при произвольной интенсивности напряжений в любой точке области с гиперболическим или эллиптическим типом уравнений. Поэтому при численном решении соответствующих задач отпадает необходимость в организации итерационной процедуры, связанной с проверкой условия текучести и обычной для идеально пластического тела

#### 4. Приведение уравнений в области гиперболичности к простейшему виду

В силу (12) соотношения (11) в гиперболическом режиме принимают вид

$$\begin{aligned} \pm 2\bar{\mu} d\xi / \sqrt{1-4\bar{\mu}^2\xi^2} + 2d\phi + 2d\bar{p} \mp 2\bar{\mu} dq &= 0, \\ \mp 2\bar{\mu} d\xi / \sqrt{1-4\bar{\mu}^2\xi^2} - 2d\phi + 2d\bar{p} \mp 2\bar{\mu} dq &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\bar{\mu} = \mu/\tau_*$  и  $\bar{p} = p/\tau_*$ . Неизвестные задачи записываются через интегралы уравнений (13) — инварианты Римана:

$$\begin{aligned} 2\phi &= \chi + \eta - \omega - \zeta, & 2\bar{p} &= \chi + \eta + \omega + \zeta, \\ 2\beta &= \chi - \eta - \omega + \zeta, & 2\bar{\mu}q &= -\chi + \eta - \omega + \zeta. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее они приводятся в очередности, повторяющей последовательность собственных значений  $\lambda_{1+}$ ,  $\lambda_{1-}$  (первая строка) и  $\lambda_{2+}$ ,  $\lambda_{2-}$  (вторая строка):

$$\begin{aligned} 2\chi &= \beta + \phi + \bar{p} - \bar{\mu}q, & 2\omega &= -\beta - \phi + \bar{p} - \bar{\mu}q, \\ 2\eta &= -\beta + \phi + \bar{p} + \bar{\mu}q, & 2\zeta &= \beta - \phi + \bar{p} + \bar{\mu}q, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\beta \in R$  определяется соотношением (7).

Система (7) в терминах интегралов (15), а также с использованием определения (8) для угла  $\beta$  (обозначенного на рисунке) и соотношений

$$\begin{aligned} \tau'/(2\bar{\mu}) &= -2\bar{\mu}\xi = -\sin 2\beta, & \tau &= \sqrt{1-4\bar{\mu}^2\xi^2} = \cos 2\beta, \\ \xi_{,x} &= \tau/(2\bar{\mu})(\chi_{,x} - \eta_{,x} - \omega_{,x} + \zeta_{,x}), \\ \phi + \beta &= \chi - \omega, & \phi - \beta &= \eta - \zeta \end{aligned} \quad (16)$$

последовательно сводится к двум парам параметрически связанных квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} \chi_{,x} - \text{ctg}(\chi - \omega)\chi_{,y} &= 0, & \omega_{,x} + \text{tg}(\chi - \omega)\omega_{,y} &= 0, \\ \eta_{,x} - \text{ctg}(\eta - \zeta)\eta_{,y} &= 0, & \zeta_{,x} + \text{tg}(\eta - \zeta)\zeta_{,y} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

линеаризуемых точно с помощью преобразований годографа  $(\chi, \omega) \leftrightarrow (x, y)$ ,  $(\eta, \zeta) \leftrightarrow (x, y)$

$$\begin{aligned} \chi_{,x} &= \Omega_1 y_{,\omega}, & \chi_{,y} &= -\Omega_1 x_{,\omega}, & \omega_{,x} &= -\Omega_1 y_{,\chi}, & \omega_{,y} &= \Omega_1 x_{,\chi}, & \Omega_1^{-1} &= x_{,\chi} y_{,\omega} - x_{,\omega} y_{,\chi}, \\ \eta_{,x} &= \Omega_2 y_{,\zeta}, & \eta_{,y} &= -\Omega_2 x_{,\zeta}, & \zeta_{,x} &= -\Omega_2 y_{,\eta}, & \zeta_{,y} &= \Omega_2 x_{,\eta}, & \Omega_2^{-1} &= x_{,\eta} y_{,\zeta} - x_{,\zeta} y_{,\eta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Координатная линия  $\chi$  в пространстве  $X = (\beta, \phi, \bar{p}, \bar{\mu}q)$  есть пересечение гиперплоскостей  $\omega = \omega_*$ ,  $\eta = \eta_*$ ,  $\zeta = \zeta_*$  и так далее. В целом координатные линии  $\chi$ ,  $\omega$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  образуют декартову ортонормированную сеть, покрывающую  $X$ . В результате получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x_{,\chi} - \text{ctg}(\chi - \omega)y_{,\chi} &= 0, & x_{,\omega} + \text{tg}(\chi - \omega)y_{,\omega} &= 0, \\ x_{,\eta} - \text{ctg}(\eta - \zeta)y_{,\eta} &= 0, & x_{,\zeta} + \text{tg}(\eta - \zeta)y_{,\zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее с помощью подстановок

$$\begin{aligned}x &= x_1 \cos(\chi - \omega) - y_1 \sin(\chi - \omega), & y &= x_1 \sin(\chi - \omega) + y_1 \cos(\chi - \omega), \\x &= x_2 \cos(\eta - \zeta) - y_2 \sin(\eta - \zeta), & y &= x_2 \sin(\eta - \zeta) + y_2 \cos(\eta - \zeta),\end{aligned}\quad (20)$$

в соответствующие строки (19), эти уравнения приводятся к простейшему виду

$$y_{1,\chi} + x_1 = 0, \quad x_{1,\omega} - y_1 = 0, \quad y_{2,\eta} + x_2 = 0, \quad x_{2,\zeta} - y_2 = 0, \quad (21)$$

причем каждая из новых неизвестных удовлетворяет телеграфному уравнению:

$$x_{1,\chi\omega} + x_1 = 0, \quad y_{1,\chi\omega} + y_1 = 0, \quad x_{2,\eta\zeta} + x_2 = 0, \quad y_{2,\eta\zeta} + y_2 = 0. \quad (22)$$

В случае  $\bar{\mu} = 0$  функция (12) трансформируется в функцию  $\tau \equiv \tau_*$ , соответствующую идеально пластическому твердому телу ( $\beta \equiv 0, m \equiv 0$ ), среди собственных значений (8) появляется пара кратных, среди интегралов (15) остается лишь пара  $\bar{p} \pm \phi$ . В итоге уравнения (17)–(22) сводятся к известному виду [20].

## 5. Приведение уравнений в области эллиптичности к простейшему виду

В эллиптическом режиме уравнения (17) принимают вид

$$\begin{aligned}\chi_{,x} + \operatorname{ctg}(\vartheta + i\bar{\beta})\chi_{,y} &= 0, & \omega_{,x} - \operatorname{tg}(\vartheta + i\bar{\beta})\omega_{,y} &= 0, \\ \zeta_{,x} + \operatorname{ctg}(\vartheta - i\bar{\beta})\zeta_{,y} &= 0, & \eta_{,x} - \operatorname{tg}(\vartheta - i\bar{\beta})\eta_{,y} &= 0,\end{aligned}\quad (23)$$

где используются интегралы

$$\begin{aligned}2\chi &= -\bar{\beta} + i\vartheta + \bar{p} - \bar{\mu}iq, & 2\omega &= \bar{\beta} - i\vartheta + \bar{p} - \bar{\mu}iq, \\ 2\zeta &= -\bar{\beta} - i\vartheta + \bar{p} + \bar{\mu}iq, & 2\eta &= \bar{\beta} + i\vartheta + \bar{p} + \bar{\mu}iq,\end{aligned}\quad (24)$$

$\bar{\beta} \in R$  определяется соотношением (9), и в силу (12)  $2\bar{\mu}\zeta = \operatorname{ch}2\bar{\beta}$ ,  $\tau = \operatorname{sh}2\bar{\beta}$ . При этом функция (12) допускает эллиптичность только при  $m \geq 1$ ; потеря интервала  $0 < m < 1$  вызвана ее негладкостью.

С учетом следующих из (24) соотношений

$$\vartheta + i\bar{\beta} = -i(\chi - \omega), \quad \vartheta - i\bar{\beta} = -i(\eta - \zeta) \quad (25)$$

уравнения (23) переписутся в виде

$$\begin{aligned}\chi_{,x} - \operatorname{ctg}(i(\chi - \omega))\chi_{,y} &= 0, & \omega_{,x} + \operatorname{tg}(i(\chi - \omega))\omega_{,y} &= 0, \\ \zeta_{,x} - \operatorname{ctg}(i(\eta - \zeta))\zeta_{,y} &= 0, & \eta_{,x} + \operatorname{tg}(i(\eta - \zeta))\eta_{,y} &= 0.\end{aligned}\quad (26)$$

Равенства (24) позволяют видеть, что  $\chi^* = \zeta$ ,  $\omega^* = \eta$  (звездочка в верхнем индексе обозначает комплексное сопряжение), поэтому в (23) уравнения второй строки есть комплексное сопряжение уравнений первой строки. Далее (26) линеаризуются точно с помощью преобразований (18):

$$\begin{aligned}x_{,\chi} - \operatorname{ctg}(i(\chi - \omega))y_{,\chi} &= 0, & x_{,\omega} + \operatorname{tg}(i(\chi - \omega))y_{,\omega} &= 0, \\ x_{,\zeta} - \operatorname{ctg}(i(\eta - \zeta))y_{,\zeta} &= 0, & x_{,\eta} + \operatorname{tg}(i(\eta - \zeta))y_{,\eta} &= 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Использование подстановок

$$\begin{aligned}x &= x_1 \cos(i(\chi - \omega)) - y_1 \sin(i(\chi - \omega)), & y &= x_1 \sin(i(\chi - \omega)) + y_1 \cos(i(\chi - \omega)), \\ x &= x_2 \cos(i(\eta - \zeta)) - y_2 \sin(i(\eta - \zeta)), & y &= x_2 \sin(i(\eta - \zeta)) + y_2 \cos(i(\eta - \zeta))\end{aligned}\quad (28)$$

в соответствующие строки (27) приводит эти уравнения к виду

$$y_{1,\chi} + ix_1 = 0, \quad x_{1,\omega} + iy_1 = 0, \quad y_{2,\zeta} - ix_2 = 0, \quad x_{2,\eta} - iy_2 = 0, \quad (29)$$

причем каждая из новых неизвестных удовлетворяет телеграфному уравнению:

$$x_{1,\chi\omega} + x_1 = 0, \quad y_{1,\chi\omega} + y_1 = 0, \quad x_{2,\eta\zeta} + x_2 = 0, \quad y_{2,\eta\zeta} + y_2 = 0. \quad (30)$$

Из (28) и (29) следует:  $x_1^* = x_2$ ,  $y_1^* = y_2$ . Это, с учетом  $\chi^* = \zeta$ ,  $\omega^* = \eta$  дает дополнительную возможность проверить комплексную сопряженность пары уравнений одного характеристического подпространства относительно пары уравнений другого такого же подпространства.

В случае  $\tau_* = 0$  (12) трансформируется в функцию  $\tau = 2\mu\xi$ , соответствующую линейно-вязкой жидкости ( $m \equiv 1$ ,  $\beta = \infty$ ), а из интегралов (24) остается лишь пара  $p \pm i\mu q$ , с учетом которой уравнения (23) сводятся к известным уравнениям:  $\Delta p = 0$ ,  $\Delta q = 0$ .

## 6. Расщепляемость уравнений как следствие вида материальной функции

Функция (12) обеспечивает выполнение необходимого и достаточного условия расщепления квазилинейной системы (7) на две не взаимодействующие подсистемы [26]. Эти подсистемы определены в касательных подпространствах  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_1 \oplus X_2 = X$ , натянутых на пары ортогональных правых собственных векторов оператора  $\mathbf{L}$  и образованных всевозможными линейными комбинациями инвариантов Римана  $\chi$ ,  $\omega$  и  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно. Условие расщепления требует простоты спектра линейного оператора  $\mathbf{L}$  (что в общем случае имеет место — см. (8) и (9)) и замкнутости касательных подпространств  $X_1$ ,  $X_2$  относительно линейного оператора

$$\mathbf{L} = D^{-1} \begin{bmatrix} 2 \sin 4\phi / \cos 2\beta & -4 \sin 2\beta & 4 \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\phi & 4 \sin 2\phi \\ -4 \sin 2\beta & 2 \sin 4\phi / \cos 2\beta & -4 \sin 2\phi & -4 \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\phi \\ 4 \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\phi & -4 \sin 2\phi & 2 \sin 4\phi / \cos 2\beta & 4 \sin 2\phi \\ 4 \sin 2\phi & -4 \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\phi & 4 \sin 2\phi & 2 \sin 4\phi / \cos 2\beta \end{bmatrix}, \quad (31)$$

где  $D = -4 \sin 2(\phi + \beta) \sin 2(\phi - \beta) / \cos 2\beta$ , и его тензора Нийенхейса с компонентами

$$N_{ik}^j = L_i^1 L_{k,1}^j + L_i^2 L_{k,2}^j - L_k^1 L_{i,1}^j - L_k^2 L_{i,2}^j \quad (32)$$

как билинейного оператора, свертка которого с векторами-аргументами осуществляется по нижним индексам. Следует отметить, что функция (12) гарантирует симметрию дифференциального оператора  $\mathbf{L}$ .

Условие замкнутости означает

$$\begin{aligned} \mathbf{L}|_1 \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \mathbf{N}|_1 \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X_1, \quad \text{где } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in X_1 = \{(\varepsilon, \varepsilon, \delta, -\delta), \forall \varepsilon, \delta \in R\}, \\ \mathbf{L}|_2 \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u} \in X_2, \quad \mathbf{N}|_2 \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X_2, \quad \text{где } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in X_2 = \{(\varepsilon, -\varepsilon, \delta, \delta), \forall \varepsilon, \delta \in R\}, \end{aligned}$$

где аргументы операторов в подпространстве  $X_1$  необходимо подчинить условию  $\phi - \beta = \alpha$ , а в  $X_2$  — условию  $\phi + \beta = \alpha$ , где  $\alpha$  — произвольная действительная константа. Выражения (31), (32) записаны в терминах переменных  $\mathbf{u} = (\beta, \phi, p, q)^T$  для гиперболического типа уравнений. Других частных видов материальной функции, обеспечивающих выполнение условий расщепления системы (7), кроме (12), найдено не было.

## 7. Численное интегрирование полевых уравнений

Пусть на некоторой гладкой кривой, заданной параметрически  $x(t)$ ,  $y(t)$  в физической плоскости и пересекающейся с каждой характеристикой не более чем в одной точке, заданы гладкие поля  $p(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\xi(t)$ ,  $q(t)$ , то есть имеет место задача Коши. Пусть данные краевые условия обеспечивают гиперболический тип уравнений в примыкающей к границе области, в которой может быть построено решение. По заданным значениям зависимых переменных в точках граничной кривой можно найти граничные значения инвариантов Римана (15), образы границы в характеристических плоскостях  $(\chi, \omega)$ ,

( $\eta, \zeta$ ) и краевые условия на этих образах. В результате получаются две изолированные задачи Коши, для численного решения каждой из которых может использоваться метод Римана и опыт его практического применения в случае идеально пластического тела [19, 26].

Задача Коши может быть поставлена на двух характеристических кривых, на каждой из которых задается по половине краевых условий.

Пусть краевые условия — значения всех зависимых переменных, связанных условием постоянства соответствующего инварианта Римана, заданы на пересекающейся в одной точке паре кривых. Выделяются следующие случаи: а) обе кривые принадлежат одному семейству характеристик, но второе вырождается в точку их пересечения; б) обе кривые есть характеристики различных семейств одной подсистемы ( $X_1$  или  $X_2$ ); в) обе кривые есть характеристики различных подсистем. В первых двух случаях для одной подсистемы (например,  $X_1$ ) имеет место задача Гурса, для другой подсистемы ( $X_2$ ) заданные линии не являются отрезками характеристик, что отвечает задаче Коши. Третий случай соответствует двум смешанным задачам. Краевые условия также могут быть заданы на паре пересекающихся в одной точке кривых, одна из которых является характеристической, а вторая таковой не является (на нее накладываются те же условия, что и на кривую в задаче Коши), и тогда получается одна смешанная задача и одна задача Коши.

Решение каждой из рассматриваемых задач можно построить в области пересечения областей существования решения задачи в терминах каждого из характеристических подпространств. Таким образом, проблема отыскания области существования решения каждой из этих задач сводится к задаче определения областей существования решения задач Коши, Гурса или смешанной для системы двух гиперболических уравнений относительно двух независимых переменных, решение которой известно [19, 26].

Опишем сначала путь численного решения задачи Коши (или задачи Гурса), поставленной, например, в подпространстве  $X_1 = (\chi, \omega)$ . Для обоих стандартных случаев применимы следующие методы, описанные в [26]. Обозначим для данного подпространства через  $\varphi = \phi + \beta$  — локальный угол наклона касательной к характеристической линии  $\chi$  в данной плоскости; тогда  $\partial/\partial\chi = a\partial/\partial\phi$ ,  $\partial/\partial\eta = b\partial/\partial\phi$ , если использовать обозначения сигнатур  $a = (\partial\phi/\partial\chi)|_{\eta}$ ,  $b = (\partial\phi/\partial\eta)|_{\chi}$ . С учетом этого и исходя из уравнения (21) можно образовать конечно-разностные соотношения на равномерной сетке в рассматриваемой области пространства  $X_1$ :

$$\begin{aligned} y_{1mn} - y_{1m(n-1)} + \left[ b\Delta\phi(x_{1mn} + x_{1m(n-1)}) \right] / 2 &= 0, \\ x_{1mn} - x_{1(m-1)n} - \left[ a\Delta\phi(y_{1mn} + y_{1(m-1)n}) \right] / 2 &= 0, \end{aligned}$$

которые разрешаются с учетом малых второго порядка по  $\Delta\phi$ :

$$\begin{aligned} x_{1mn} &= \left(1 - ab(\Delta\phi)^2/4\right)x_{1m(n-1)} + b\Delta\phi(y_{1m(n-1)} + y_{1(m-1)n})/2 - ab(\Delta\phi)^2 x_{1(m-1)n}/4, \\ y_{1mn} &= \left(1 - ab(\Delta\phi)^2/4\right)y_{1(m-1)n} - a\Delta\phi(x_{1m(n-1)} + x_{1(m-1)n})/2 - ab(\Delta\phi)^2 y_{1m(n-1)}/4. \end{aligned} \quad (33)$$

Далее с помощью соотношений первой строки (20) выполняется переход к узловым координатам сетки физического пространства:

$$x_{mn} = x_{1mn} \cos \phi_{mn} - y_{1mn} \sin \phi_{mn}, \quad y_{mn} = x_{1mn} \sin \phi_{mn} + y_{1mn} \cos \phi_{mn}. \quad (34)$$

Наряду с изложенным методом может применяться метод, берущий за основу вместо (21) уравнения для поля локальных радиусов кривизны характеристик  $\chi$  и  $\omega$  [19, 26]:

$$\rho_{\omega, \chi} + \rho_{\chi} = 0, \quad \rho_{\chi, \omega} - \rho_{\omega} = 0, \quad (35)$$

где

$$\frac{1}{\rho_{\chi}} = \frac{\partial\phi}{\partial s_{\chi}} \Big|_{\omega}, \quad \frac{1}{\rho_{\omega}} = -\frac{\partial\phi}{\partial s_{\omega}} \Big|_{\chi}, \quad (36)$$



$s_\chi, s_\omega$  — координаты вдоль этих линий в физическом пространстве, а положительное значение  $\rho_\chi$  ( $\rho_\omega$ ) выбирается так, чтобы центр кривизны находился в направлении возрастания  $s_\omega$  ( $s_\chi$ ). Уравнения (35) на равномерной сетке с шагом  $\Delta\varphi$  приобретают вид

$$\begin{aligned} \rho_{\omega mn} - \rho_{\omega(m-1)n} + \left[ a\Delta\varphi(\rho_{\chi mn} + \rho_{\chi(m-1)n}) \right] / 2 &= 0, \\ \rho_{\chi mn} - \rho_{\chi m(n-1)} - \left[ b\Delta\varphi(\rho_{\omega mn} + \rho_{\omega m(n-1)}) \right] / 2 &= 0 \end{aligned}$$

и затем разрешаются с учетом малых второго порядка по  $\Delta\varphi$ :

$$\begin{aligned} \rho_{\chi mn} &= (1 - ab(\Delta\varphi)^2/4)\rho_{\chi m(n-1)} + b\Delta\varphi(\rho_{\omega m(n-1)} + \rho_{\omega(m-1)n})/2 - ab(\Delta\varphi)^2\rho_{\chi(m-1)n}/4, \\ \rho_{\omega mn} &= (1 - ab(\Delta\varphi)^2/4)\rho_{\omega(m-1)n} - a\Delta\varphi(\rho_{\chi m(n-1)} + \rho_{\chi(m-1)n})/2 - ab(\Delta\varphi)^2\rho_{\omega m(n-1)}/4. \end{aligned} \quad (37)$$

Затем интегрируются координаты узлов сетки характеристик в физической плоскости по узловым значениям кривизны:

$$x_{mn} - x_{0n} = \int_{\varphi_{0n}}^{\varphi_{mn}} \rho_\chi \cos\varphi d\varphi, \quad y_{mn} - y_{0n} = \int_{\varphi_{0n}}^{\varphi_{mn}} \rho_\omega \cos\varphi d\varphi. \quad (38)$$

Соотношения (33) и (37) содержат постоянные коэффициенты, а (34) и (38) требуют вычисления элементарных тригонометрических выражений, поэтому описанные методы расчета по формулам (33), (34) либо (37), (38) имеют одинаковую точность и сложность в реализации.

Для старта процедуры расчета необходимо знать начальные данные. Опишем способ их нахождения для второго метода в рамках задачи Коши [26]. Определим производную вдоль касательной к граничной кривой  $\partial/\partial s = \cos\psi(\partial/\partial s_\chi)|_\omega + \sin\psi(\partial/\partial s_\omega)|_\chi$ , где  $\psi$  — угол между положительным направлением характеристики  $\chi$  и этой касательной, отсчитываемый против часовой стрелки. Тогда из (36) следует:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\cos\psi}{\rho_\chi} - \frac{\sin\psi}{\rho_\omega}. \quad (39)$$

Если для подпространства  $X_1$  определить поле  $\kappa = \bar{p} - \bar{\mu}q$  и учесть постоянство  $\varphi + \kappa$  вдоль линии  $\omega$  и  $\kappa - \varphi$  вдоль  $\chi$ , можно также найти

$$\frac{\partial\kappa}{\partial s} = \frac{\cos\psi}{\rho_\chi} + \frac{\sin\psi}{\rho_\omega}. \quad (40)$$

Из соотношений (39), (40) следуют формулы  $\rho_\chi = 2\cos\psi/\chi_s$ ,  $\rho_\omega = 2\sin\psi/\omega_s$ , позволяющие вычислять граничные значения радиусов кривизны характеристик.

## 8. Численное интегрирование поля скоростей

В отличие от случая общей плоской задачи идеально-пластического тела [19], уравнения для определения компонент вектора скорости для рассматриваемой вязкопластической среды не являются гиперболическими. Действительно, пусть на некоторой кривой в плоскости заданы непрерывные значения физических компонент  $v_1, v_2$  вектора скорости в локальной ортогональной системе координат, образованной касательной и нормалью к этой кривой. Тогда вместе с ковариантными производными вдоль этой кривой  $\nabla_1 v_1, \nabla_1 v_2$  из уравнений (5), (6), переписанных для этого случая

$$\nabla_2 v_2 = -\nabla_1 v_1 = \xi \sin(2\phi), \quad \nabla_1 v_2 = \xi \cos(2\phi) + q, \quad \nabla_2 v_1 = \xi \cos(2\phi) - q, \quad (41)$$

можно найти  $\nabla_2 v_1, \nabla_2 v_2$  в любой точке кривой независимо от ее локального угла наклона.

Если в результате решения задачи становятся известными поля  $\xi, q$  в узлах сетки характеристического подпространства, для интегрирования поля скоростей можно воспользоваться соотношениями (41), где под  $v_1, v_2$  понимаются физические компоненты вектора скорости в локальном базисе ортогональной криволинейной системы координат, состоящей из характеристик одного из подпространств:  $X_1 = (\chi, \omega)$  или  $X_2 = (\eta, \zeta)$ . Необходимо преобразовать правую часть уравнений (41) с учетом поворота орторепера лабораторной системы координат в положение локального характеристического орторепера, то есть в правой части (41) положить  $\phi = -\beta$  для  $X_1$ , или  $\phi = \beta$  для  $X_2$ .

При обозначении символами  $\varphi_1, \varphi_2$  локальных углов наклона касательных к рассматриваемой паре взаимно ортогональных характеристических координат, соответствующих одному из подпространств, равенства (41) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{ds_1} - \frac{v_2}{\rho_1} &= -\xi \sin(2\phi), & \frac{dv_1}{ds_2} - \frac{v_2}{\rho_2} &= \xi \cos(2\phi) - q, \\ \frac{dv_2}{ds_1} + \frac{v_1}{\rho_1} &= \xi \cos(2\phi) + q, & \frac{dv_2}{ds_2} + \frac{v_1}{\rho_2} &= \xi \sin(2\phi), \end{aligned} \quad (42)$$

где  $s_1, s_2$  — натуральные длины дуг характеристических координат в физическом пространстве, а  $\rho_1^{-1} = d\varphi_1/ds_1$ ,  $\rho_2^{-1} = d\varphi_2/ds_2$  — их локальные кривизны. Для интегрирования каждой компоненты скорости достаточно взять по одному уравнению совместной системы (42), например

$$\frac{\partial v_1}{\partial s_1} - \frac{v_2}{\rho_1} = -\xi \sin(2\phi), \quad \frac{\partial v_2}{\partial s_2} + \frac{v_1}{\rho_2} = \xi \sin(2\phi). \quad (43)$$

На линиях максимальных скоростей сдвига, где  $\phi = 0$ , уравнения (43) переходят в уравнения Гейрингер [19, 26], из которых следует, что каждая компонента вектора скорости в данном базисе удовлетворяет телеграфному уравнению. Однако уравнениями рассматриваемой здесь модели удобнее оперировать в характеристических координатах, в терминах которых кинематические соотношения (42) приобретают правую часть.

В кинематических уравнениях идеально-пластических тел с дилатансией скорость удлинения равняется нулю вдоль пары неортогональных характеристик. На основании этого факта в [19] выведены уравнения для интегрирования компонент вектора скорости в характеристическом локальном базисе, обобщающие уравнения Гейрингер на данный вид идеально-пластических материалов. В несжимаемых материалах (в частности, идеально пластическом теле или рассматриваемой здесь вязкопластической модели) скорость удлинения является нулевой только вдоль линий максимальных скоростей сдвига.

При известных узловых значениях кривизны характеристик и величины  $\beta$  в узлах равномерной сетки координат характеристического подпространства (например  $X_1$ ) компоненты вектора скорости в локальном базисе характеристической системы координат в плоскости  $(x, y)$  находятся путем последовательного решения систем уравнений

$$\begin{aligned} v_{2mn} - v_{2m(n-1)} + b\Delta\varphi(v_{1mn} + v_{1m(n-1)})/2 &= -\xi_*\Delta\varphi(\rho_{\chi mn} + \rho_{\chi m(n-1)})(2 - \cos(4\beta_{mn}) - \cos(4\beta_{m(n-1)}))/8, \\ v_{1mn} - v_{1m(n-1)} - a\Delta\varphi(v_{2mn} + v_{2m(n-1)})/2 &= \xi_*\Delta\varphi(\rho_{\omega mn} + \rho_{\omega m(n-1)})(2 - \cos(4\beta_{mn}) - \cos(4\beta_{m(n-1)}))/8, \end{aligned}$$

которые разрешаются относительно неизвестных с учетом малых второго порядка по  $\Delta\varphi$ :

$$\begin{aligned} v_{2mn} &= (1 - ab(\Delta\varphi)^2/4)v_{2m(n-1)} - b\Delta\varphi(v_{1m(n-1)} + v_{1m(n-1)})/2 - ab(\Delta\varphi)^2v_{1m(n-1)}/4 - \\ &- \xi_*\Delta\varphi(\rho_{\chi mn} + \rho_{\chi m(n-1)})(2 - \cos(4\beta_{mn}) - \cos(4\beta_{m(n-1)}))/8 - b\xi_*\Delta\varphi^2(\rho_{\omega mn} + \rho_{\omega m(n-1)})(2 - \cos(4\beta_{mn}) - \cos(4\beta_{m(n-1)}))/16, \\ v_{1mn} &= (1 - ab(\Delta\varphi)^2/4)v_{1m(n-1)} + a\Delta\varphi(v_{2m(n-1)} + v_{2m(n-1)})/2 - ab(\Delta\varphi)^2v_{1m(n-1)}/4 + \\ &+ b\xi_*\Delta\varphi^2(\rho_{\chi mn} + \rho_{\chi m(n-1)})(2 - \cos(4\beta_{mn}) - \cos(4\beta_{m(n-1)}))/8 - \\ &- a\xi_*\Delta\varphi^2(\rho_{\omega mn} + \rho_{\omega m(n-1)})(2 - \cos(4\beta_{mn}) - \cos(4\beta_{m(n-1)}))/16. \end{aligned}$$

В правой части требуется вычислять нелинейные выражения от узловых переменных, что также оказывается необходимым и при определении узловых значений полей интенсивностей скорости деформаций и напряжений по найденным характеристическим переменным.

## 9. К постановке неклассических краевых задач

Большое количество задач, интересных с практической и познавательной точек зрения, не формулируется в замкнутом виде в терминах инвариантов Римана. К таким задачам относятся задачи со свободной границей, в частности, задача описания переноса фронта локализации деформации в активных средах.

Рассмотрим процесс одноосного растяжения полосы вдоль координаты  $x$ , сопровождающийся «распространением шейки» — движением вдоль свободных границ полосы симметричного возмущения в виде сглаженной ступеньки. Будем считать, что растяжение полосы происходит исключительно за счет переноса такого возмущения с постоянной скоростью  $c$  и неизвестным, не изменяющимся во времени профилем:  $\eta(x, t) = \eta(x - ct)$ . Тогда на свободной границе из условия совместности движения границы и поля скоростей  $\eta_{,t} + v_x \eta_{,x} - v_y = 0$  следует равенство:

$$\eta_{,x} = \frac{v_y}{v_x - c}. \quad (44)$$

Кроме того, на той же границе, согласно (4), имеем два статических условия

$$\eta_{,x} = -ctg2\phi, \quad p = -\tau(\xi), \quad (45)$$

где выражение  $\tau(\xi)$  дается формулой (12) в зависимости от типа полевых уравнений. На осевой линии имеют место условия симметрии:

$$\phi = \pi/4, \quad q = 0. \quad (46)$$

Соотношения (44)–(46), определяющие форму свободной границы и краевые условия, не записываются в терминах инвариантов Римана  $\phi, \xi, p, q$ .

Предполагается, что вместе с возмущением движется граница, разделяющая полосу на области с гиперболическим и эллиптическим типами оператора, имеющая неизвестную и не изменяющуюся во времени форму. На границе раздела выполняются условия слабого разрыва [27]:

$$[\sigma \cdot n] = 0, \quad [v \nabla] = -c a n, \quad (47)$$

где  $n = \cos\zeta e_x + \sin\zeta e_y$  — нормаль к границе раздела, направленная в сторону ее движения;  $a = -\sin\zeta e_x + \cos\zeta e_y$  — амплитуда разрыва. Компоненты транспонированного градиента скоростей даются выражениями (5), (6). Из (47) следуют условия

$$[\tau(\xi)\cos 2(\phi - \zeta)] = 0, \quad [\xi \sin 2(\phi - \zeta)] = 0, \quad [q] = -c/2.$$

## 10. Заключение

Выше предложены методы численного решения классических краевых задач механики для частного вида вязкопластической среды с  $N$ -образным графиком материальной функции, гарантирующего полную интегрируемость уравнений равновесия и совместности деформации скоростей. Эта особенность обеспечивает расщепление уравнений и существование безытерационных численных схем для эффективного параллельного интегрирования каждой из подзадач. Все выкладки сделаны для гиперболического типа уравнений, но обнаруженный факт, что уравнения эллиптического типа также расщепляются при данном частном виде материальной функции и приводятся к тому же простейшему виду, как и уравнения гиперболического типа, дает надежду на возможность распространения численной схемы и на этот случай.

Краевые задачи для сред с метастабильной зависимостью от скорости деформации имеют большой практический интерес для изучения процессов деформирования металлов, полимеров, горных материалов. Поэтому существование модели, обладающей полностью интегрируемой системой полевых уравнений,

представляется важным для численного решения широкого круга краевых задач, а также для нахождения некоторых аналитических решений. Для дальнейшего развития теории требуется разработка методов решения неклассических задач со смешанными граничными условиями в терминах инвариантов Римана и компонент скорости перемещений, в том числе задач со свободными и межфазными границами.

В дополнение к полученным результатам необходима разработка метода решения уравнений в области их эллиптичности, а также организация итерационной процедуры, обусловленной наличием неизвестных границ области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00365, 12-01-00608) и Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН № 12-Т-1-1004.

## Литература

1. Автоволновые процессы в системах с диффузией / Под ред. М.Т. Грековой. — Горький: Институт прикладной математики АН СССР, 1981. — 287 с.
2. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
3. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Автоволны> (дата обращения: 07.11.2013).
4. Rajesh S., Ananthakrishna G. Relaxation oscillations and negative strain rate sensitivity in the Portevin–Le Chatelier effect // *Phys. Rev. E.* — 2000. — V. 61, N 4. — P. 3664-3674. DOI
5. Рудской А.И., Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов. — СПб.: Наука, 2009. — 218 с.
6. Баженов С.Л., Ковальчук Е.П. Автоколебательное пластическое деформирование полимеров // *ДАН.* — 2007. — Т. 417, № 3. — С. 353-356.
7. Dieterich J.H. Modeling of rock friction: 1. Experimental results and constitutive equations // *J. Geophys. Res. — Sol. Ea.* — 1979. — V. 84, N. B5. — P. 2161-2168. DOI
8. Putelat T., Willis J.R., Dawes J.H.P. On the seismic cycle seen as a relaxation oscillation // *Philos. Mag.* — 2008. — V. 88, N. 28-29. — P. 3219-3243. DOI
9. Давиденков Н.Н. Кинетика образования зубцов на диаграммах деформации // *ФТТ.* — 1961. — Т. 3, № 8. — С. 2458-2465.
10. Penning P. Mathematics of the Portevin–Le Chatelier effect // *Acta Metall. Mater.* — 1972. — Т. 20, N. 10. — С. 1169-1175. DOI
11. Келлер И.Э. Интегрируемость уравнений равновесия и совместности вязкопластической среды с отрицательной чувствительностью к скорости деформации // *ДАН.* — 2013. — Т. 451, № 6. — С. 643-646. DOI
12. Zbib H.M., Aifantis E.C. A gradient-dependent model for the Portevin–Le Chatelier effect // *Scripta Metall. Mater.* — 1988. — V. 22, N. 8. — P. 1331-1336. DOI
13. Jeanclaude V., Fressengeas C. Propagating pattern selection in the Portevin–Le Chatelier effect // *Scripta Metall. Mater.* — 1993. — V. 29, N. 9. — P. 1177-1182. DOI
14. Zaiser M., Haehner P. Oscillatory modes of plastic deformation: theoretical concepts // *Phys. Stat. Sol. (B).* — 1997. — V. 199. — P. 267-300. DOI
15. Lebyodkin M., Dunin-Barkowski L., Bréchet Y., Estrin Y., Kubin L.P. Spatio-temporal dynamics of the Portevin–Le Chatelier effect: experiment and modelling // *Acta Mater.* — 2000. — V. 48, N. 10. — P. 2529-2541. DOI
16. Benallal A., Berstad T., Børvik T., Hopperstad O.S., Koutiri I., Nogueira de Codes R. An experimental and numerical investigation of the behaviour of AA5083 aluminium alloy in presence of the Portevin–Le Chatelier effect // *Int. J. Plasticity.* — 2008. — V. 24, N. 10. — P. 1916-1945. DOI
17. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела // *Уч. записки МГУ. Механика.* — 1940. — № 39. — С. 3-81.
18. Ильюшин А.А., Поздеев А.А., Тарновский И.Я., Тарновский В.И. Метод гидродинамических приближений в задачах пластического течения // *Инженерный журнал.* — 1961. — Т. 1, № 4. — С. 59-67.
19. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математическая теории неупругой сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.
20. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1988. — 686 с.
21. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.
22. Раишевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. — М.: Гостехиздат, 1947. — 354 с.
23. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Исследование геометрии пфафовой системы уравнений равновесия несжимаемой вязкопластической среды // *Вестник ПГУ. Физика.* — 2012. — № 4 (22). — С. 161-164.
24. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.–Ижевск: ИКИ, 2003. — 336 с.
25. Vagayavlenskij O.I. Decoupling problem for systems of quasi-linear pde's // *Commun. Math. Phys.* — 2007. — V. 269, N. 2. — P. 545-556. DOI
26. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956. — 408 с.
27. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

## References

1. Avtovolnovye protsessy v sistemakh s diffuziei / Pod red. M.T. Grekhovoi. — Gor'kii: Institut prikladnoi matematiki AN SSSR, 1981. — 287 s.
2. Vasil'ev V.A., Romanovskii Yu.M., Iakhno V.G. Avtovolnovye protsessy. — M.: Nauka, 1987. — 240 s.
3. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Автоволны> (data obrashcheniia: 07.11.2013).
4. Rajesh S., Ananthakrishna G. Relaxation oscillations and negative strain rate sensitivity in the Portevin–Le Chatelier effect // *Phys. Rev. E.* — 2000. — V. 61, N. 4. — P. 3664-3674. DOI

5. *Rudskoi A.I., Rudaev Ia.I.* Mekhanika dinamicheskoi sverkhplastichnosti aluminievyykh splavov. – SPb.: Nauka, 2009. – 218 s.
6. *Bazhenov S.L., Koval'chuk E.P.* Self-oscillating plastic deformation of polymers // *Doklady Physical Chemistry*. – 2007. – V. 417, N. 1. – P. 308-310. DOI
7. *Dieterich J.H.* Modeling of rock friction: 1. Experimental results and constitutive equations // *J. Geophys. Res. – Sol. Ea.* – 1979. – V. 84, N. B5. – P. 2161-2168. DOI
8. *Putelat T., Willis J.R., Dawes J.H.P.* On the seismic cycle seen as a relaxation oscillation // *Philos. Mag.* – 2008. – V. 88, N. 28-29. – P. 3219-3243. DOI
9. *Davidenkov N.N.* Kinetika obrazovaniia zubtsov na diagrammakh deformatsii // *FTT.* – 1961. – T. 3, N. 8. – S. 2458-2465.
10. *Penning P.* Mathematics of the Portevin–Le Chatelier effect // *Acta Metall. Mater.* – 1972. – T. 20, N. 10. – S. 1169-1175. DOI
11. *Keller I.E.* Integrability of the Equilibrium and compatibility equations for a viscoplastic medium with negative strain rate sensitivity // *Doklady Physics.* – 2013. – V. 58, N. 8. – P. 362-365. DOI
12. *Zbib H.M., Aifantis E.C.* A gradient-dependent model for the Portevin–Le Chatelier effect // *Scripta Metall. Mater.* – 1988. – V. 22, N. 8. – P. 1331-1336. DOI
13. *Jeanclaude V., Fressengeas C.* Propagating pattern selection in the Portevin–Le Chatelier effect // *Scripta Metall. Mater.* – 1993. – V. 29, N. 9. – P. 1177-1182. DOI
14. *Zaiser M., Haehner P.* Oscillatory modes of plastic deformation: theoretical concepts // *Phys. Stat. Sol. (B).* – 1997. – V. 199. – P. 267-330. DOI
15. *Lebyodkin M., Dunin-Barkowski L., Bréchet Y., Estrin Y., Kubin L.P.* Spatio-temporal dynamics of the Portevin–Le Chatelier effect: experiment and modelling // *Acta Mater.* – 2000. – V. 48, N. 10. – P. 2529-2541. DOI
16. *Benallal A., Berstad T., Børvik T., Hopperstad O.S., Koutiri I., Nogueira de Codes R.* An experimental and numerical investigation of the behaviour of AA5083 aluminium alloy in presence of the Portevin–Le Chatelier effect // *Int. J. Plasticity.* – 2008. – V. 24, N. 10. – P. 1916-1945. DOI
17. *Il'iushin A.A.* Deformatsiia viazkoplasticheskogo tela // *Uch. zapiski MGU. Mekhanika.* – 1940. – N. 39. – S. 3-81.
18. *Il'iushin A.A., Pozdeev A.A., Tarnovskii I.Ia., Tarnovskii V.I.* Metod gidrodinamicheskikh priblizhenii v variatsionnykh zadachakh plasticheskogo techeniia // *Inzhenernyi zhurnal.* – 1961. – T. 1, N. 4. – S. 59-67.
19. *Freudenthal A.M., Geiringer H.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. – Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1958.
20. *Rozhdestvenskii B.L., Ianenko N.N.* Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniia k gazovoi dinamike. – M.: Nauka, 1988. – 686 s.
21. *Stepanov V.V.* Kurs differentsial'nykh uravnenii. – M.: Gostekhizdat, 1950. – 473 s.
22. *Rashevskii P.K.* Geometricheskaia teoriia uravnenii s chastnymi proizvodnymi. – M.: Gostekhizdat, 1947. – 354 s.
23. *Petukhov D.S., Keller I.E.* Issledovanie geometrii pfaffovoi sistemy uravnenii ravnovesiia neszhimaemoi viazkoplasticheskoi sredy // *Vestnik PGU. Fizika.* – 2012. – N. 4 (22). – S. 161-164.
24. *Ovsiannikov L.V.* Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki. – M.–Izhevsk: IKI, 2003. – 336 s.
25. *Bogoyavlenskij O.I.* Decoupling problem for systems of quasi-linear pde's // *Commun. Math. Phys.* – 2007. – V. 269, N. 2. – P. 545-556. DOI
26. *Hill R.* The mathematical theory of plasticity. – Oxford: Oxford University Press, 1950.
27. *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972.

Поступила в редакцию 02.09.13; опубликована в электронном виде 27.12.13