

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.45

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОНЕЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Д.В. Христич

Тульский государственный университет, Тула, Россия

Рассматривается поведение анизотропной сплошной среды при конечных деформациях под действием внешних сил в неоднородном нестационарном внешнем температурном поле с учётом взаимного влияния полей деформаций и температуры. Получены связанные уравнения равновесия и теплопроводности в вариационной форме. Приведена замкнутая система уравнений связанной задачи термоупругости. Исследовано напряжённо-деформированное состояние многослойного баллона из композиционного материала. Баллон нагружен внутренним давлением и находится в неоднородном температурном поле, обусловленном внешними по отношению к баллону источниками тепла. Показано, что число слоёв композиционного материала и ориентация главных осей анизотропии в каждом его слое существенно влияют на осевые и касательные напряжения, возникающие между слоями.

Ключевые слова: термоупругость, связанная задача, конечные деформации, анизотропные материалы, композитные материалы

MODELING OF FINITE DEFORMATION PROCESS IN ANISOTROPIC BODIES

D.V. Khristich

Tula State University, Tula, Russia

The behavior of an anisotropic medium at finite deformations under external forces in the inhomogeneous non-stationary external temperature field with account of the mutual influence of deformation and temperature fields is considered. Coupled equations of equilibrium and heat conductivity in the variational form are obtained. The closed system of equations for solving the coupled thermoelasticity problem is presented. The stress-strain state of a multilayer cylinder made of a composite material is investigated. The cylinder is subject to an internal pressure in the inhomogeneous temperature field generated by the external heat sources. It is shown that the number of composite layers and the orientation of main anisotropy axes in each layer have a significant effect on the axial and tangential stresses arising between layers.

Key words: thermoelasticity, coupled problem, finite deformations, anisotropic materials, composite materials

1. Введение

Современные конструкционные материалы применяются в широком диапазоне механических и температурных воздействий. Многие из этих материалов обладают значительной анизотропией свойств, а тела, изготовленные из них, имеют механические характеристики, зависящие от температуры. Эта зависимость может быть нелинейной; проявление нелинейности усиливается с ростом деформаций. Поэтому разработка моделей, описывающих конечное деформирование тел и учитывающих взаимосвязь анизотропии свойств и температуры, является актуальной.

Адекватное представление деформирования при одновременном приложении силовых и тепловых воздействий требует связанной постановки краевой задачи, которая предполагает разработку соответствующих вариационных принципов. В настоящее время подобные принципы известны лишь для малых деформаций [1, 2].

В статье [3] излагается методика численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учётом кручения при заданных кинематических и силовых нагружениях. Решение задачи осуществляется вариационно-разностным методом в сочетании с явной схемой интегрирования уравнений движения по времени. За базовую взята вариационно-разностная методика решения осесимметричных задач при больших деформациях оболочек вращения путём пошаговой перестройки геометрии оболочки. Вращение элементов как жёсткого целого при кручении учитывается введением коротационной производной Яуманна при умеренных сдвиговых деформациях.

В работе [4] рассматривается процесс моделирования гиперупругих тел в терминах главных удлинений, причём отмечается, что вычислительных технологий решения задач в такой постановке крайне мало. Статья [5] является продолжением работы [4] и посвящена развитию предложенной численной методики решения задач моделирования конечных деформаций для упругопластических тел. Используется оригинальный вариант мультипликативного разложения градиента деформации. Определяющие соотношения и закон пластического течения формулируются в терминах логарифмов главных удлинений и имеют скалярный вид.

Изменение температурного поля описывается уравнением теплопроводности, которое обычно представляется в дифференциальной форме. Вариационный принцип теплопроводности для сред,

теплоёмкость и теплопроводность которых зависят от температуры, приведён в монографии М.А. Био [6]. Он не учитывает влияние деформационных характеристик на температурное поле и ограничивается рассмотрением малых деформаций.

Целью настоящей работы является постановка и решение связанной термомеханической краевой задачи конечного деформирования анизотропных тел.

2. Уравнения равновесия в вариационной форме

Для описания напряжённого состояния используются:

– тензор истинных напряжений Коши \hat{S} , связанный с внешними поверхностными силами \mathbf{P} , действующими на материальный объём, соотношением $\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \hat{S}$ (здесь \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности Σ);

– обобщённый тензор истинных напряжений $\hat{\Sigma}$ [7, 8]:

$$\hat{\Sigma} = e^{\theta} \hat{S}, \quad (1)$$

где $e^{\theta} = dV/dV_0$ — изменение элементарного материального объёма;

– «повёрнутый» обобщённый тензор

$$\hat{\Sigma}_R = \hat{R} \cdot \hat{\Sigma} \cdot \hat{R}^{-1}; \quad (2)$$

– первый тензор Пиолы–Кирхгоффа

$$\hat{P} = \hat{\Sigma} \cdot \hat{\Phi}^{-1}, \quad (3)$$

где $\hat{\Phi} = \overset{o}{\nabla}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \hat{E} + \overset{o}{\nabla} \mathbf{u}$ — аффинор деформаций, \mathbf{x} — радиус-вектор точек сплошной среды в начальном состоянии, $\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}$ — поле перемещений сплошной среды, \mathbf{X} — радиус-вектор точек сплошной среды в текущем состоянии, \hat{E} — единичный тензор. Первый тензор Пиолы–Кирхгоффа определяет вектор напряжений \mathbf{P}_0 , отнесённый к начальной площади материального элемента, через ориентацию начальной нормали к этой площадке \mathbf{n}_0 . При этом $\mathbf{P}_0 d\Sigma_0 = \mathbf{P} d\Sigma$ и $\mathbf{P}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \hat{P}$.

Уравнения равновесия сплошной среды в начальном базисе имеют вид [9]: $\overset{o}{\nabla} \cdot \hat{P} + \mathbf{F} = 0$, где $\overset{o}{\nabla} = \mathbf{e}^i (\partial/\partial x^i)$ — набла-оператор в начальном состоянии, связанный с набла-оператором в текущем

состоянии $\bar{\nabla} = \mathbf{e}^i (\partial/\partial X^i)$ аффинором деформации $\hat{\Phi}$ формулой $\overset{o}{\nabla}(\) = \hat{\Phi} \cdot \bar{\nabla}(\)$; \mathbf{F} — вектор массовых

сил. Продифференцируем это уравнение по времени: $\overset{o}{\nabla} \cdot \dot{\hat{P}} + \dot{\mathbf{F}} = 0$. Умножим полученное выражение на отличную от нуля вариацию скорости $\delta \mathbf{v}$ и проинтегрируем по начальному объёму:

$\int_{V_0} \left(\overset{o}{\nabla} \cdot \dot{\hat{P}} + \dot{\mathbf{F}} \right) \cdot \delta \mathbf{v} dV_0 = 0$. Преобразовав первое слагаемое с использованием теоремы Остроградского–

Гаусса, получим уравнение равновесия в вариационной форме:

$$\int_{V_0} \dot{\hat{P}} \cdot \delta(\mathbf{v} \overset{o}{\nabla}) dV_0 = \int_{\Sigma_0} \dot{\mathbf{P}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_0 + \int_{V_0} \dot{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{v} dV_0, \quad (4)$$

где $\dot{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \dot{\hat{P}}$ — скорость изменения вектора внешней нагрузки, приложенной на внешней поверхности Σ_0 с вектором единичной нормали \mathbf{n}_0 .

3. Определяющие соотношения обратимого конечного деформирования

В работах [7, 8, 10, 11] для описания конечных деформаций сплошной среды, сопровождающихся большими поворотами, предложено использовать неголономные меры ротационного типа. Здесь для этих целей воспользуемся предложенной в работе [7] неголономной мерой деформаций \hat{M} , которая определяется из уравнения

$$\dot{\hat{M}} = \hat{W}_R. \quad (5)$$

При этом $\dot{\hat{M}} = d\hat{M}/dt$; $\hat{W}_R = \hat{R} \cdot \hat{W} \cdot \hat{R}^{-1}$; $\hat{W} = (\bar{\nabla} \mathbf{v} + (\bar{\nabla} \mathbf{v})^T)/2$ — тензор деформации скорости (T — знак операции транспонирования); $\bar{\nabla} = \partial^i (\partial/\partial x^i)$ — набла-оператор в деформированном состоянии; \mathbf{v} — поле скоростей среды; \hat{R} — ортогональный тензор поворота в полярных разложениях аффинора деформаций:

$$\hat{\Phi} = \hat{U} \cdot \hat{R} = \hat{R} \cdot \hat{V}, \quad (6)$$

где $\hat{U} = \hat{U}^T$ — левая мера искажения, $\hat{V} = \hat{V}^T$ — правая мера искажения, $\hat{R}^T = \hat{R}^{-1}$.

Тензоры, входящие в полярные разложения (6), можно выразить через аффинор деформаций:

$$\hat{U}^2 = \hat{\Phi} \cdot \hat{\Phi}^T, \quad \hat{V}^2 = \hat{\Phi}^T \cdot \hat{\Phi}, \quad \hat{R} = \hat{U}^{-1} \cdot \hat{\Phi} = \hat{\Phi} \cdot \hat{V}^{-1}. \quad (7)$$

Использование тензора \hat{M} позволяет представлять процессы изменения объёма и формы при конечных деформациях отдельно, так как шаровая составляющая (первый инвариант) этой меры связана с изменением объёма выражением

$$\hat{M} \cdot \hat{E} = \theta = \ln \frac{dV}{dV_0}. \quad (8)$$

Девиаторная составляющая \tilde{M} не изменяется при изменении объёма, поэтому закон изменения девиатора \tilde{M} описывает процесс формоизменения. Тензор \tilde{M} является инвариантным по отношению к жёсткому вращению.

Используемая в настоящей работе неголономная мера деформаций \hat{M} в случае, когда главные оси деформаций в течение всего процесса деформирования совпадают с одними и теми же материальными волокнами, равна логарифмическому тензору деформаций Генки [7, 8, 10, 11]. Её значение обуславливается всем предшествующим процессом деформирования и находится посредством интегрирования уравнения (5) при известном поле скоростей сплошной среды. Укажем способ определения левой меры искажений \hat{U} и тензора поворота \hat{R} по известному полю скоростей среды.

Дифференцируя первое из соотношений (7), получим:

$$\dot{\hat{U}} \cdot \hat{U} + \hat{U} \cdot \dot{\hat{U}} = \dot{\hat{\Phi}} \cdot \hat{\Phi}^T + \hat{\Phi} \cdot \dot{\hat{\Phi}}^T. \quad (9)$$

Производные аффинора деформаций $\dot{\hat{\Phi}}$ и $\dot{\hat{\Phi}}^T$, входящие в уравнение (9), найдём, дифференцируя аффинор $\hat{\Phi} = \bar{\nabla} \mathbf{X}$: $\dot{\hat{\Phi}} = \bar{\nabla} \dot{\mathbf{X}} = \bar{\nabla} \mathbf{v}$, $\dot{\hat{\Phi}}^T = \mathbf{v} \bar{\nabla}$. Подставим эти выражения в уравнение (9) и придём к системе дифференциальных уравнений для нахождения тензоров $\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{U}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{R}(\mathbf{x}, t)$ по известному закону $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Phi}} = \bar{\nabla} \mathbf{v}, \\ \dot{\hat{U}} \cdot \hat{U} + \hat{U} \cdot \dot{\hat{U}} = (\bar{\nabla} \mathbf{v}) \cdot \hat{\Phi}^T + \hat{\Phi} \cdot (\mathbf{v} \bar{\nabla}), \\ \hat{R} = \hat{U}^{-1} \cdot \hat{\Phi}. \end{cases} \quad (10)$$

Первый закон термодинамики связывает работу внешних напряжений $d'A^{(e)}$ и тепловое воздействие $d'Q$ на рассматриваемый объём за время dt с изменениями внутренней энергии dU :

$$dU = \frac{1}{\rho_0} d'A^{(e)} + \frac{1}{\rho_0} d'Q, \quad (11)$$

где U — удельная (отнесённая к единице массы) внутренняя энергия, ρ_0 — плотность рассматриваемой сплошной среды в начальный момент времени.

Второй закон термодинамики описывает связь изменения удельной (отнесённой к единице массы) энтропии η с температурой T : $T d\eta = d'Q/\rho_0 + d'w$ или в другой форме

$$T\dot{\eta} = \frac{1}{\rho_0}\dot{Q} + \dot{w}, \quad (12)$$

где \dot{Q} — скорость притока тепла; \dot{w} — скорость диссипации (рассеяния энергии) в единице массы рассматриваемого объёма. В настоящей работе изучаются только обратимые процессы деформирования, для которых $\dot{w} = 0$.

Наряду с удельной внутренней энергией в термомеханике используется удельная свободная энергия $\psi = U - \eta T$ [12, 13]. На основании последнего соотношения и первого и второго законов термодинамики (см. (11), (12)) получим основное термомеханическое тождество для обратимых процессов [12]: $d\psi + \eta dT = d'A^{(e)}/\rho_0$ или

$$\dot{\psi} + \eta\dot{T} = \frac{1}{\rho_0}N^{(e)}, \quad (13)$$

где $N^{(e)}$ — отнесённая к начальному объёму мощность напряжений.

Покажем, что мощность напряжений может быть записана в виде: $N^{(e)} = \hat{\Sigma}_R \cdot \dot{\hat{M}}$, где $\hat{\Sigma}_R$ и \hat{M} — «повёрнутый» обобщённый тензор напряжений и неголономная мера деформаций, определяемые соотношениями (2) и (5) соответственно. Доказательство основано на использовании известных из тензорной алгебры соотношений: $\hat{\Sigma} \cdot \hat{W} = \text{Sp}(\hat{\Sigma} \cdot \hat{W}) = \text{Sp}((\hat{R}^T \cdot \hat{\Sigma}_R \cdot \hat{R}) \cdot \hat{W}) = \text{Sp}((\hat{R}^T \cdot \hat{\Sigma}_R) \cdot (\hat{R} \cdot \hat{W})) = \text{Sp}((\hat{R}^T \cdot \hat{\Sigma}_R)^T \cdot (\hat{R} \cdot \hat{W})^T) = \text{Sp}(\hat{\Sigma}_R \cdot \hat{R} \cdot \hat{W} \cdot \hat{R}^T) = \text{Sp}(\hat{\Sigma}_R \cdot \hat{W}_R) = \hat{\Sigma}_R \cdot \hat{W}_R$, где $\text{Sp}(\hat{A}) = \hat{A} \cdot \hat{E}$ — след тензора, причём $\text{Sp}(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \hat{A} \cdot \hat{B} = \text{Sp}(\hat{A}^T \cdot \hat{B}^T)$ [14]. Кроме того, в соответствии с (5), $\hat{W}_R = \dot{\hat{M}}$. Таким образом, мощность напряжений при конечных деформациях может быть представлена в виде

$$N^{(e)} = \hat{\Sigma}_R \cdot \dot{\hat{M}}. \quad (14)$$

Рассматривая процессы квазиупругого деформирования, будем считать свободную энергию функцией меры деформаций \hat{M} и температуры:

$$\psi = \psi(\hat{M}, T). \quad (15)$$

Тогда скорость изменения свободной энергии для выбранного способа описания конечных деформаций сплошной среды может быть записана в следующем виде:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{M}} \cdot \dot{\hat{M}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T}. \quad (16)$$

Подставляя выражение (14) в основное термомеханическое соотношение (13), получим

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\rho_0} \hat{\Sigma}_R \cdot \dot{\hat{M}} - \eta \dot{T}. \quad (17)$$

Из сравнения формул (16) и (17) следуют выражения для напряжений и энтропии

$$\frac{1}{\rho_0} \hat{\Sigma}_R = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{M}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (18)$$

Для получения конкретного вида (18) используем предложенное в работах [15–19] простейшее представление свободной энергии, которое по форме совпадает с выражением, введённым для линейной анизотропной термоупругости в [13]:

$$\psi = \frac{1}{2\rho_0} \hat{M} \cdot \hat{N} \cdot \hat{M} - \frac{1}{\rho_0} \hat{B} \cdot \hat{M} \cdot (T - T_0) - c_\varepsilon T_0 \left(\frac{T}{T_0} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} + 1 \right), \quad (19)$$

где \hat{N} — начальный тензор упругости четвёртого ранга; \hat{B} — тензор коэффициентов температурных напряжений второго ранга; c_ε — удельная (отнесённая к единице массы) теплоёмкость среды при постоянной деформации. Последнее слагаемое в выражении (19) определяет изменение свободной энергии, связанное только с изменением температуры, и не зависит от способа описания процесса деформирования. На основании (18), (19) получим зависимости «повёрнутого» обобщённого тензора напряжений и энтропии от меры деформаций \hat{M} и температуры:

$$\hat{\Sigma}_R = \hat{N} \cdot \hat{M} - \hat{B} \cdot (T - T_0), \quad (20)$$

$$\eta = \frac{1}{\rho_0} \hat{B} \cdot \hat{M} + c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0}. \quad (21)$$

Соотношения (20) являются обобщением известных в линейной анизотропной упругости [13] определяющих уравнений Дюгамеля–Неймана на случай конечных деформаций путём замены тензора малых деформаций на меру \hat{M} , а тензора истинных напряжений Коши на тензор $\hat{\Sigma}_R$. В случае малых деформаций соотношения (20), (21) вырождаются в классические. Тензор коэффициентов температурных напряжений \hat{B} и тензор теплового расширения $\hat{\alpha}_{(M)}$, определяющий температурные деформации, связаны тензором упругости, как и в линейной теории упругости [13]: $\hat{B} = \hat{N} \cdot \hat{\alpha}_{(M)}$.

В вариационное уравнение (4) входит производная тензора напряжений Пиолы–Кирхгоффа по времени $\dot{\hat{P}}$, а в определяющие соотношения (20) — тензор напряжений $\hat{\Sigma}_R$. Установим связь между производными этих тензоров по времени, используя определения (2) и (3): $\dot{\hat{P}} = \hat{R}^{-1} \cdot \dot{\hat{\Sigma}}_R \cdot \hat{U}^{-1} + \hat{R}^{-1} \cdot \dot{\hat{\Sigma}}_R \cdot \hat{U}^{-1} + \hat{R}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_R \cdot \dot{\hat{U}}^{-1}$. Подставим найденную зависимость в формулу (4):

$$\int_{V_0} \left[\hat{R}^{-1} \cdot \dot{\hat{\Sigma}}_R \cdot \hat{U}^{-1} + \hat{R}^{-1} \cdot \dot{\hat{\Sigma}}_R \cdot \hat{U}^{-1} + \hat{R}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_R \cdot \dot{\hat{U}}^{-1} \right] \cdot \delta(\mathbf{v} \cdot \hat{\Sigma}) dV_0 = \int_{\Sigma_0} \hat{\mathbf{P}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} d_0 + \int_{V_0} \hat{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{v} dV_0. \quad (22)$$

Соотношение (22) представляет собой условие равновесного протекания процесса деформирования, записанное через «повёрнутый» обобщённый тензор $\hat{\Sigma}_R$ в отсчётной конфигурации.

4. Уравнение теплопроводности в вариационной форме

Скорость теплового воздействия на единицу начального объёма при отсутствии внутренних источников тепла физико-химической природы определяется притоком тепловой энергии через поверхность Σ :

$$\dot{Q} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{q}_0, \quad (23)$$

где $\mathbf{q}_0 = \hat{\Phi} \hat{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{q}$. В этой формуле \mathbf{q} — вектор теплового потока, характеризующий приток тепла через единичную поверхность в направлении внешней нормали \mathbf{n} в единицу времени. Зависимость вектора теплового потока от неоднородного поля температуры выражается законом Фурье [14]:

$$\mathbf{q}_0 = -\hat{\Lambda}_0 \cdot \hat{\nabla} T. \quad (24)$$

Отнесённый к начальному состоянию тензор теплопроводности $\hat{\Lambda}_0$ с положительно определённой матрицей компонент определяется природой вещества. Для изотропного материала запишем тензор теплопроводности в виде: $\hat{\Lambda}_0 = \lambda \sqrt{G/g} \hat{G}^{-1}$, где $\hat{G}^{-1} = (\hat{\Phi} \cdot \hat{\Phi}^T)^{-1}$ — обратный метрический тензор. В этом случае закон теплопроводности (24) преобразуется к закону Фурье $\mathbf{q}(\mathbf{X}, t) = -\lambda \hat{\nabla} T$, используемому в механике сплошных сред [12, 20].

Уравнение, описывающее поведение температурного поля в процессе деформирования, получим, подставив соотношения (23), (24), (21) во второй закон термодинамики (12):

$$\left[\dot{\hat{B}}(T) + \frac{\partial \dot{\hat{B}}(T)}{\partial T} \cdot (T - T_0) + \frac{\partial \dot{\hat{B}}(T)}{\partial T} \cdot \dot{T} \right] \cdot \hat{M}T + \left[\hat{B}(T) + \frac{\partial \hat{B}(T)}{\partial T} \cdot (T - T_0) \right] \cdot \dot{M}T + c_\varepsilon \rho_0 \dot{T} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \left(\hat{\Lambda}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla} T \right). \quad (25)$$

Если в выражении (25) посчитать тензор \hat{B} не зависящим ни от времени, ни от температуры, то оно станет уравнением теплопроводности для анизотропного тела [6].

Умножим уравнение (25) на отличную от нуля вариацию скорости изменения температуры $\delta \dot{T}$, проинтегрируем это уравнение по начальному объёму и преобразуем его правую часть, используя теорему Остроградского–Гаусса. В результате придём к уравнению теплопроводности в вариационном виде:

$$\int_{V_0} \left[\left(\dot{\hat{B}}(T) + \frac{\partial \dot{\hat{B}}(T)}{\partial T} \cdot (T - T_0) + \frac{\partial \dot{\hat{B}}(T)}{\partial T} \cdot \dot{T} \right) \cdot \hat{M}T + \left(\hat{B}(T) + \frac{\partial \hat{B}(T)}{\partial T} \cdot (T - T_0) \right) \cdot \hat{W}_R T + c_\varepsilon \rho_0 \dot{T} \right] \cdot \delta \dot{T} dV + \int_{V_0} (\hat{\Lambda}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla} T) \cdot \delta (\overset{\circ}{\nabla} \dot{T}) dV_0 = \int_{\Sigma_0} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{q}_0 \cdot \delta \dot{T} d\Sigma_0. \quad (26)$$

Вариационное уравнение для случая нелинейной анизотропной теплопроводности приведено в работе [6].

5. Постановка связанной краевой задачи анизотропной термоупругости

Дополним систему вариационных и определяющих уравнений эволюционными соотношениями, начальными и граничными условиями:

– эволюционные соотношения для перемещений, напряжений и температуры

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt}, \quad \dot{\hat{S}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\hat{S}(\mathbf{x}, t)}{dt}, \quad \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{dT(\mathbf{x}, t)}{dt} \quad \forall \mathbf{x} \in V; \quad (27)$$

– начальные условия, характеризующие состояние тела в начальный момент времени t_0 :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \hat{S}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{S}_0(\mathbf{x}), \quad T(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}); \quad (28)$$

– граничные условия статического, кинематического или смешанного типа (статический тип — это задание в каждой точке поверхности Σ_p закона изменения внешних сил как функции времени

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_p, \quad \forall t > t_0, \quad (29)$$

кинематический тип определяет закон изменения перемещений в каждой точке поверхности Σ_u

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_u, \quad \forall t > t_0, \quad (30)$$

смешанный тип подразумевает задание в каждой точке поверхности Σ_{pu} разноимённых составляющих векторов \mathbf{P} и \mathbf{u}

$$\begin{cases} P_i = P_i^*(\mathbf{x}, t), \\ u_j = u_j^*(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (i \neq j) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{pu}, \quad \forall t > t_0, \quad (31)$$

при этом поверхности Σ_p , Σ_u , Σ_{pu} не перекрываются: $\Sigma = \Sigma_p \cup \Sigma_u \cup \Sigma_{pu}$, $\Sigma_p \cap \Sigma_u = \emptyset$, $\Sigma_p \cap \Sigma_{pu} = \emptyset$, $\Sigma_u \cap \Sigma_{pu} = \emptyset$);

– температурные граничные условия (закон изменения температуры на части поверхности Σ_T

$$T = T^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_T, \quad \forall t > t_0 \quad (32)$$

и закон изменения теплового потока на части поверхности Σ_q

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_q, \quad \forall t > t_0; \quad (33)$$

на части поверхности Σ_c может происходить свободный теплообмен с окружающей средой, температура которой известна; поверхности Σ_T , Σ_q , Σ_c не пересекаются: $\Sigma = \Sigma_T \cup \Sigma_q \cup \Sigma_c$, $\Sigma_T \cap \Sigma_q = \emptyset$, $\Sigma_T \cap \Sigma_c = \emptyset$, $\Sigma_q \cap \Sigma_c = \emptyset$).

При задании граничных условий полагаем, что функции (29)–(32) являются дифференцируемыми функциями времени. Тогда выражения (29)–(32) могут быть преобразованы к виду

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_p, \quad \forall t > t_0, \quad (34)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_u, \quad \forall t > t_0, \quad (35)$$

$$\begin{cases} \dot{P}_i = \dot{P}_i^*(\mathbf{x}, t), \\ v_j = v_j^*(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (i \neq j) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{pu}, \quad \forall t > t_0, \quad (36)$$

$$\dot{T} = \dot{T}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_T, \quad \forall t > t_0. \quad (37)$$

Граничные условия (34)–(36) и (33), (37) естественным образом учитываются в правых частях вариационных уравнений (22) и (26) соответственно.

Итак, постановка связанной краевой задачи анизотропной термоупругости включает определения мер деформаций и напряжений (1)–(3), (5), уравнение равновесия сплошной среды в вариационной форме (22), уравнение теплопроводности в вариационной форме (26), определяющие соотношения (20), эволюционные соотношения (10), (27), начальные условия (28) и граничные условия (29)–(33) или в преобразованном виде (33)–(37). Интегрирование системы указанных уравнений выполняется численными методами: методом конечных элементов [21, 22] и методом пошагового нагружения. При этом используется разностная схема аппроксимации перемещений и температур первого порядка по времени [23–25].

6. Конечные деформации композитного баллона в температурном поле

Композиты (композиционные материалы) представляют собой неоднородные структуры, образованные сочетанием армирующих элементов и изотропного связующего. Армирующие элементы в виде тонких волокон, нитей или ткани определяют высокую прочность и жёсткость материала, а связующее обеспечивает его монолитность.

Рассмотрим цилиндрический композитный баллон длиной L с внутренним диаметром $1,5R_{нар}$ и внешним диаметром $2R_{нар}$, находящийся под действием внутреннего давления p и помещённый в неоднородное температурное поле. Баллон получен спирально-кольцевой намоткой стекловолокнистого материала с пропиткой эпоксидным связующим и последующей полимеризацией. Слои волокон с различными углами намотки θ чередуются по толщине стенки баллона. На практике реализуются различные схемы намотки. Свойства каждого слоя композита являются известными из экспериментов на растяжение вдоль и поперёк волокон. В главных осях анизотропии материал каждого слоя считается трансверсально-изотропным. Ось симметрии бесконечного порядка направлена вдоль волокон. Такой подход к изучению свойств нитей и волокон из твёрдых полимеров положен в основу определения их свойств в книге [26]. Целью расчёта является определение напряжённо-деформированного состояния баллона.

Связанная задача термоупругости решалась для четырёх вариантов, которые различались или числом слоёв, или значением угла намотки θ , или величиной скорости изменения температуры на поверхности баллона γ :

– вариант 1 — четыре двойных спиральных слоя, $\theta = \pm 30^\circ$, $\gamma = 0,5$ K/c;

– вариант 2 — четыре двойных спиральных слоя, $\theta = \pm 45^\circ$, $\gamma = 0,5$ K/c;

– вариант 3 — четыре двойных спиральных слоя, $\theta = \pm 45^\circ$, $\gamma = 1$ K/c;

– вариант 4 — восемь двойных спиральных слоёв, $\theta = \pm 45^\circ$, $\gamma = 1$ K/c.

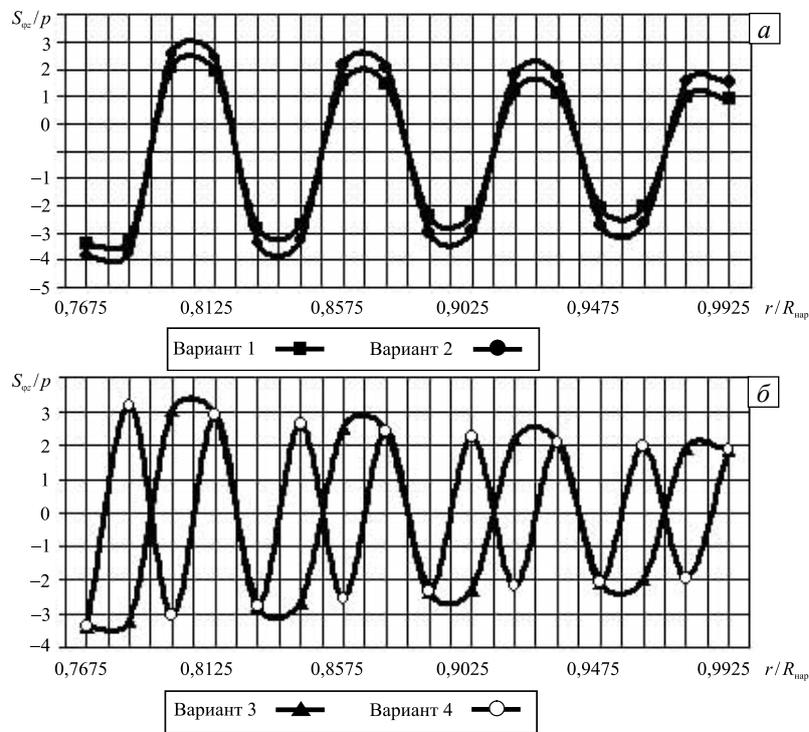
При заданной схеме нагружения баллона граничные условия (29)–(33) имели вид:

$$\begin{aligned}
 z = 0: & \quad P_0^{(r)} = 0, \quad u_\varphi = u_z = 0, \quad q_0^{(r)} = q_0^{(\varphi)} = q_0^{(z)} = 0; \\
 r = R_{\text{нар.}}: & \quad P_0^{(r)} = P_0^{(\varphi)} = P_0^{(z)} = 0, \quad T(t) = T_0 + \gamma t; \\
 z = L: & \quad P_0^{(r)} = 0, \quad u_\varphi = u_z = 0, \quad q_0^{(r)} = q_0^{(\varphi)} = q_0^{(z)} = 0; \\
 r = 0,75R_{\text{нар.}}: & \quad P_0^{(r)} = P_0^{(\varphi)} = P_0^{(z)} = 0, \quad T(t) = T_0 + \gamma t.
 \end{aligned}$$

Начальная температура во всех точках цилиндра составляла: $T_0 = 273 \text{ К}$.

В соответствующей конечно-элементной модели размеры конечных элементов подбирались таким образом, чтобы каждому слою намотки отвечал один или несколько слоёв конечных элементов. Слой элементов имел свойства материала того слоя намотки, с которым он соотносился. Каждый двойной спиральный слой представлял собой два слоя, в которых намотка производилась под одним углом, но в разных направлениях.

Предлагаемая методика позволяет найти распределение компонент тензора напряжений по толщине стенки баллона, в том числе касательные напряжения $S_{\varphi z}$, возникающие между слоями композита из-за стремления соседних слоёв к закручиванию под действием внутреннего давления и поля температур. На рисунке представлено, как распределяются по толщине баллона касательные напряжения, отнесённые к величине внутреннего давления. Порядок этих напряжений сопоставим с порядком тангенциальных и осевых напряжений, поэтому их учёт при оценке прочности баллона может иметь существенное значение.



Распределение касательных напряжений по толщине стенки баллона: варианты 1, 2 (а); варианты 3, 4 (б)

Приведённые графики касательных напряжений обрываются на некотором удалении от границы области из-за выбранной конечно-элементной дискретизации. Сопоставляющиеся с ней размеры конечных элементов не позволяют вычислить напряжения непосредственно на границе расчётной области, однако в процессе измельчения конечно-элементной сетки их можно определить в точках, расположенных ближе к внешней поверхности. В соответствии с заданными условиями на внешней поверхности эти напряжения приближаются к нулю.

При изменении количества двойных спиральных слоёв, образующих стенку баллона, с четырёх до восьми и сохранении остальных условий расчёта абсолютные величины касательных напряжений, действующих в слоях материала, изменяются не более чем на 3%, однако при переходе от слоя к слою их знаки чередуются. Значения радиальных и тангенциальных напряжений в расчётах при $\theta = \pm 30^\circ$ и $\theta = \pm 45^\circ$ и прочих равных условиях отличаются не более чем на 12%. Различия осевых и касательных напряжений оказываются более существенными и составляют от 83,9% во внутренних слоях до 102,6% во внешних слоях для осевых напряжений и от 12,8% во внутренних слоях до 30,4% во внешних слоях для касательных напряжений. Это объясняется различием свойств материала баллона при разных углах ориентации главных осей анизотропии материала.

Конечное температурное поле во всех расчётах оказывается практически одинаковым и однородным, так как стенка баллона успевает прогреться до конечной температуры, заданной на поверхности баллона.

Разработанная на основе конечно-элементной модели прикладная программа позволяет выполнять расчёты без ограничения на величины деформации [27]. Различия между значениями напряжений и деформаций, рассчитанными по линейной (при малых деформациях) и геометрически нелинейной (при конечных деформациях) теориям, не превышают 5%. Радиальные перемещения точек внутренней поверхности баллона, вычисленные по нелинейным соотношениям, больше соответствующих перемещений, найденных по линейной теории. При уровне деформаций 17% различия между ними достигают 18%.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-31176-мол_а, 13-01-97501-р_центр_а).

Литература

1. Гольденблат И.И., Бажанов В.П., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 248 с.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970. – 309 с.
3. Бажанов В.Г., Павлёнкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщённых осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427-434. DOI
4. Голованов А.И. Конечно-элементное моделирование больших деформаций гиперупругих тел в терминах главных удлинений // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 19-37. DOI
5. Голованов А.И. Численное моделирование больших деформаций упругопластических тел в терминах логарифмов главных удлинений // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 25-35. DOI
6. Био М.А. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975. – 209 с.
7. Маркин А.А. Теория процессов А.А. Ильюшина и термомеханика конечного равновесного деформирования // Упругость и неупругость / Материалы международного научного симпозиума. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – С. 51-61.
8. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Вессоюз. межвуз. сб. – Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1987. – С. 32-37.
9. Маркин А.А., Христинич Д.В. Нелинейная теория упругости: Учеб. пособие. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. – 92 с.
10. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев: Наукова думка, 1987. – 232 с.
11. Бровко Г.Л. Класс моделей упругих тел при конечных деформациях и устойчивость равновесия // Устойчивость в механике деформируемого твёрдого тела. – Калинин: Изд-во КГУ, 1986. – С. 111-121.
12. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
13. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
14. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
15. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант определяющих соотношений нелинейной термоупругости для анизотропных тел // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, № 1. – С. 170-175.
16. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // ПММ. – 2007. – Т. 71, № 4. – С. 587-594.
17. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханические модели обратимого конечного деформирования. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. – 268 с.
18. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христинич Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // МТТ. – 2011. – № 1. – С. 38-45.
19. Соколова М.Ю. Вариант термомеханических соотношений конечного деформирования анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2002. – Т. 8, № 2. – С. 139-145.
20. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
21. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
22. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
23. Адамов В.И., Маркин А.А. Моделирование процессов обработки давлением осесимметричных изделий // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 1989. – № 12. – С. 104-108.
24. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант теории конечного упругопластического деформирования // Прогрессивная технология приборостроения: Межвуз. сб. научн. тр. – М.: Изд-во ВЗМИ, 1987. – С. 57-61.
25. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
26. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
27. Соколова М.Ю., Христинич Д.В. Описание конечных деформаций твёрдых тел в отсчётной конфигурации // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 156-166.

References

1. Gol'denblat I.I., Bazhanov V.P., Kopnov V.A. Dlitel'naia prochnost' v mashinostroenii. – M.: Mashinostroenie, 1977. – 248 s.
2. Kovalenko A.D. Osnovy termouprugosti. – Kiev: Naukova dumka, 1970. – 309 s.

3. *Bazhenov V.G., Pavlenkova E.V., Artem'eva A.A.* Chislennoe reshenie obobshchennykh osesimmetrichnykh zadach dinamiki uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniia pri bol'shikh deformatsiakh // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2012. – Т. 5, N. 4. – С. 427-434. DOI
4. *Golovanov A.I.* Konechno-elementnoe modelirovanie bol'shikh deformatsii giperuprugikh tel v terminakh glavnykh udlinenii // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2009. – Т. 2, N. 1. – С. 19-37. DOI
5. *Golovanov A.I.* Chislennoe modelirovanie bol'shikh deformatsii uprugoplasticheskikh tel v terminakh logarifimov glavnykh udlinenii // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2011. – Т. 4, N. 1. – С. 25-35. DOI
6. *Bio M.A.* Variatsionnye printsipy v teorii teploobmena. – М.: Energiia, 1975. – 209 s.
7. *Markin A.A.* Teoriia protsessov A.A. Il'iushina i termomekhanika konechnogo ravnovesnogo deformirovaniia // *Uprugost' i neuprugost' / Materialy mezhdunarodnogo nauchnogo simpoziuma.* – М.: Izd-vo MGU, 2001. – С. 51-61.
8. *Markin A.A., Tolokonnikov L.A.* Mery i opredeliaiushchie sootnosheniia konechnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniia // *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniia: Vsesoiuzn. mezhvuz. sb.* – Gor'kii: Izd-vo Gor'k. gos. un-ta, 1987. – С. 32-37.
9. *Markin A.A., Khristich D.V.* Nelineinaia teoriia uprugosti: Ucheb. posobie. – Tula: Izd-vo TulGU, 2007. – 92 s.
10. *Levitas V.I.* Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii materialov pri vysokom davlenii. – Kiev: Naukova dumka, 1987. – 232 s.
11. *Brovko G.L.* Klass modelei uprugikh tel pri konechnykh deformatsiakh i ustoiчивost' ravnovesiia // *Ustoiчивost' v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela.* – Kalinin: Izd-vo KGU, 1986. – С. 111-121.
12. *Il'iushin A.A.* Mekhanika sploshnoi sredy. – М.: Izd-vo MGU, 1990. – 310 s.
13. *Novatskii V.* Teoriia uprugosti. – М.: Mir, 1975. – 872 s.
14. *Lur'e A.I.* Teoriia uprugosti. – М.: Nauka, 1970. – 940 s.
15. *Markin A.A., Sokolova M.Iu.* Variant opredeliaiushchikh sootnoshenii nelineinoi termouprugosti dlia anizotropnykh tel // *PMTF.* – 2003. – Т. 44, N. 1. – С. 170-175.
16. *Markin A.A., Sokolova M.Iu.* Nelineinye sootnosheniia anizotropnoi uprugosti i chastnyi postulat izotropii // *PMM.* – 2007. – Т. 71, N. 4. – С. 587-594.
17. *Markin A.A., Sokolova M.Iu.* Termomekhanicheskie modeli obratimogo konechnogo deformirovaniia. – Tula: Izd-vo TulGU, 2010. – 268 s.
18. *Markin A.A., Sokolova M.Iu., Khristich D.V.* Postulat A.A. Il'iushina dlia anizotropnykh materialov i variant opredeliaiushchikh sootnoshenii // *MTT.* – 2011. – N. 1. – С. 38-45.
19. *Sokolova M.Iu.* Variant termomekhanicheskikh sootnoshenii konechnogo deformirovaniia anizotropnykh materialov // *Izvestiia TulGU. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika.* – 2002. – Т. 8, N. 2. – С. 139-145.
20. *Sedov L.I.* Mekhanika sploshnoi sredy. – М.: Nauka, 1973. – Т. 1. – 536 s.
21. *Gallager R.* Metod konechnykh elementov. Osnovy. – М.: Mir, 1984. – 428 s.
22. *Segerlind L.* Primenenie metoda konechnykh elementov. – М.: Mir, 1979. – 392 s.
23. *Adamov V.I., Markin A.A.* Modelirovanie protsessov obrabotki davleniem osesimmetrichnykh izdelii // *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie.* – 1989. – N. 12. – С. 104-108.
24. *Markin A.A., Sokolova M.Iu.* Variant teorii konechnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniia // *Progressivnaia tekhnologiia priborostroeniia: Mezhvuz. sb. nauchn. tr.* – М.: Izd-vo VZMI, 1987. – С. 57-61.
25. *Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Iu.I.* Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriia, algoritmy, prilozheniia. – М.: Nauka, 1986. – 232 s.
26. *Pobedria B.E.* Mekhanika kompozitsionnykh materialov. – М.: Izd-vo MGU, 1984. – 336 s.
27. *Sokolova M.Iu., Khristich D.V.* Opisanie konechnykh deformatsii tverdyykh tel v otschetnoi konfiguratsii // *PMTF.* – 2012. – Т. 53, N. 2. – С. 156-166.

Поступила в редакцию 08.07.13; опубликована в электронном виде 27.12.13