

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.4.44](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.4.44)

УДК 519.63

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ НАКАТА НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА БЕРЕГ МЕЛКОВОДЬЯ

И.Б. Аббасов

Технологический институт Южного федерального университета, Таганрог, Россия

Работа посвящена трехмерному численному моделированию наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений Навье–Стокса. Сформулирована постановка трехмерной задачи, описаны граничные и начальные условия. С помощью метода расщепления по физическим процессам построена дискретная модель с учетом коэффициента заполненности ячеек. Приведены особенности конструкции моделируемого трехмерного бассейна. Представлены трехмерные модели поэтапного наката нелинейной поверхностной гравитационной волны на береговой склон. Описаны волновые процессы, происходящие при накате и откате нелинейных поверхностных гравитационных волн.

Ключевые слова: трехмерная модель наката, обрушающиеся волны, уравнения Навье–Стокса, метод расщепления, мелководный бассейн, накат и откат поверхностных волн

THREE DIMENSIONAL MODEL OF THE RUNUP OF NONLINEAR SURFACE GRAVITY WAVES ON THE SHALLOW WATER COASTAL SLOPE

I.B. Abbasov

Taganrog Institute of Technology of Southern Federal University, Taganrog, Russia

The paper is devoted to three-dimensional numerical modeling of a runup of nonlinear surface gravity waves based on Navier–Stokes equations. The three-dimensional formulation of the problem is considered, and the boundary and initial conditions are described. The decomposition method for physical processes is used to construct a discrete model capable of accounting for the factor of filled cells. Features of a design of the simulated three-dimensional shallow water area are described. Three-dimensional models of the staged runup of surface gravity waves on the coastal slope are presented. The wave processes occurring at the runup and back draft of nonlinear surface gravity waves are described.

Key words: 3D modelling of runup, breaking waves, Navier–Stokes equations, decomposition method, shallow water area, runup and back draft of surface waves

1. Введение

В мелководных акваториях береговые образования подвергаются постоянному волновому воздействию. Исследование процессов изменения береговых линий являются актуальными для прогнозирования и развития экосистемы мелководья. При описании волновых явлений часто используются различные модификации уравнений мелкой воды. Однако наиболее адекватно волновые процессы описывают уравнения Навье–Стокса. Эти уравнения учитывают как нелинейные эффекты, так и турбулентные процессы в вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим работы, посвященные трехмерному моделированию наката поверхностных волн на береговые образования. В статьях [1, 2] проводится трехмерное моделирование обрушения поверхностной волны. В работе [2] представлены результаты трехмерного моделирования наката и обрушения волны при распространении по наклонному берегу. Для моделирования используется уравнение Навье–Стокса с учетом двухфазной среды воздух – вода.

В [3] на примере трехмерного фрагмента заплеска цунами на реальное побережье исследован численный метод моделирования наката длинных волн на берег. Метод позволяет решать двумерные задачи со сложной геометрией. В рамках теории мелкой воды в [4] предложен метод для моделирования набегания прерывных волн на наклонный берег и их распространения по сухому руслу. Представлена трехмерная модель частичного разрушения плотины с локальным эллипсоидальным препятствием и сухим руслом в нижнем бьефе. В [5] рассмотрены прерывные волны, возникающие и распространяющиеся внутри расчетной области при численном моделировании течений с прерывными волнами. Статья [6] посвящена численному моделированию распространения штормовых волн и цунами на основе нелинейного уравнения мелкой воды. В работе используется трехмерная модель поэтапного наката цунами на прибрежные акватории.

В ряду экспериментальных исследований процесса наката можно отметить работы [7] и [8]. В [7] экспериментально исследованы деформации профиля обрушивающихся поверхностных волн в зоне прибоя. Приведены поэтапные снимки деформации профиля волны при распространении по наклонному

дну до и после обрушения. В работе [8] проанализированы результаты экспериментальных исследований процесса наката и обрушения поверхностной волны на наклонный берег.

Данная работа посвящена трехмерному моделированию наката поверхностных гравитационных волн в условиях мелководных заливов. Математическая модель строится на основе уравнений Навье–Стокса в привязке к гидрофизическим условиям такой мелководной акватории, как Азовское море. Вопросы численного моделирования волновых явлений для данного бассейна на основе уравнений мелкой воды и двумерное моделирование наката на основе уравнений Навье–Стокса рассматривались автором ранее, результаты исследований отражены, соответственно, в публикациях [9] и [10]. Трехмерные модели волновых процессов при этом являются не только наиболее информативными, но и позволяют учитывать реальный трехмерный рельеф дна и берега мелководных заливов.

2. Постановка задачи

Согласно геометрии расчетной области задачи ось x декартовой системы координат совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и ориентирована в сторону берега, ось y направлена вдоль

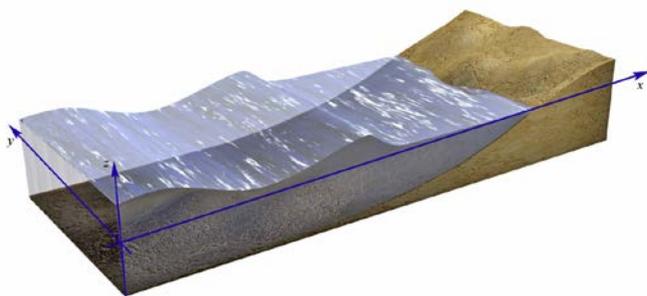


Рис. 1. Геометрия трехмерной задачи наката поверхностной гравитационной волны

берега, ось z — вертикально вверх (Рис. 1). В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. На некотором расстоянии от берега в точке $x = 0$ задается возмущение давления в виде импульса, меняющееся по мере удаления от начала координат по гармоническому закону.

Проследим последующее движение водной массы в сторону берега. Для описания трехмерных гравитационных волн на поверхности жидкости с учетом её вязкости воспользуемся трехмерными уравнениями Навье–Стокса, уравнением

неразрывности для несжимаемой жидкости и уравнением гидродинамического давления [11]:

– уравнения Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g; \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (2)$$

– уравнение полного гидродинамического давления с учетом глубины

$$P(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) + \rho g z, \quad (3)$$

где p — давление, обусловленное возмущением; u , v — горизонтальные и w — вертикальная составляющие вектора скорости \mathbf{V} движения частиц водной среды; ρ — плотность жидкости; g — гравитационная постоянная; μ , η — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

Рассмотрим граничные условия.

На свободной поверхности жидкости предполагаем, что

$$P(x, y, z, t) = P_{\text{атм}}; \quad w(x, y, z, t) = \frac{1}{g\rho} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (4)$$

при этом вертикальная скорость выражается через производную давления, получаемую дифференцированием выражения для полного гидродинамического давления.

На дне области выполняются условия непротекания и скольжения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{V}(x, y, z, t) = 0, \quad \rho \eta \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z, t) = -\tau_x(t); \\ \rho \eta \frac{\partial}{\partial z} v(x, y, z, t) = -\tau_y(t), \quad \rho \mu \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z, t) = -\tau_z(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь: \mathbf{n} — вектор нормали к донной поверхности; $\tau_x(t)$, $\tau_y(t)$, $\tau_z(t)$ — компоненты тангенциального напряжения на дне, возникающие из-за донного трения, рассчитываются по формулам [11]

$$\tau_x(t) = \rho C_p (|\mathbf{V}|) u |\mathbf{V}|, \quad \tau_y(t) = \rho C_p (|\mathbf{V}|) v |\mathbf{V}|, \quad \tau_z(t) = \rho C_p (|\mathbf{V}|) w |\mathbf{V}|, \quad (6)$$

где $C_p (|\mathbf{V}|) = \begin{cases} 0,0088, & |\mathbf{V}| < 6,6 \text{ м/с}; \\ 0,0026, & |\mathbf{V}| \geq 6,6 \text{ м/с} \end{cases}$ — безразмерный коэффициент; горизонтальная и вертикальная

составляющие коэффициента турбулентного обмена принимают значения $0 < \mu \leq 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $0 < \eta \leq 1 \text{ м}^2/\text{с}$.

На левой и правой боковых границах условия аналогичны условиям на дне.

На противоположной берегу (в дальнейшем тыльной) границе $x=0$, где располагается источник импульса,

$$\frac{\partial}{\partial n} P(x, y, z, t) = \alpha, \quad u(x, y, z, t) = u^{(0)}, \quad v(x, y, z, t) = v^{(0)}, \quad w(x, y, z, t) = w^{(0)}, \quad (7)$$

параметр α задается исходя из начальных условий (гармоническое возмущение);

В начальный момент времени $t=0$ жидкость находится в покое, поэтому

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad v(x, y, z, 0) = 0, \quad w(x, y, z, 0) = 0, \quad P(x, y, z, 0) = \rho g z. \quad (8)$$

3. Расщепление уравнений

С помощью метода расщепления по физическим процессам проводится аппроксимация исходных уравнений (1)–(3) и граничных условий (4)–(7) по временной переменной [12, 13]. Согласно данному методу расчет осуществляется в три этапа:

– на первом этапе определяется поле скоростей на основе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{w^{n+\sigma} - w^n}{\tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g; \end{aligned}$$

– на втором этапе рассчитывается давление:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \rho \left(\frac{\partial u^{n+\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+\sigma}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+\sigma}}{\partial z} \right);$$

– на третьем этапе по найденному давлению уточняется поле скоростей

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{w^{n+1} - w^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z},$$

где u^n, v^n, w^n — составляющие вектора скорости на текущем временном слое; $u^{n+\sigma}, v^{n+\sigma}, w^{n+\sigma}$ — составляющие вектора скорости на вспомогательном временном слое; $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$ — составляющие вектора скорости на следующем временном слое.

4. Построение и исследование дискретной модели

Разработана дискретная конечно-объемная модель задачи с учетом коэффициента заполненности ячеек [14, 15]. Расчетная область по пространственным направлениям представляет собой куб. Для численной реализации дискретной математической модели вводится равномерная сетка [16, 17]:

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y, \quad z_k = kh_z \quad (i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, k = \overline{0, N_z}); \quad N_x h_x = l_x, \quad N_y h_y = l_y, \quad N_z h_z = l_z \right\},$$

где i, j, k — индексы по направлениям x, y, z ; h_x, h_y, h_z — шаги по пространству; N_x, N_y, N_z — количество узлов по пространству; l_x, l_y, l_z — пространственные размеры области. Для аппроксимации исходных дифференциальных уравнений по пространственным координатам используется интегро-интерполяционный метод.

Получены дискретные аналоги уравнений для расчета составляющих вектора скорости, поля давления, а также дискретные аналоги граничных условий. Проведено исследование консервативности дискретной модели. Установлено, что для сеточного аналога разностного уравнения соблюдается интегральный закон сохранения импульса. Погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы по временной координате имеет первую степень, по пространственным координатам — вторую степень. Проанализирована устойчивость задачи на основе принципа максимума, получены ограничения на шаги по времени и пространственным координатам.

Дискретные уравнения для расчета составляющих вектора скорости и поля давления строятся на основе неявной схемы, для уточнения компонент поля скорости используется явная схема. Построенные дискретные уравнения решаются методом верхней релаксации. Для расчета трехмерного поля скоростей и поля давления водной среды при численном моделировании наката и обрушения нелинейной поверхностной гравитационной волны разработана программа «3DBayWaves» [18].

5. Результаты численного моделирования и их анализ

Рассмотрим процесс трехмерного численного моделирования набегания нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговые склоны мелководных акваторий. Согласно постановке задачи слой вязкой несжимаемой жидкости заполняет трехмерный прибрежный бассейн до определенного уровня, при этом линия дна переходит в береговую линию (Рис. 1).

Перед запуском программы «3DBayWaves» задаются размеры расчетной сетки (N_x, N_y, N_z — границы по пространству), трехмерная геометрия берегового склона и количество итераций по времени (N_t — верхняя граница по времени). Далее вводятся параметры поверхностной гравитационной волны: амплитуда — a , длина волны — λ , начальный уровень покоящейся жидкости — H . Затем строится трехмерная сетка (см. Рис. 2), визуализирующая заполненный водой бассейн.

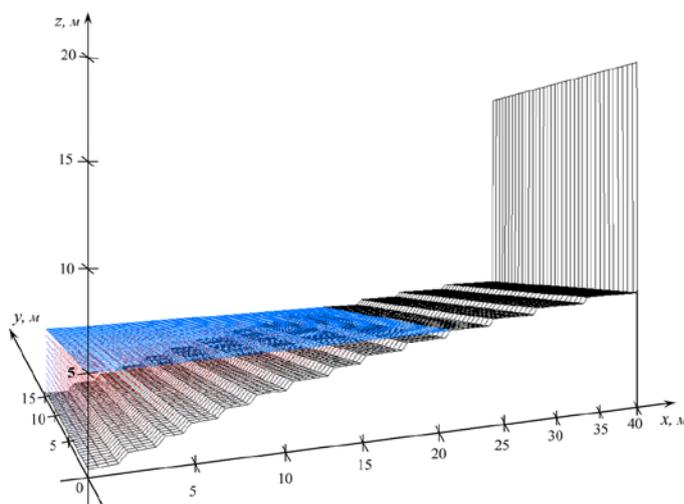


Рис. 2. Трехмерная сетка для мелководного бассейна в состоянии покоя

Дно бассейна медленно поднимается и переходит в береговой склон. Батиметрические условия трехмерного бассейна привязаны к условиям Таганрогского залива Азовского моря [19, 20]. Конструкция трехмерного бассейна разработана с учетом особенностей берегов Азовского моря согласно СНиП 33-01-2003 «Гидротехнические сооружения. Основные положения» и относится к берегозащитным сооружениям откосного типа с вертикальной стенкой [21].

Для соблюдения корректности физического процесса учитывается постепенное накопление нелинейных эффектов при распространении поверхностной волны. Размеры сетки составляют $100 \times 40 \times 60$ ячеек, уровень

поверхности воды по вертикали находится в интервале 5÷25 ячеек. Исходя из глубины залива $H \leq 5$ м, участок акватории имеет следующие геометрические размеры (Рис. 2): длину 40 м; ширину 15 м; протяженность по вертикали 25 м (от дна). Длина шага по пространству составляет $h_x = h_y = h_z = 0,42$ м.

На рисунке 3 представлен последовательный процесс набегания нелинейной поверхностной гравитационной волны на пологий береговой склон. На тыльной стенке бассейна, имеющей глубину $H = 5$ м, задано гармоническое возмущение среды с частотой $f = 0,13$ Гц. Расчеты проведены при следующих начальных параметрах волны: скорости $c = 6,6$ м/с; длине волны $\lambda = 50$ м; амплитуде вертикального смещения свободной поверхности воды $a = 4,2$ м; параметре мелководности $kH = 0,6$; параметре нелинейности $\varepsilon = 0,8$. Поверхностная гравитационная волна удовлетворяет начальным требованиям мелководности [22]: $H/\lambda < 1/5$.

С уменьшением глубины трехмерного бассейна волна выходит на сухой берег; из-за возрастания нелинейных эффектов происходит укрупнение переднего фронта гребня волны (Рис. 3, а, б), он становится отвесным. Затем волна обрушивается, рассыпается и ударяется о переднюю вертикальную стенку бассейна. Этот процесс можно видеть на рисунке 3, в. Потом водная масса начинает стекать по береговому склону обратно, происходит откат волны (Рис. 3, г, д). Откатывающаяся волна сбивает гребень следующей волны, ещё больше укрупняя передний фронт и ускоряя его обрушение (Рис. 3, е). При этом к приходу следующего гребня уровень покоящейся жидкости в бассейне поднимается. Описанные этапы набегания соблюдаются поверхностными гравитационными волнами и с другими начальными параметрами мелководности.

Анализируя результаты трехмерного моделирования наката, следует отметить, что по сравнению с двумерным моделированием [10], в целом наблюдаются те же физические процессы. Однако в связи с увеличением трудоемкости вычислений усложняется процесс задания геометрии бассейна. Поэтому для большей выразительности процесса наката поверхностная гравитационная волна (Рис. 3) задавалась с высокой начальной крутизной.

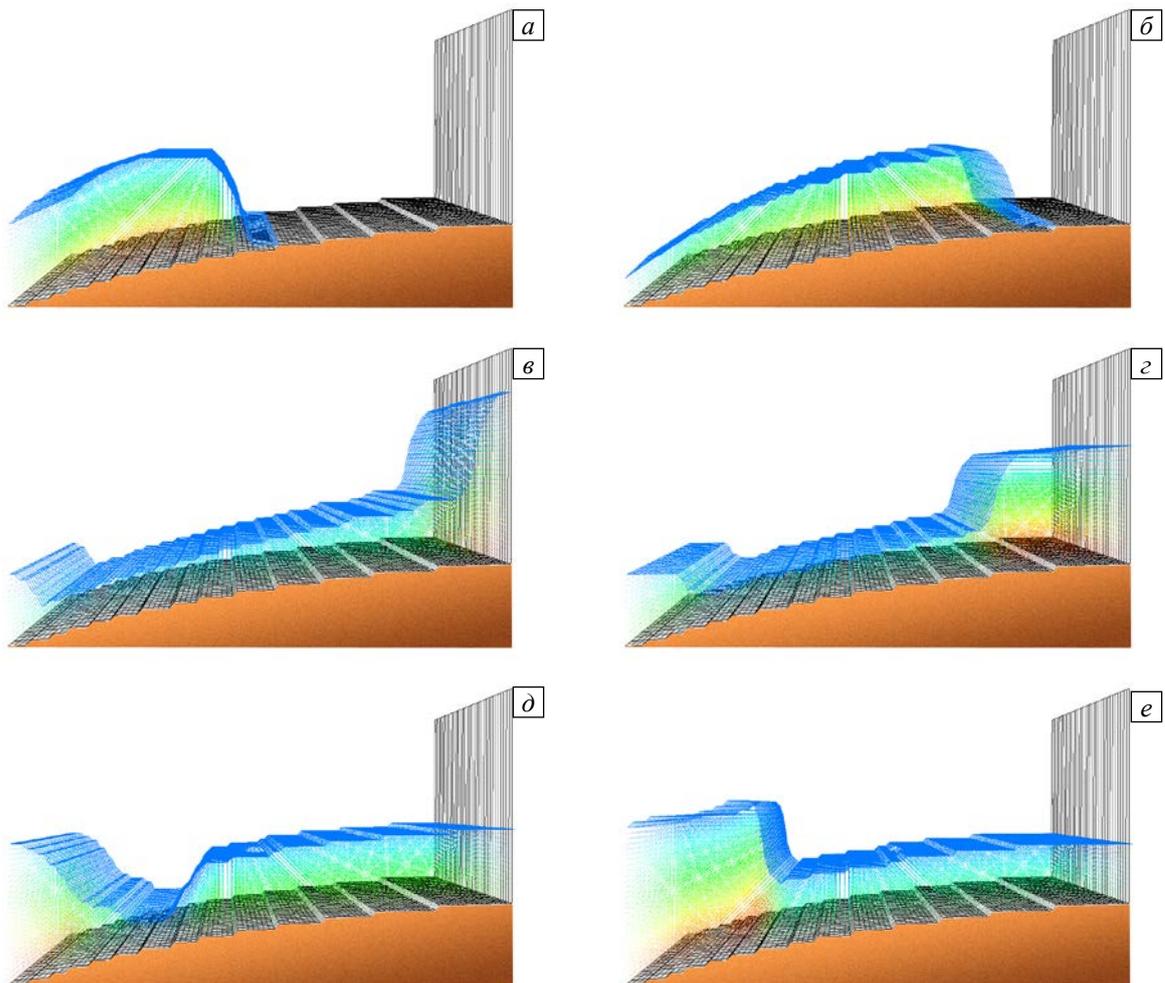


Рис. 3. Последовательные этапы набегания поверхностной гравитационной волны в различные моменты времени t , с: 3,7 (а); 4,3 (б); 6,3 (в); 7,7 (г); 9,9 (д); 10,8 (е)

Для проверки адекватности разработанной трехмерной модели полученные результаты прошли сравнение с существующими численными [2] и экспериментальными [8] данными; установлено их хорошее согласие на основных этапах распространения и обрушения поверхностной волны.

Литература

1. *Watanabe Y., Saeki H.* Three-dimensional large eddy simulation of breaking waves // *Coast. Eng. J.* – 1999. – V. 41, N. 3-4. – P. 281-301. DOI
2. *Lubin P., Vincent S., Abadie S., Caltagirone J.-P.* Three-dimensional large eddy simulation of air entrainment under plunging breaking waves // *Coast. Eng.* – 2006. – V. 53, N. 8. – P. 631-655. DOI
3. *Федотова З.И.* Обоснование численного метода для моделирования наката длинных волн на берег // *ЖВТ.* – 2002. – Т. 7, № 5. – С. 58-76.
4. *Борисова Н.М.* О моделировании процесса набегания прерывной волны на наклонный берег // *СибЖВМ.* – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 43-60.
5. *Ковыркина О.А.* О численном моделировании течений с прерывными волнами // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 48-56. DOI
6. *Delis A.I., Kazolea M., Kampanis N.A.* A robust high-resolution finite volume scheme for the simulation of long waves over complex domains // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 2008. – V. 56, N. 4. – P. 419-452. DOI
7. *Ting F.C.K., Kirby J.T.* Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker // *Coast. Eng.* – 1996. – V. 27, N. 3-4. – P. 131-160. DOI
8. *Kimoun O., Branger H.* A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach // *J. Fluid Mech.* – 2007. – V. 588. – P. 353-397. DOI
9. *Аббасов И.Б.* Численное моделирование трансформации нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях заливов // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 5-10. DOI
10. *Аббасов И.Б.* Моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений Навье–Стокса // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 322-326. DOI
11. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. Методы расчета различных течений. – 552 с.
12. *Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids.* – 1965. – V. 8, N. 12. – P. 2182-2189. DOI
13. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
14. *Сушинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // *Известия ЮФУ. Технические науки.* – 2011. – Т. 121, № 8. – С. 22-32.
15. *Аббасов И.Б., Сушинов А.И., Чистяков А.Е.* Численное моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнения Навье–Стокса // XIV Всероссийская конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» с международным участием: Сб. трудов, Абрау-Дюрсо, 12-17 сентября 2011 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2011. – С. 10-15.
16. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
17. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
18. Программа трехмерного моделирования наката поверхностных волн на мелководье «3DBayWaves»: а.с. № 2012617087 о гос. рег. прогр. для ЭВМ / 2012. Аббасов И.Б., Семёнов И.С., Царевский В.В.; заявл. 22.05.2012; опубл. 08.08.2012. – 29 с.
19. *Мамыкина В.А., Хрусталева Ю.П.* Береговая зона Азовского моря. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1980. – 176 с.
20. *Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Проект «Моря СССР».* Т.V. Азовское море / Под ред. Н.П. Гоптарева и др. – СПб.: Гидрометеиздат, 1991. – С. 75-88.
21. СНиП 33-01-2003 «Гидротехнические сооружения. Основные положения». – М.: Госстрой России, 2004. – 62 с. (URL: http://www.complexdoc.ru/ntdpdf/551514/gidrotekhnicheskie_sooruzheniya_osnovnye_polozeniya.pdf).
22. *Динамика русловых потоков и литодинамика прибрежной зоны моря / Под ред. В.К. Дебольского.* – М.: Наука, 1994. – 304 с.

References

1. *Watanabe Y., Saeki H.* Three-dimensional large eddy simulation of breaking waves // *Coast. Eng. J.* – 1999. – V. 41, N. 3-4. – P. 281-301. DOI
2. *Lubin P., Vincent S., Abadie S., Caltagirone J.-P.* Three-dimensional large eddy simulation of air entrainment under plunging breaking waves // *Coast. Eng.* – 2006. – V. 53, N. 8. – P. 631-655. DOI
3. *Fedotova Z.I.* Obosnovanie chislennogo metoda dlia modelirovaniia nakata dlennykh voln na bereg // *ZhVT.* – 2002. – Т. 7, N. 5. – S. 58-76.
4. *Borisova N.M.* O modelirovanii protsessa nabeganiia preryvnoi volny na naklonnyi bereg // *SibZhVM.* – 2007. – Т. 10, N. 1. – S. 43-60.
5. *Kovyorkina O.A.* O chislenom modelirovanii techenii s preryvnymi volnami // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2008. – V. 1, N. 1. – S. 48-56. DOI
6. *Delis A.I., Kazolea M., Kampanis N.A.* A robust high-resolution finite volume scheme for the simulation of long waves over complex domains // *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 2008. – V. 56, N. 4. – P. 419-452. DOI
7. *Ting F.C.K., Kirby J.T.* Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker // *Coast. Eng.* – 1996. – V. 27, N. 3-4. – P. 131-160. DOI

8. *Kimmoun O., Branger H.* A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach // *J. Fluid Mech.* – 2007. – V. 588. – P. 353-397. DOI
9. *Abbasov I.B.* Численное моделирование трансформации нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях залива // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – V. 5, N. 1. – С. 5-10. DOI
10. *Abbasov I.B.* Моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений Навье-Стокса // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2012. – V. 5, N. 3. – С. 322-326. DOI
11. *Fletcher K.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. Методы расчета различных течений. – 552 с.
12. *Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids.* – 1965. – V. 8, N. 12. – P. 2182-2189. DOI
13. *Ianenko N.N.* Метод мелких шагов решения нелинейных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
14. *Sukhinov A.I., Timofeeva E.F., Chistiakov A.E.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // *Izvestiya IuFU. Tekhnicheskie nauki.* – 2011. – Т. 121, N. 8. – С. 22-32.
15. *Abbasov I.B., Sukhinov A.I., Chistiakov A.E.* Численное моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнения Навье-Стокса // XIV Всероссийская конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» с международным участием: Сб. трудов, Абрау-Дюрсо, 12-17 сентября 2011 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ИуФУ, 2011. – С. 10-15.
16. *Samarский A.A.* Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
17. *Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M.* Численные методы. – М.: BINOM. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
18. Программа трехмерного моделирования наката поверхностных волн на мелководье «3DBayWaves»: а.с. N. 2012617087 о гос. рег. progr. для EVM / 2012. Abbasov I.B., Semenov I.S., Tsarevskii V.V.; заявл. 22.05.2012; опубли. 08.08.2012. – 29 с.
19. *Mamykina V.A., Khrustalev Iu.P.* Береговая зона Азовского моря. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1980. – 176 с.
20. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Проект «Моря СССР». Т. V. Азовское море / Под ред. N.P. Goptareva и др. – СПб.: Гидрометеоздат, 1991. – С. 75-88.
21. SNiP 33-01-2003 «Гидротехнические сооружения. Основные положения». – М.: Госстрой России, 2004. – 62 с. (URL: http://www.complexdoc.ru/ntd/pdf/551514/gidrotekhnicheskie_sooruzheniya_osnovnye_polozeniya.pdf).
22. Динамика русловых потоков и литодинамика прибрежной зоны моря / Под ред. V.K. Debol'skogo. – М.: Наука, 1994. – 304 с.

Поступила в редакцию 22.04.13; опубликована в электронном виде 27.12.13