

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.3.42](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.3.42)  
УДК 539.3

## ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

А.А. Роговой

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

В работе используется авторский подход к описанию термоупругопластических процессов. В его основе лежит наложение малых деформаций на конечные. В результате в рамках конечных деформаций удастся построить модели сложных сред с учетом особенностей их термоупругопластического поведения, в том числе структурных изменений в материале.

*Ключевые слова:* термоупругопластичность, кинематика, определяющие соотношения, термодинамика, структурные изменения

## THERMO-ELASTIC-PLASTIC PROCESSES WITH FINITE DEFORMATIONS

A.A. Rogovoy

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

In this paper, thermo-elastic-plastic processes are described using author's approach, which is based on the superposition of small deformations on the finite ones. This allows us to construct models of complex media in the framework of finite deformations taking into account the peculiarities of their thermo-elastic-plastic behavior including structural changes occurring in the material.

*Key words:* thermo-elastic-plastic, kinematics, constitutive relations, thermodynamics, structural changes

### 1. Введение

В работах [1–7] предложен и обоснован подход к построению моделей поведения сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях, происходящих в материале в процессе деформирования. Построено разложение полного градиента места на упругий, неупругий и температурный. По форме это представление совпадает с известным разложением Ли, но свободно от недостатков последнего. Исходя из принципов объективности и термодинамики показано, что неупругий и температурный градиенты места должны быть чистыми деформациями без вращений. Введен функционал, основанный на упругом потенциале слабосжимаемого материала, использующийся в качестве одного из слагаемых при записи свободной энергии. Получены вытекающие из термодинамики соотношения для напряжений и энтропии в термо-упруго-неупругом процессе при конечных деформациях и уравнение теплопроводности. Определен общий вид функции отклика материала (тензор четвертого ранга) на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации. Константы, входящие в этот тензор, описывающий свойства материала в текущий момент времени и зависящий только от упругой кинематики, полагаются функциями температуры и скалярных структурных параметров, связанных с неупругой кинематикой процессов в средах. Предельный переход (при стремлении промежуточной конфигурации к текущей) легко сводит выведенные соотношения к точным эволюционным. При этом соответствующая уравнению состояния объективная производная вытекает из этого предельного перехода. Конкретизация общего вида определяющего уравнения осуществляется заданием дополнительных соотношений для неупругих деформаций (или их скоростей). В итоге в рамках единого подхода, основанного на наложении малых деформаций на конечные, построены определяющие уравнения для конечных термо-упруго-неупругих деформаций различных сред.

В настоящей работе обсуждаются результаты решения некоторых термоупругопластических задач с использованием подхода из [1–7]. Для целостности статьи и удобства читателя предварительно приводятся основные соотношения (кинематические и определяющие уравнения, соотношения и ограничения, вытекающие из положений термодинамики), необходимые для описания термо-упруго-неупругих процессов в рамках предлагаемого подхода.

### 2. Основные соотношения

#### 2.1. Кинематические соотношения

Придерживаясь подхода, основанного на наложении малых деформаций на конечные и изложенного в работах [3, 4], представим градиент места в виде мультипликации малых упругих, малых неупругих и конечных упруго-неупругих деформаций (Рис. 1):

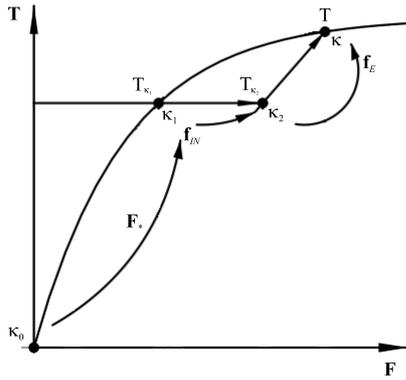


Рис. 1. Кинематика упруго-неупругого процесса и соответствующие ей напряжения  $T$

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{F}_* \tag{1}$$

Здесь упруго-неупругий градиент места  $\mathbf{F}_*$  переводит начальную конфигурацию, положение точки в которой определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , в первую промежуточную  $\kappa_1$ . Градиент места  $\mathbf{f}_{IN}$  преобразует конфигурацию  $\kappa_1$  во вторую, тоже промежуточную, конфигурацию  $\kappa_2$ . И, наконец, градиент места  $\mathbf{f}_E$  превращает конфигурацию  $\kappa_2$  в текущую  $\kappa$  с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ . Причем конфигурации  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и текущая близки между собой, что формализуется выражениями  $\mathbf{R}_{\kappa_2} = \mathbf{R}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{u}_{IN}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{u}_E$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр (положительная величина), а  $\mathbf{u}_{IN}$  и  $\mathbf{u}_E$  —

векторы неупругих и упругих перемещений, последовательно переводящие конфигурацию  $\kappa_1$  в  $\kappa_2$  и  $\kappa_2$  в текущую. В действительности соотношения для  $\mathbf{R}_{\kappa_2}$  и  $\mathbf{R}$  в таком виде не существуют, так как не известны перемещения  $\mathbf{u}_{IN}$  и  $\mathbf{u}_E$  (нет уравнений для их нахождения). Эти соотношения существуют только в виде  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  — полное приращение перемещений ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{IN}$ ), а каждая из конфигураций, задаваемая радиус-вектором  $\mathbf{R}$  — текущая в каком-либо упруго-неупругом процессе, и задаваемая радиус-вектором  $\mathbf{R}_{\kappa_1}$  — предыдущая в том же самом упруго-неупругом процессе, являются совместными. Обсуждаемые соотношения приводятся здесь только для того, чтобы подчеркнуть малость всех составляющих вектора полного приращения перемещений.

Конфигурации  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  неразличимы с точностью до линейного представления по  $\varepsilon$ :  $\mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} = \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_E = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e} + \mathbf{d}) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e})$ , где  $\mathbf{g}$  — единичный тензор, а  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN}$  — полная малая деформация и полный малый поворот. В результате выражение (1) представляется в виде  $\mathbf{F} = [\mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN})] \cdot \mathbf{F}_*$ . Предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей это приближенное соотношение (при его получении сохранялись только линейные относительно  $\varepsilon$  слагаемые) легко сводится к точному эволюционному (см. [3]):

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \tag{2}$$

Здесь:  $\mathbf{D}_E = \dot{\mathbf{e}}_E$ ,  $\mathbf{D}_{IN} = \dot{\mathbf{e}}_{IN}$  — деформации упругой и неупругой скоростей перемещений (совпадающие в данном случае со скоростями соответствующих деформаций);  $\mathbf{W}_E = \dot{\mathbf{d}}_E$ ,  $\mathbf{W}_{IN} = \dot{\mathbf{d}}_{IN}$  — упругий и неупругий тензоры вихря;  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  — любые достаточно гладкие тензорные функции, причем  $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}$ .

Осуществляя различные разбиения  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ , можно строить разные представления градиента места  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{F}_Q$ , где  $\mathbf{F}_P$  и  $\mathbf{F}_Q$  определяются тензорами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ . В работе [3] показано, что в предположении  $\mathbf{P} = \mathbf{D}_E + \mathbf{W}_E$ , решением уравнения (2) будет тензор  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$ , где

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E)] \cdot \mathbf{F}_{E*} \tag{3}$$

$$\mathbf{F}_{IN} = [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot (\mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_{IN})] \cdot \mathbf{F}_{IN*} \tag{4}$$

и градиенты места, помеченные «звездочкой», относятся к промежуточной конфигурации  $\kappa_1$ . Выбирая  $\mathbf{P}$  в указанном виде, удалось построить градиент места, зависящий только от упругой кинематики, и получить разложение  $\mathbf{F}$ , совпадающее по форме с известным разложением Ли, но свободное от недостатков последнего (см. [3]). Мера деформаций Коши–Грина записывается в виде  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_{IN}^T \cdot \mathbf{C}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$ , где  $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ . Эту меру, с учетом (3), (4), можно представить как  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_*$ , где  $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}$ ,  $\mathbf{C}_* = \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{F}_*$ , или как  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_\circ + 2\varepsilon \mathbf{F}_\circ^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_\circ$ , где  $\mathbf{F}_\circ = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN}$ ,  $\mathbf{C}_\circ = \mathbf{F}_\circ^T \cdot \mathbf{F}_\circ$ . Здесь, величины, помеченные «\*», относятся к промежуточной конфигурации  $\kappa_1$ , а величины, помеченные « $\circ$ », к промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  (см. Рис. 1); индекс «Т» символизирует операцию

транспонирования. В соответствии с этими соотношениями, применяя предельный переход при стремлении промежуточной конфигурации  $\kappa_1$  к текущей ( $\mathbf{F}_* \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ ) и промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  к текущей ( $\mathbf{F}_\circ \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_\circ \rightarrow \mathbf{C}$ ), можно получить приращение и скорость изменения меры деформации  $\mathbf{C}$  [4]  $(d\mathbf{C})_{\kappa_1} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (d\mathbf{e}_E + d\mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F}$ ,  $\dot{\mathbf{C}}_{\kappa_1} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{e}}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN}) \cdot \mathbf{F}$  относительно конфигурации  $\kappa_1$  (полное приращение и полная скорость изменения тензора  $\mathbf{C}$ ) и приращение и скорость изменения меры деформации  $\mathbf{C}$

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_2} = 2 \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{C}}_{\kappa_2} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}_E \cdot \mathbf{F} \quad (5)$$

относительно конфигурации  $\kappa_2$  (приращение и скорость изменения тензора  $\mathbf{C}$  за счет только упругих деформаций).

Для учета влияния температуры представим, аналогично работе [4], кинематику термо-упруго-неупругого процесса в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_\theta \cdot \mathbf{F}_*$ , где  $\mathbf{f}_\theta$  — градиент места, соответствующий малым температурным деформациям, и  $\mathbf{F}_*$  — термо-упруго-неупругий градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную. Причем все градиенты места, обуславливаемые малыми деформациями, коммутируют между собой. Окончательно получаем, что  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\theta$ , где  $\mathbf{F}_E$  и  $\mathbf{F}_{IN}$  представляются соотношениями (3) и (4), а

$$\mathbf{F}_\theta = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{IN}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}) \cdot \mathbf{F}_{\theta*} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{h}_\theta$  — градиент температурных перемещений (таких перемещений в действительности нет, но градиент существует) относительно конфигурации, соответствующей градиенту места  $\mathbf{F}_*$ . Полные малые деформации и повороты определяются теперь выражениями  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_\theta$ , где  $\mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{d}_\theta$  — симметричная и кососимметричная части  $\mathbf{h}_\theta$ .

Соотношения (3), (4) и (6) удобно переписать в форме

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{F}_{i*},$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{h}_E, & i = E, \\ \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{E*}, & i = IN, \\ \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}, & i = \theta. \end{cases}$$

С использованием полярных разложений для градиента места  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$  с любым индексом « $i$ » и представлением тензоров, составляющих полярные разложения, в виде  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(1)} \delta_i^{(1)}$ ,  $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(2)}$ ,

$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \delta_i^{(1)} \delta_i^{(1)}$ ,  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)}$ , где  $U_i$  — собственные значения симметричного положительно определенного тензора  $\mathbf{U}$  (или  $\mathbf{V}$ ),  $\delta_i^{(1)}$  — собственные векторы тензора  $\mathbf{U}$ , единичные и ортогональные, а  $\delta_i^{(2)}$  — собственные векторы тензора  $\mathbf{V}$ , также единичные и ортогональные, в работе [5] рассмотрены изменения этих тензоров при слабых возмущениях. В частности, для изменения ортогонального тензора  $\mathbf{R}$  получено выражение

$$\mathbf{R} = \left\{ \mathbf{g} + \varepsilon \left[ \mathbf{P}_C - \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)} - \right] \right\} \cdot \mathbf{R}_*, \quad (7)$$

где  $\mathbf{P}_S$  и  $\mathbf{P}_C$  — симметричная и кососимметричная части  $\mathbf{P}$ . Естественно, присутствующие в этих соотношениях тензоры чистой деформации, их собственные значения и векторы, а также ортогональный тензор относятся или к упругой, или к неупругой, или к температурной кинематике процесса.

### 2.2. Определяющее уравнение

Как известно [8], в соответствии с теоремой Селерье–Рихтера или теоремой приведения Нолла, определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}, \quad (8_1)$$

где  $\mathbf{T}$  — тензор истинных напряжений,  $\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U})$  — отклик материала на чистую деформацию. Это соотношение может быть представлено в нескольких эквивалентных формах (см. [1, 2]):

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_2(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_3(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_4(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_5(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (8_2)$$

где  $J = I_3(\mathbf{F})$  — третий главный инвариант  $\mathbf{F}$ , а  $\tilde{\mathbf{g}}_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ ) — функции отклика материала.

Будем полагать, что  $\tilde{\mathbf{g}}_i = \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{C}, \theta, \mu_j)$ , где  $\theta$  — абсолютная температура, а  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — скалярные параметры, связанные со структурными изменениями, происходящими в материале в процессе деформирования. Представим каждую из входящих в (8) величин через ее значение в промежуточной конфигурации ( $A_*$ ) и приращение при переходе к близкой текущей ( $\varepsilon a$ ):  $A = A_* + \varepsilon a$ , а затем перепишем соотношения (8<sub>1</sub>) и (8<sub>2</sub>) относительно промежуточной конфигурации, сохраняя только линейные по  $\varepsilon$  слагаемые (см. [1]):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_* - \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{d} + \varepsilon \vartheta(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \varepsilon (\mathbf{L}_1^{IV})_* \cdot \mathbf{e}_E, & 1 \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \vartheta(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \varepsilon (\mathbf{L}_2^{IV})_* \cdot \mathbf{e}_E, & 2 \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_* - \varepsilon \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{T}_* - \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h} + \varepsilon \vartheta(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \varepsilon (\mathbf{L}_3^{IV})_* \cdot \mathbf{e}_E, & 3 \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* - \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h} + \varepsilon \vartheta(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \varepsilon (\mathbf{L}_4^{IV})_* \cdot \mathbf{e}_E, & 4 \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_* - \varepsilon \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \vartheta(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \varepsilon (\mathbf{L}_5^{IV})_* \cdot \mathbf{e}_E, & 5 \\ \mathbf{T} &= [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \vartheta(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \varepsilon (\mathbf{L}_6^{IV})_* \cdot \mathbf{e}_E. & 6 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь:  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}_E$  — полная термо-упруго-неупругая и чисто упругая малые деформации относительно промежуточной конфигурации;  $\mathbf{d}$  — полный термо-упруго-неупругий малый поворот относительно промежуточной конфигурации;  $I_1$  — первый главный инвариант;  $\mathbf{h}$  — градиент относительно промежуточной конфигурации вектора малых перемещений, переводящего промежуточную конфигурацию в близкую текущую;  $\vartheta$  и  $\zeta_j$  — приращения температуры и скалярных структурных параметров;  $(\mathbf{L}_i^{IV})_*$  — функция отклика материала (тензор четвертого ранга) на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации (конкретное выражение для  $(\mathbf{L}_6^{IV})_*$  приведено в [3] для слабосжимаемого материала);  $\mathbf{T}_{,\alpha} \equiv \partial \mathbf{T} / \partial \alpha$  и символ «\*» указывает, что значение этой величины соответствует промежуточной конфигурации. Предельный переход, при стремлении промежуточной конфигурации к текущей, легко сводит приближенные соотношения (9) (при их получении сохранялись только линейные слагаемые относительно  $\varepsilon$ ) к точным эволюционным с соответствующими объективными производными: Яуманна, Олдройда, Коттер–Ривлина, левой, правой и Труделла. В частности, выражение (9<sub>6</sub>) принимает вид

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\vartheta}(\mathbf{T}, \theta)_* + \dot{\zeta}_j(\mathbf{T}, \mu_j)_* + \mathbf{L}_6^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E, \quad (10)$$

где  $\mathbf{T}^{Tr}$  — автоматически вытекающая из предельного перехода объективная производная Труделла. Учитывая, что  $\mathbf{e}_E = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{IN} - \mathbf{e}_\theta$  или  $\dot{\mathbf{e}}_E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_{IN} - \dot{\mathbf{e}}_\theta$ , и записывая свои определяющие соотношения для  $\mathbf{e}_{IN}$  ( $\dot{\mathbf{e}}_{IN}$ ) и  $\mathbf{e}_\theta$  ( $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ ), замкнем построение уравнений (9), (10).

В работе [3] введен функционал

$$W_1 = \int_0^t (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{D}_E d\tau, \quad (11)$$

в котором второй (симметричный) тензор Пиолы–Кирхгофа  $\mathbf{P}_{II}$  представляется в виде

$$\mathbf{P}_{II} = 4 \int_0^t \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau, \quad (12)$$

где  $W$  — упругий потенциал, зависящий от меры упругих деформаций  $\mathbf{C}_E$  и имеющий константы, зависящие от температуры  $\theta$  и структурных параметров  $\mu_j$ . Операция « $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}^{IV}$ » означает позиционное скалярное умножение слева тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  на третий базисный вектор тензора четвертого ранга  $\mathbf{B}^{IV}$ . Как показано в [3], функционал (11), (12) производит последнее определяющее уравнение в (9).

### 2.3. Соотношения, вытекающие из положений термодинамики

Воспользуемся термодинамическим неравенством Клаузиуса–Дюгема  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{\theta}s) - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \theta \geq 0$ , где  $\rho, \psi, s$  — плотность массы в текущей конфигурации, удельные (отнесенные к единице массы) свободная энергия и энтропия,  $\mathbf{q}$  — вектор теплового потока,  $\tilde{\nabla}$  — оператор Гамильтона в текущей конфигурации и  $\mathbf{D}$  — тензор полной деформации скорости перемещений. По требованию, предъявляемому принципом объективности, аргументами функции  $\psi$  могут быть только инвариантные величины, то есть какая-либо инвариантная по отношению к жесткому вращению текущей конфигурации кинематическая величина, температура  $\theta$  и конечное число внутренних параметров  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — объективных скалярных функций, характеризующих изменение внутренней структуры материала в процессе упруго-неупругого деформирования. В качестве кинематической величины выберем тензор  $\mathbf{C}_{\kappa_2}$  (5) и представим свободную энергию  $\psi(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_j, \theta)$  в виде (см. [4])  $\psi(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_j, \theta) = \psi_1(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_j, \theta) + \psi_2(\theta) + \psi_3(\mu_j)$ , полагая, что  $\dot{\psi}_1 = 0$ , если  $\dot{\mathbf{C}}_{\kappa_2} = 0$ ;  $\psi_2 = 0$ , если  $\theta = \theta_0$  ( $\theta_0$  — температура приведения в градусах Кельвина, обычно это комнатная температура);  $\psi_3 = 0$ , если  $\mu_j = 0$ . Первое условие говорит о том, что при отсутствии изменения упругой деформации ( $\dot{\mathbf{e}}_E = \mathbf{D}_E = 0$ ) функция  $\psi_1$  не меняется. Этому условию удовлетворяет функционал (11), (12), но отнесенный не к единичному недеформированному объему, а к единичной массе. Поэтому  $\psi(\mathbf{C}_{\kappa_2}, \mu_j, \theta) = W_1/\rho_0 + \psi_2(\theta) + \psi_3(\mu_j)$ , где  $\rho_0$  — плотность массы в недеформированной конфигурации. В результате, построив локальное продолжение процесса [8] и связав  $\dot{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{D}_0$  с изменением температуры  $\dot{\theta}$  простейшим законом линейного температурного расширения  $\dot{\mathbf{e}}_0 = \beta \dot{\theta} \mathbf{g}$ , где  $\beta$  — коэффициент линейного температурного расширения, который полагаем функцией только температуры, получаем:  
– определяющее соотношение  $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T$ , в котором  $\mathbf{P}_{II}$  дается выражением (12);  
– соотношение для энтропии

$$s = \frac{J\beta}{\rho_0} I_1(\mathbf{T}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} - c_{T0} \ln \frac{\theta}{\theta_0} + \int_{\theta_0}^{\theta} \ln \frac{\theta}{\theta_1} c_{T1}(\theta_1) d\theta_1, \quad (13)$$

где  $c_{T0}$  и  $c_{T1}$  определяют изменение теплоемкости при нулевом напряжении  $c_T = c_{T0} + \int_{\theta_0}^{\theta} c_{T1}(\theta_1) d\theta_1$ ;

– термодинамическое неравенство

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu_j} \right) \dot{\mu}_j - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \theta \geq 0. \quad (14)$$

Из первого закона термодинамики с учетом (13) и уравнения Фурье для теплового потока имеем уравнение теплопроводности (см. [4])  $c \dot{\theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \theta)$ , где приняты обозначения: теплоемкость —  $c = J^{-1} \rho_0 c_T + \theta \left[ (\beta_{,0} + 2\beta^2) I_1(\mathbf{T}) + \beta I_1(\mathbf{T}_{,0}) - J^{-1} \int_0^t J \mathbf{T}_{,00} \cdot \mathbf{D}_E d\tau \right]$ ; скорость производства тепла упругими источниками —  $\dot{Q}_E = \theta \left[ \mathbf{T}_{,0} - 2\beta \mathbf{T} - \beta (\mathbf{g} \cdot \mathbf{L}_6^{IV}) \right] \cdot \mathbf{D}_E$ ; скорость производства тепла неупругими источниками и структурными изменениями в материале —

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - 2\beta\theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} + \dot{\mu}_j \left[ J^{-1} \int_0^t J \left( \theta(t) \mathbf{T}_{,0\mu_j} - \mathbf{T}_{,\mu_j} \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau - \beta \theta I_1(\mathbf{T}_{,\mu_j}) - J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu_j} \right]. \quad (15)$$

## 2.4. Ограничения, вытекающие из положений термодинамики

Все соотношения механики, описывающие поведение материала, должны удовлетворять принципу объективности, то есть быть материально независимыми от изменения систем отсчета, относительно которых рассматриваются движения. В уравнения термодинамики входят мощности  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E$ ,  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}$  и  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_0$ . В работе [4] показано, что при описании неупругой и температурной кинематики эти скаляры, в отсутствие дополнительных ограничений, зависят от выбора систем отсчета. Объективность же всех этих величин будет выполняться, если градиенты места  $\mathbf{F}_{IN}$  и  $\mathbf{F}_0$  будут чистыми деформациями без вращений:  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN}$ ,  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0$ , то есть при условии, что в полярных разложениях тензоров  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{R}_{IN} \cdot \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN} \cdot \mathbf{R}_{IN}$ , и  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{R}_0$  ортогональные тензоры  $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_0$  будут равны единичным  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{R}_0 = \mathbf{g}$ . Последние равенства определяют недостающую связь между  $\mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_{IN}$ , а также между  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{d}_0$ . Связь является недостающей в силу того, что определяющие уравнения известны только для малых неупругих и температурных деформаций (скоростей). В пластичности, например, это ассоциированный закон, в вязкости — дифференциальный закон  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = \mathbf{T}/\eta$ , где  $\eta$  — вязкость, в термоупругости — закон линейного температурного расширения. Для малых вращений (скоростей) подобного типа соотношения отсутствуют.

С учетом сказанного выше ортогональные тензоры  $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_0$  в полярных разложениях этих градиентов места должны быть единичными в любой момент времени. Отсюда следует, что в (7) должно быть  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* = \mathbf{g}$ , и тогда  $\mathbf{P}_C = \left( (U_i - U_j) / (U_i + U_j) \right) (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)}$ . Представляя тензор  $\mathbf{P}_C$  в базисе  $\delta_i^{(2)}$ , приходим к уравнению  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_S - \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{U}$ , которое для определения  $\mathbf{d}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T &= \mathbf{C}, \quad \text{где } \mathbf{A} = \mathbf{F}_{*}^{-T} \cdot \mathbf{U}_{0*} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{IN}; \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{C}, \quad \text{где } \mathbf{A} = \mathbf{F}_{*}^{-T} \cdot \mathbf{U}_{0*} \cdot \mathbf{F}_{*}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_0, \end{aligned} \quad (16)$$

который формально представляется как следующее уравнение:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$  или  $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ , а  $\mathbf{X} = \mathbf{d}_{IN}$  или  $\mathbf{X} = \mathbf{d}_0$ . Такое уравнение имеет единственное решение, если тензоры  $\mathbf{A}$  и  $-\mathbf{B}$  не имеют общих собственных значений (см. [9, 10]). Уравнения (16) удовлетворяют этому условию.

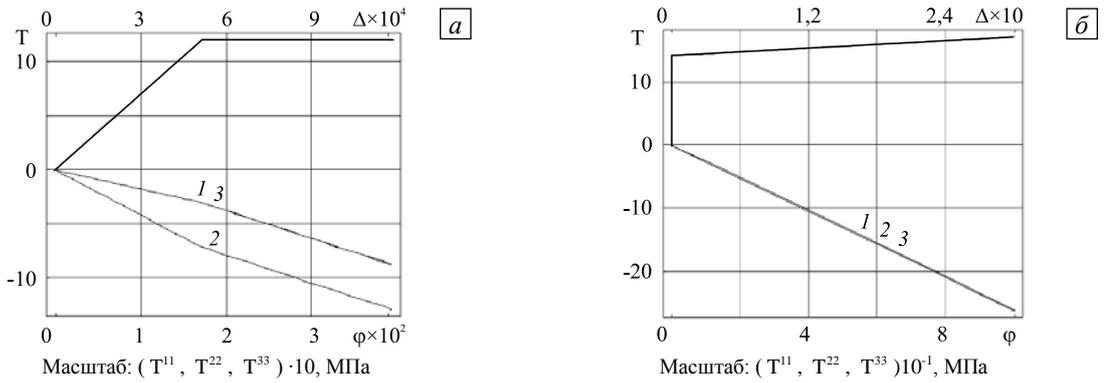
## 3. Примеры решения некоторых упругопластических задач

### 3.1. Упругопластический сдвиг со сжатием

Для упруго-неупругого процесса в соотношения (9) входят полные малые деформации и повороты, но тензор свойств материала действует только на малые упругие деформации, которые являются разностью малых полных и неупругих (пластических) деформаций. Пластическое поведение материала описывалось ассоциированным законом с функцией текучести Мизеса  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = [3\dot{\sigma}_i / (2H \sigma_i)] \mathbf{S}$ , где  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений,  $H$  — модуль пластического упрочнения,  $\mathbf{S}$  — девиатор истинных напряжений  $\mathbf{T}$ . Полагалось отсутствие структурных изменений в материале. В этом случае диссипативное неравенство (14) сводится к выражению  $\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \theta \leq 0$ .

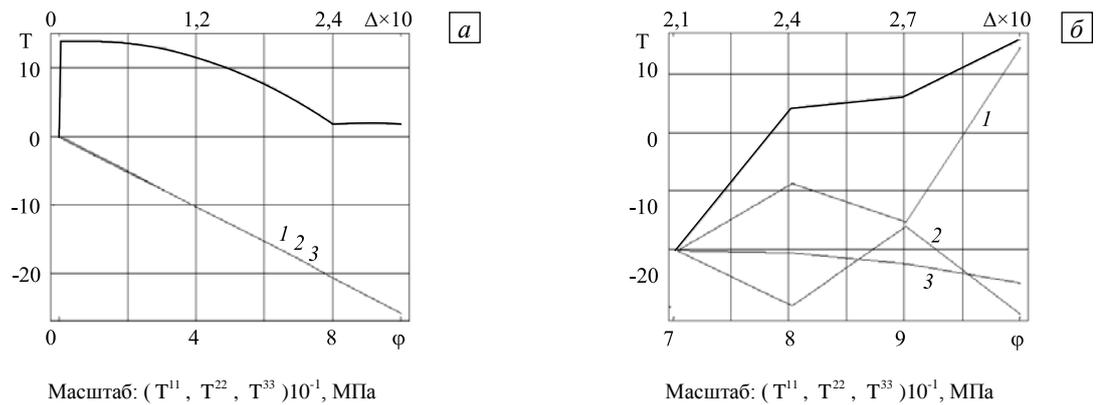
Рассматривалась плоская (в направлении 3) задача простого сдвига в горизонтальном направлении (направление 1) со сжатием (осадкой) в вертикальном направлении (направление 2) [1]. Ставилась цель: исследовать влияние выбора вида объективной производной в эволюционных определяющих уравнениях на результаты решения. Упругое поведение материала при конечных деформациях описывалось упрощенным законом Синьорини. Деформируемым материалом была медь с константами: параметром Ламе  $\lambda = 6 \cdot 10^4$  МПа; модулем сдвига  $G = 4 \cdot 10^4$  МПа; пределом текучести  $\sigma_T = 20$  МПа; модулем пластического упрочнения  $H = 50$  МПа. На рисунке 2 приведены результаты решения одной и той же задачи для начального участка нагружения и для развитого упругопластического процесса с использованием соотношений (9<sub>1</sub>) и (9<sub>3</sub>), которым соответствуют точные эволюционные уравнения с объективными производными Яуманна и Коттер–Ривлина. Так как деформируемым материалом был металл, то соотношение (9<sub>1</sub>) преобразовывалось также с учетом малых упругих деформаций.

3.1.1. Простой сдвиг с осадкой  $\Delta$ ; случай согласованных объективных производных. Процесс деформирования описывается соотношениями упругопластичности с конечными упругими деформациями (используются производные Яуманна и Коттер–Ривлина) и соотношением упругопластичности с малыми упругими деформациями (с производной Яуманна).



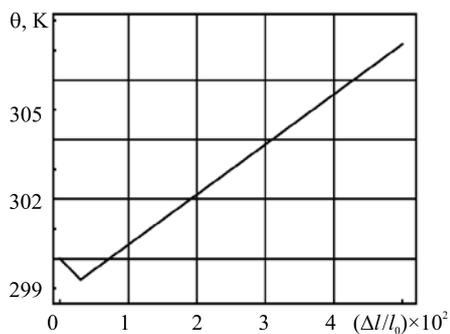
**Рис. 2.** Распределение напряжений  $T$  в координатах  $\varphi - \Delta$  ( $\varphi$  – угол сдвига, град;  $\Delta$  – осадка, %) на начальном участке нагружения (а) и в развитом упругопластическом процессе (б), рассчитанное с использованием согласованных объективных производных:  $T^{12}$  (полужирная линия);  $T^{11}$  (линия 1);  $T^{22}$  (2);  $T^{33}$  (3)

Все эти три решения, полученные на основе уравнений с согласованными объективными производными, полностью совпали как для начального участка нагружения, так и для развитого упругопластического процесса, в конце которого максимальная главная деформация Коши–Грина достигала по модулю 9,5 %. Величина изменения осадки выбиралась такой, чтобы на состояние сдвига накладывалось еще и состояние, близкое к гидростатическому. Поэтому составляющие тензора напряжений  $T^{11}$ ,  $T^{22}$  и  $T^{33}$  мало отличаются между собой. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными не проводилось из-за отсутствия последних.



**Рис. 3.** Распределение напряжений  $T$ , полученное для процесса развитой пластичности при замене производной Яуманна на производную Олдройда (а) и при замене производной Коттер–Ривлина на производную Олдройда (б):  $T^{12}$  (полужирная линия);  $T^{11}$  (линия 1);  $T^{22}$  (2);  $T^{33}$  (3)

**3.1.2. Простой сдвиг с осадкой  $\Delta$ ; случай несогласованных объективных производных.** Для описания развитой пластичности используются соотношения упругопластичности с малыми упругими деформациями, в которых производная Яуманна заменена на производную Олдройда, и соотношения с конечными упругими деформациями с заменой производной Коттер–Ривлина на производную Олдройда. Процесс деформирования в рассмотренной задаче осуществлялся квазистатически и изменение температуры было пренебрежимо малым.



**Рис. 4.** Изменение температуры.  $l_0$  — начальная длина,  $\Delta l$  — приращение длины

Замена согласованной объективной производной на несогласованную до сих пор производится во многих работах. Как видно из рисунка 3, подобные действия приводят к совершенно нефизичным результатам.

**3.2. Изменение температуры в процессе упругопластического растяжения**

Пластическое поведение материала, как и в предыдущем случае, описывалось ассоциированным законом с функцией текучести Мизеса:  $\dot{\epsilon}_{IN} = [3\dot{\sigma}_i / (2H\sigma_i)]S$ . Полагалось также отсутствие

структурных изменений в материале. В этом случае диссипационное неравенство (14) сводится к выражению  $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$ . Рассматривалось адиабатическое растяжение стержня из стали 30ХГСА. Упругое поведение материала описывалось упрощенным законом Синьорини. Для решения температурной задачи использовались соотношения (15). На рисунке 4 приведен график температуры, из которого следует, что при деформации порядка 0,3 % наступает пластичность: в упругой области температура падает, а с наступлением пластичности растет.

### 3.3. Пластическая работа, перешедшая в тепло

Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и тому подобного, и энергий их взаимодействия. При низких скоростях деформации скорость нагрева равняется скорости охлаждения, и процесс считается изотермическим. При более высоких скоростях, однако, скорость генерации тепла намного выше, чем скорость охлаждения, и адиабатический процесс является причиной возрастания температуры (при испытаниях на сжатие). Для оценки доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло, вводится, обычно, величина  $\gamma = \dot{Q}_{IN} / \dot{W}_P$ , где  $\dot{W}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}$  — мощность пластического деформирования, и экспериментально определяется зависимость  $\gamma$  от накопленной меры пластической деформации, за которую можно принять величину  $\Lambda_p = \int_0^t \mathbf{D}_{IN}(\tau) \cdot \mathbf{D}_{IN}(\tau) d\tau$ .

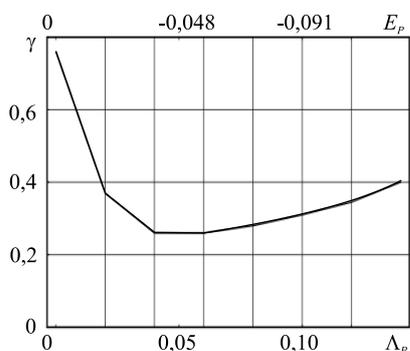


Рис. 5. Типичная зависимость  $\gamma$  от  $\Lambda_p$  (соответствующие значения пластической деформации  $E_p$  приведены для сведения)

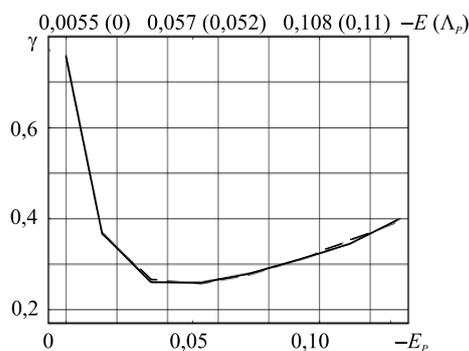


Рис. 6. Результаты идентификации модели (пунктирная линия) и эксперимент (сплошная линия); соответствующие значения полной ( $E$ ) и пластической ( $E_p$ ) деформаций приведены для сведения

До недавнего времени большинство работ в этой области проводилось в условиях квазистатического эксперимента. В результате был сделан вывод, что  $\gamma$  есть постоянная величина, принимающая значения между 0,8 и 1. Попытки измерить  $\gamma$  в динамических экспериментах, выполненных в широком диапазоне

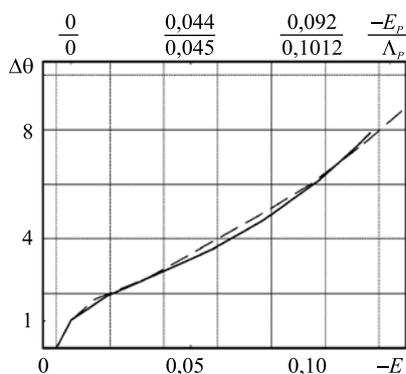


Рис. 7. Изменение температуры

деформаций и скоростей деформаций, показали, что ее значения варьируются в диапазоне от 0,6 до 0,9 и зависят от исследуемого металла, величины деформации и скорости деформации. Это является убедительным подтверждением влияния деформации и скорости деформации на распределение затраченной пластической работы на запасенную и тепловую части. Экспериментальные данные исследований больших деформаций показали, что материал не может накапливать энергию неограниченно. При некотором критическом уровне пластической деформации почти вся работа превращается в тепловую энергию и  $\gamma$  достигает единицы. Типичная зависимость  $\gamma$  от  $\Lambda_p$  имеет вид (см. [11, 12]), представленный на рисунке 5.

Описанию этих экспериментальных данных в рамках развиваемого подхода к построению моделей сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях, происходящих в материале в процессе деформирования, посвящена работа [7]. Там, основываясь на зависимости  $\gamma$  от  $\Lambda_p$  (Рис. 5), выполнена идентификация модели, результаты которой приведены на рисунке 6 (пунктирная линия).

С использованием идентифицированной таким образом модели решалось уравнение теплопроводности (15). Полученное изменение температуры  $\Delta\theta$  (пунктирная линия) показано на рисунке 7 в сравнении с экспериментальными данными (сплошная линия).

### 3.4. Ротационная вытяжка цилиндрических деталей

Развиваемый подход использовался для моделирования технологического процесса ротационной вытяжки цилиндрических деталей, который заключается в следующем. Цилиндрическая заготовка (1), надетая на оправку (2) и прижатая к ней гидроприжимом (3), вращается вместе с оправкой и деформируется роликами (4), совершающими поступательное движение (см. Рис. 8). В результате воздействия роликов заготовка становится тоньше и длиннее. На первый взгляд, этому процессу должна соответствовать пространственная постановка задачи. Но экспериментальные исследования изменения микроструктуры материала показали, что при технологически правильном осуществлении процесса ротационной вытяжки возникающие в окружном направлении деформации пренебрежимо малы, и задача может рассматриваться как плоская в этом направлении.

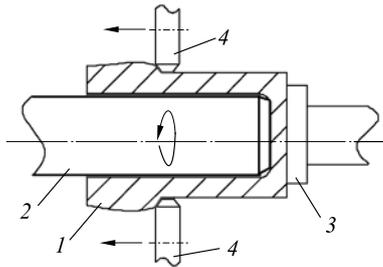


Рис. 8. Схема ротационной вытяжки цилиндрических деталей

Вследствие этого процесс ротационной вытяжки цилиндрических деталей моделируется следующим образом. Считается, что каждое продольное сечение заготовки плоскостью, проходящей через ее ось, вращаясь, проходит через различные неподвижные продольные сечения ролика параллельными плоскостями. Процесс деформирования (плоская деформация) фиксированного продольного сечения заготовки представлен на рисунке 9 в виде обращенного движения, в соответствии с которым

сечение заготовки неподвижно и последовательно взаимодействует с разными набегающими на нее сечениями ролика.

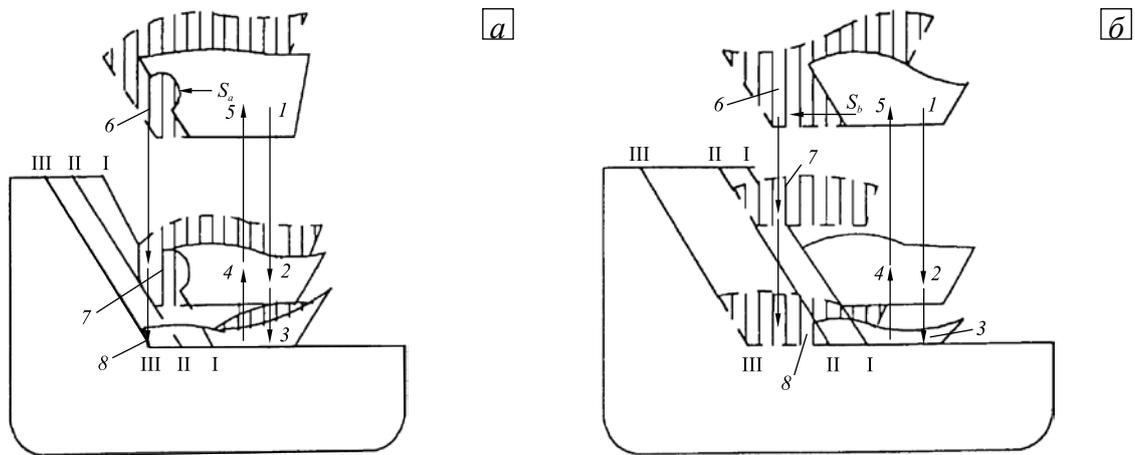


Рис. 9. Модель процесса ротационной вытяжки: деформирование при малой (а) и большой (б) подачах ролика

Сечение ролика 1 переходит в сечение 2, с которого начинается контакт с заготовкой по поверхности I-I, и, перемещаясь в сечение 3, деформирует ее до поверхности II-II. На пути 1-2-3 имеет место перемещение как в вертикальном (за счет действия на заготовку разных параллельных сечений ролика), так и в горизонтальном (за счет подачи ролика) направлениях. При этом осуществляется нагружение заготовки, в ходе которого могут возникать пластические деформации. Затем ролик отходит от заготовки (сечения 4 и 5 показаны условно), смещается на величину подачи на оборот заготовки  $S_a$  и сечениями 6, 7 (с него начинается контакт с заготовкой по поверхности II-II) и 8 снова деформирует заготовку до поверхности III-III. На пути 3-4-5 происходит разгрузка и формируются остаточные деформации и напряжения. Представленная схема деформирования в процессе ротационной вытяжки отражает влияние величины подачи ролика на напряженно-деформированное состояние, что и продемонстрировано на рисунке 9. Путь 6-7-8 при подаче  $S_a$  (Рис. 9, а) и подаче  $S_b$  (Рис. 9, б) приводит к различным конечным состояниям (см. положения поверхностей III-III). При разгрузке из этих состояний, в свою очередь, возникают различные остаточные напряжения, определяющие дальнейший процесс деформирования.

Именно такая схема деформирования использовалась в работе [13] при моделировании процесса ротационной вытяжки цилиндрических деталей. На основе соотношений предыдущего раздела методом конечных элементов (МКЭ) для вариационного уравнения Лагранжа с помощью пошаговой процедуры решалась плоская изотермическая упругопластическая контактная задача с большими деформациями без трения (алгоритм решения упругопластических задач с трением приведен в [14]). Учитывалась изменчивость областей контакта оправки с заготовкой и заготовки с роликами. Поведение материала описывалось: упругое — упрощенным законом Синьорини, а пластическое — ассоциированным законом течения с поверхностью текучести Мизеса и изотропным упрочнением, не зависящим от скорости деформирования. Построены поля перемещений и напряжений, установлены области пластичности и зоны контакта заготовки с роликом и оправкой в разные моменты времени, найдены силы и мощность, необходимые для осуществления процесса ротационной вытяжки.

Для итерационного решения уравнения упругопластичности применялся метод радиального возврата [15]. Точность вычисления напряжений повышалась за счет процедуры восполнения напряжений [16], которая получила дальнейшее развитие в работе [17]. Эта процедура делает возможным построение поля напряжений без дифференцирования полей перемещений, что значительно повышает точность определения напряжений.

Необходимость повышения точности вычисляемых напряжений в рассматриваемой задаче обусловлена следующим. Как известно, МКЭ, применяемый для численной реализации вариационного уравнения Лагранжа, позволяет достаточно хорошо строить поля перемещений и значительно хуже — поля напряжений (из-за необходимости численно дифференцировать сеточные поля перемещений). Повышение точности определения напряжений становится ключевым моментом в задачах, решение которых основывается на пошаговой процедуре, в силу того, что перемещения и напряжения, полученные на предыдущем шаге, являются начальными для следующего шага. Эта взаимосвязь может особенно сильно проявиться при последовательном решении контактных упругопластических задач, так как на выполнение одного из условий, определяющих область контакта (условия неположительности контактного давления) в следующей задаче, повлияет ненулевое контактное давление, полученное в результате его неточного вычисления в предыдущей контактной задаче.

Таким образом, анализ результатов решения рассмотренных выше задач дает право заключить, что теория, разработанная для построения моделей сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материале, работоспособна и может использоваться при описании упругопластических и термоупругопластических процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (договор № 02.G25.31.0068 от 23.05.2013 г. в составе мероприятия по реализации постановления Правительства РФ № 218).

## Литература

1. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // МТГ. – 2002. – № 4. – С. 77-95.
2. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // МТГ. – 2005. – № 4. – С. 122-140.
3. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 138-149.
4. Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 144-153.
5. Роговой А.А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 165-172.
6. Роговой А.А. Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Электронный журнал «Физико-химическая кинетика в газовой динамике». – 2008. – Т. 7. (URL: <http://chemphys.edu.ru/article/105/>).
7. Rogovoy A.A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mech. Therm. – 2012. – V. 24, N. 2. – P. 81-114. DOI
8. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
10. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
11. Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A.J., Rosakis P. On the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. Part I: Experiments // GALCIT Technical Report SM № 98-7, California Institute of Technology, Pasadena, CA. – 1998.
12. Rosakis P., Rosakis A.J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – V. 48, N. 3. – P. 581-607. DOI

13. Rogovoy A.A. Large elastic-plastic deformations in the technological process of rotary forming of cylindrical workpieces // Metallurgy and Foundry Engineering. – 1994. – V. 20, N. 3. – P. 343-350.
14. Rogovoy A.A., Ivanov B.P. Displacement formulation of the friction conditions on the contact surface // Comput. Struct. – 1997. – V. 62, N. 1. – P. 133-139. DOI
15. Nagtegaal J.C. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems // Comput. Method. Appl. M. – 1982. – V. 33, N. 1-3. – P. 469-484. DOI
16. Rogovoy A.A. The stress recovery procedure for the finite element method // Comput. Struct. – 1997. – V. 63, N. 6. – P. 1121-1137. DOI
17. Роговой А.А., Столбова О.С. Процедура восполнения напряжений при решении геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 6. – С. 992-1008. (Rogovoi A.A., Stolbova O.S. A stress recovery procedure for solving geometrically non-linear problems in the mechanics of a deformable solid by the finite element method // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – Т. 74, N. 6. – P. 710-720. DOI)

*Поступила в редакцию 30.09.13; опубликована в электронном виде 15.10.13*

## Bibliography

1. *Novokshanov R.S., Rogovoy A.A.* O postroenii evolyutsionnykh opredelyayuschikh sootnoshenii dlya konechnykh deformatsii // MTT. – 2002. – N. 4. – S. 77-95.
2. *Novokshanov R.S., Rogovoy A.A.* Evolyutsionnye opredelyayuschie sootnosheniya dlya konechnykh vyazkouprugikh deformatsii // MTT. – 2005. – N. 4. – S. 122-140.
3. *Rogovoy A.A.* Opredelyayuschie sootnosheniya dlya konechnykh uprugo-neuprugikh deformatsii // PMTF. – 2005. – T. 46, N. 5. – S. 138-149.
4. *Rogovoy A.A.* Termodinamika uprugo-neuprugogo protsessa pri konechnykh deformatsiyakh // PMTF. – 2007. – T. 48, N. 4. – S. 144-153.
5. *Rogovoy A.A.* Kinematika uprugo-neuprugogo protsessa pri konechnykh deformatsiyakh // PMTF. – 2008. – T. 49, N. 1. – S. 165-172.
6. *Rogovoy A.A.* Kinematika i termodinamika uprugo-neuprugogo protsessa pri konechnykh deformatsiyakh // Elektronnyi zhurnal «Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoi dinamike». – 2008. – T. 7.  
(URL: <http://chemphys.edu.ru/article/105/>).
7. *Rogovoy A.A.* Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mech. Therm. – 2012. – V. 24, N. 2. – P. 81-114. DOI
8. *Trusdell K.* Pervonachal'nyi kurs ratsional'noi mekhaniki sploshnykh sred. – M.: Mir, 1975. – 592 s.
9. *Gantmakher F.R.* Teoriya matrits. – M.: Nauka, 1988. – 552 s.
10. *Lankaster P.* Teoriya matrits. – M.: Nauka, 1978. – 280 s.
11. *Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A.J., Rosakis P.* On the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. Part I: Experiments // GALCIT Technical Report SM N. 98-7, California Institute of Technology, Pasadena, CA. – 1998.
12. *Rosakis P., Rosakis A.J., Ravichandran G., Hodowany J.* A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – V. 48, N. 3. – P. 581-607. DOI
13. *Rogovoy A.A.* Large elastic-plastic deformations in the technological process of rotary forming of cylindrical workpieces // Metallurgy and Foundry Engineering. – 1994. – V. 20, N. 3. – P. 343-350.
14. *Rogovoy A.A., Ivanov B.P.* Displacement formulation of the friction conditions on the contact surface // Comput. Struct. – 1997. – V. 62, N. 1. – P. 133-139. DOI
15. *Nagtegaal J.C.* On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems // Comput. Method. Appl. M. – 1982. – V. 33, N. 1-3. – P. 469-484. DOI
16. *Rogovoy A.A.* The stress recovery procedure for the finite element method // Comput. Struct. – 1997. – V. 63, N. 6. – P. 1121-1137. DOI
17. *Rogovoy A.A., Stolbova O.S.* Protsejura vospolneniya napryazhenii pri reshenii geometricheski nelinejnykh zadach mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela metodom konechnykh elementov // PMM. – 2010. – T. 74, N. 6. – S. 992-1008.  
(*Rogovoi A.A., Stolbova O.S.* A stress recovery procedure for solving geometrically non-linear problems in the mechanics of a deformable solid by the finite element method // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – T. 74, N. 6. – P. 710-720. DOI)