

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.40

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.В. Рукавишников

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия

В работе построен приближённый метод решения и проведён численный анализ математической модели, полученной в результате дискретизации по времени и линеаризации задачи течения двухфазной вязкой жидкости. При этом жидкость является несжимаемой, перемешивание фаз отсутствует, а межфазная граница изменяется во времени. Задача формулируется в виде уравнений Навье–Стокса, учитывающих эти особенности.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, криволинейная межфазная граница, разрывные коэффициенты

NUMERICAL SOLUTION OF THE HYDRODYNAMICS PROBLEM WITH A CURVED INTERPHASE BOUNDARY

A.V. Rukavishnikov

Khabarovsk Division for the Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk, Russia

In this paper, we develop an approximate method and perform the numerical analysis of the mathematical model, obtained by sampling in time and linearizing the problem of a two-phase viscous fluid flow. We assume that the fluid is incompressible, phase mixing is absent, and the interphase boundary varies with time. The problem is formulated based on incompressible Navier-Stokes equations taking into account these constraints.

Key words: Navier–Stokes equations, curvilinear interphase boundary, discontinuous coefficients

1. Введение

Работа посвящена построению приближенного метода и численному анализу двумерной математической модели, полученной в результате дискретизации по времени и линеаризации задачи течения двухфазной вязкой жидкости без перемешивания, сформулированной в виде уравнений Навье–Стокса, учитывающих несжимаемость жидкости и изменяющуюся во времени межфазную границу [1, 2].

Многие, интересные с точки зрения физики, задачи включают в себя межфазную границу, например, задачи течения вихревых слоев, несмешивающихся жидкостей, потоков Хеле–Шоу. Следует отметить, что во всех перечисленных случаях — это задачи с двойной сингулярностью, вызванной разрывностью исходных данных (коэффициентов и правых частей уравнений, граничных условий) в сочетании с геометрическими особенностями границы области [3], и они обладают чувствительностью к малым вычислительным возмущениям. Решение подобных задач вносит вклад в развитие численного анализа и методов реализации на ЭВМ. Так, для них разработан специальный (так называемый «мортарный») метод конечных элементов, позволяющий одновременно учитывать влияние как физических, так и геометрических особенностей на поведение решения [4].

В [1] для рассматриваемой задачи впервые была введена функция уровня (level set), определяющая движение межфазной границы во времени. Кроме этого, в [1] авторы отказались от согласования решения на границе между жидкостями путём внесения компенсирующей добавки в основные уравнения. Произведем сглаживание разрывных коэффициентов, предлагалось приближённо решать задачу уже без сингулярных особенностей на всей области методом конечных разностей.

При всех преимуществах метода, связанных с его относительной простотой, есть и существенные недостатки, к которым, прежде всего, необходимо отнести отсутствие теоретического обоснования. Ведь под сглаживанием разрывных коэффициентов имеется в виду перемешивание жидкостей в пограничном слое, а использование разностных схем подразумевает гладкость не только решения и коэффициентов, но и их производных. Подход, изложенный в данной заметке, качественно учитывает как физическую, так и математическую составляющие задачи.

В работе, в связи с разрывностью коэффициентов, предлагается: 1) разбивать исходную область Ω на подобласти Ω_i , так, чтобы на каждой из них коэффициенты были постоянными; 2) формулировать вариационную постановку задачи отдельно в подобластях, а согласование решения на линии раздела фаз производить с помощью условий слабой непрерывности (интегрально-функциональных соотношений). Таким образом, становится возможным проведение независимой дискретизации задачи в подобластях и, более того, при разбиении каждой из подобластей на конечные элементы не требуется

отслеживать совпадение узлов аппроксимации на общей границе, то есть допускается использование нестыкующихся сеток.

Употребление таких сеток при приближённом решении краевых задач привлекает исследователей с начала 90-х годов минувшего столетия. Предложенный (см. [4]) для решения уравнения Пуассона подход — мортарный метод конечных элементов, значительно расширяет область допустимых аппроксимаций.

Во-первых, применение не связанных друг с другом сеток позволяет:

- разнообразить формы сеточных ячеек;
- генерировать сетку в отдельной подобласти независимо от генерации в соседних подобластях;
- при переходе через границу между подобластями использовать сетки с большой разницей в величине шага, что бывает необходимо в случае сильных скачков коэффициентов задачи;
- строить легко параллелизуемые итерационные методы решения полученных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Во-вторых, в разных подобластях допустимы различные типы:

- конечных элементов; базисные функции могут зависеть как от формы ячейки сетки, так и от степени полиномов и учитываемых в конечном элементе степеней свободы;
- аппроксимаций — метода конечных элементов (МКЭ) и метода конечных объёмов;
- моделей с минимальными условиями согласования решений на общей границе.

Идея мортарного подхода базируется на использовании в обобщённой постановке задачи: 1) множителей Лагранжа в интегральном тождестве; 2) дополнительного уравнения — условия слабой непрерывности на границе между подобластями. Оценки скорости сходимости приближённого решения уравнения Пуассона к точному для задачи с прямолинейной и криволинейной границей получены в [4] и [5] соответственно. Для задачи Стокса в [6, 7] проведены (различными способами) теоретические исследования, а в [8] численно реализован только случай прямолинейной границы между фазами.

В настоящей работе построение приближённого решения задачи осуществлено с помощью неконформного МКЭ, основанного на том, что криволинейная межфазная граница интерполируется кусочно-линейным образом. Построен итерационный алгоритм решения СЛАУ с блочным переобуславливанием её матрицы, допускающий распараллеливание процесса вычисления. Результаты численных экспериментов согласуются с априорными оценками скорости сходимости [9]. Рассмотрен пример течения, у которого диффузия не преобладает, то есть имеет место случай малых (разрывных) коэффициентов вязкости μ . Для этого в приближённую постановку задачи вносится стабилизирующая добавка (grad-div) [10]. Следует отметить, что без подобного приёма удовлетворительный, с точки зрения сходимости, результат не достигается.

Предложенную в работе методику численного анализа можно применить и к другим многофазным задачам, например, к системам Стокса–Дарси с криволинейной границей.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2 = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T\}$ — выпуклая многоугольная область с границей $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$). В каждый момент времени t односвязные области Ω'_1 и Ω'_2 таковы, что $\bar{\Omega}'_1 \cup \bar{\Omega}'_2 = \bar{\Omega}' \equiv \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'_1 \cap \bar{\Omega}'_2 = \bar{\Gamma}$, где Γ — гладкая (незамкнутая, без самопересечений) кривая, концы которой принадлежат $\partial\Omega'$.

Задача течения двухфазной вязкой несжимаемой жидкости без перемешивания состоит в том, чтобы найти $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u^1(\mathbf{x}, t), u^2(\mathbf{x}, t))^T$ — вектор скоростей, и $p(\mathbf{x}, t)$ — кинематическое давление, удовлетворяющие следующей системе уравнений, граничных и начальных условий:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \text{div } \sigma(\mathbf{u}, p) + \rho \mathbf{g}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T], \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega^0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad \varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega^0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T], \quad (2)$$

где $\varphi_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ — заданные функции, \mathbf{n} — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\sigma(\mathbf{u}, p) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{u}, p)\}_{i,j=1,2} = \{2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \delta_{ij} p\}_{i,j=1,2}$ — тензор напряжений; $\varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1,2} = \left\{ 0,5 \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right) \right\}_{i,j=1,2}$ — тензор деформаций; \mathbf{g} — ускорение свободного падения. Положительные коэффициенты вязкости μ и плотности

ρ в (1) кусочно-постоянны: $\mu = \begin{cases} \mu_1, & \mathbf{x} \in \Omega'_1, \\ \mu_2, & \mathbf{x} \in \Omega'_2; \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} \rho_1, & \mathbf{x} \in \Omega'_1, \\ \rho_2, & \mathbf{x} \in \Omega'_2; \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Функция уровня $\varphi(\mathbf{x})$

в (2) определяет движение границы Γ_t во времени: $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) < 0, & \mathbf{x} \in \Omega'_1; \\ \varphi(\mathbf{x}) > 0, & \mathbf{x} \in \Omega'_2; \\ \varphi(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_t; \end{cases}$; Ω^0 — область Ω в момент времени $t = 0$. Здесь и далее векторные / тензорные величины представляются вектор-столбцами / матрицами своих компонент в декартовом ортонормированном базисе или составленном из его векторов диадном базисе соответственно.

Поскольку $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2$, следовательно $-\text{div } \sigma(\mathbf{u}, \bar{p}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -2 \text{div}(\mu \varepsilon(\mathbf{u})) + \rho((\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) + \nabla \bar{p}$, где $\nabla \bar{p} = \nabla p + \rho \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2$, \bar{p} — давление Бернулли [11].

Используя вышесказанное, перепишем систему уравнений (1):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \text{div } \sigma(\mathbf{u}, \bar{p}) + \rho((\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T], \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega^0.$$

Теперь определим условия согласования решения на линии раздела жидкостей Γ_t :

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad [\sigma(\mathbf{u}, \bar{p}) \cdot \mathbf{n}_1] = \sigma_0 k_0 \mathbf{n}_1 \quad \text{на } \Gamma_t, \quad (4)$$

\mathbf{n}_k — внешняя нормаль к Γ_t относительно Ω'_k . Через z_k обозначим функцию, которая совпадает в Ω'_k с определенной в Ω функцией z ($z_k = z|_{\Omega'_k}$), $k = 1, 2$. Тогда $[z]$ — скачок z на Γ_t : $[z] = z_1|_{\Gamma_t \cap \bar{\Omega}'_1} - z_2|_{\Gamma_t \cap \bar{\Omega}'_2}$, где $z_k|_{\Gamma_t \cap \bar{\Omega}'_k}$ — соответствующий след z_k на Γ_t ; σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения; $k_0 = \text{div}(\nabla \varphi / |\nabla \varphi|)|_{\varphi=0}$.

Пусть $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N = T$ — точки, а $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ — шаги разбиения отрезка $[0, T]$ ($i = 1, \dots, N$). Перейдем от системы (3), (4) и (2) к дискретной по времени задаче. Обозначая объекты, относящиеся к n -му временному слою, символом с крышкой, а к $(n+1)$ -му — символом без крышки, получаем:

$$\frac{\rho}{\theta \tau} \mathbf{u} - \text{div } \sigma(\mathbf{u}, \bar{p}) + \rho((\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) = \mathbf{F}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad [\sigma(\mathbf{u}, \bar{p}) \cdot \mathbf{n}_1] = \sigma_0 \hat{k} \mathbf{n}_1,$$

$$\varphi = \hat{\varphi} - \tau \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\varphi}, \quad \varphi^0 = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F} := -((1-\theta)(-\text{div } \sigma(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) + \hat{p}((\text{rot } \hat{\mathbf{u}}) \times \hat{\mathbf{u}})) + \rho(\mathbf{g} + \hat{\mathbf{u}}/\tau))/\theta$, где $\theta \in (0, 1]$.

Система (5), как и все записанные выше системы, не является линейной по \mathbf{u} , но её можно линеаризовать с помощью итерационной процедуры Пикарда (см. [12], главу 7):

$$\frac{\rho}{\theta \tau} \mathbf{u}^{(k)} - \text{div } \sigma(\mathbf{u}^{(k)}, \bar{p}^{(k)}) + \rho((\text{rot } \mathbf{u}^{(k-1)}) \times \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{F}, \quad \text{div } \mathbf{u}^{(k)} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{(k)}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad [\mathbf{u}^{(k)}] = \mathbf{0}, \quad [\sigma(\mathbf{u}^{(k)}, \bar{p}^{(k)}) \cdot \mathbf{n}_1] = \sigma_0 \hat{k} \mathbf{n}_1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Если в подобластях Ω'_i , существует единственное решение $(\mathbf{u}_i, \bar{p}_i)$, удовлетворяющее уравнениям системы (5) и условиям на $\partial\Omega$ и Γ_t , то последовательность $(\mathbf{u}_i^{(k)}, \bar{p}_i^{(k)})$ сходится к нему при $k \rightarrow \infty$ для любого начального $\mathbf{u}_i^{(0)}$.

Для того чтобы найти решение системы (5), необходимо уметь решать систему (6). Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{(k)}$, $P = \bar{p}^{(k)}$, $\mathbf{g} = \text{rot } \mathbf{u}^{(k-1)}$, $\mathbf{G} = \sigma_0 \hat{k} \mathbf{n}_1$, $\alpha = 1/(\theta \tau)$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти вектор скоростей $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2)^T$ и давление P , удовлетворяющие следующей системе уравнений, граничных и межфазных условий:

$$\begin{aligned} \alpha \rho \mathbf{w} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{w}, \mathbf{P}) + \rho(\mathbf{g} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ [\mathbf{w}] &= \mathbf{0}, \quad [\sigma(\mathbf{w}, \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}_1] = \mathbf{G} \quad \text{на } \Gamma, \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{F} = (F^1, F^2)^T$ и \mathbf{g} — заданные функции в области Ω , а \mathbf{G} — заданная функция на границе Γ .

3. Определение обобщенного решения

Определим функциональные пространства. Пусть

$$\mathbf{H}^m(\Omega_0) = \{ s \in L_2(\Omega_0) : D^\zeta s \in L_2(\Omega_0) \quad \forall \zeta, \quad |\zeta| \leq m \text{ — целое} \} \text{ с нормой } \|s\|_{m, \Omega_0} = \left(\sum_{|\zeta| \leq m} \|D^\zeta s\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \right)^{1/2},$$

где $D^\zeta s = \frac{\partial^{|\zeta|} s}{\partial x_1^{\zeta_1} \partial x_2^{\zeta_2}}$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta_i \geq 0$ (целые) и $|\zeta| = \zeta_1 + \zeta_2$; $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) = \{ \mathbf{r} \in L_2(\Gamma) : \exists s \in \mathbf{H}^1(\Omega_k), s|_\Gamma = \mathbf{r} \}$,

$$\|r\|_{1/2, \Gamma} = \inf_{s \in \mathbf{H}^1(\Omega_k), s|_\Gamma = r} \|s\|_{1, \Omega_k}; \quad \mathbf{H}_*^m(\Omega) = \{ z \in L_2(\Omega) : z_k = z|_{\Omega_k} \in \mathbf{H}^m(\Omega_k) \}, \quad \|z\|_{m, \Omega}^* = \left(\sum_{k=1}^2 \|z_k\|_{m, \Omega_k}^2 \right)^{1/2};$$

$$\mathbf{H}_*^m(\Omega) = \{ \mathbf{v} = (v^1, v^2)^T : v^l \in \mathbf{H}_*^m(\Omega) \}, \quad \|\mathbf{v}\|_{m, \Omega}^* = \left(\sum_{l=1}^2 (\|v^l\|_{m, \Omega}^*)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^2 \|\mathbf{v}_k\|_{m, \Omega_k}^2 \right)^{1/2};$$

$$\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{ \varphi \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) : \bar{\varphi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega_i) \} \quad \bar{\varphi} = \begin{cases} \varphi, & \text{на } \Gamma, \\ 0, & \text{на } \partial\Omega_i \setminus \Gamma, \end{cases} \quad \|\varphi\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{z \in \mathbf{H}^1(\Omega_i), z|_\Gamma = \varphi, z|_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} = 0} \|z\|_{1, \Omega_i};$$

$$\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{ \boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2)^T : \omega^l \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \}, \quad \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \left(\sum_{l=1}^2 \|\omega^l\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2};$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_*^1(\Omega) : [\mathbf{v}] \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \partial\Omega \}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}(\Omega)} = \left(\sum_{k=1}^2 \|\mathbf{v}_k\|_{1, \Omega_k}^2 + \|[\mathbf{v}]\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2};$$

$\mathbf{M}(\Gamma)$ — пространство, сопряженное к $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$, $\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{M}(\Gamma)} = \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu} d\Gamma}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}}$; $\mathbf{X}(\Omega) = \{ \mathbf{Q} : \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}|_{\Omega_k} \in L_2(\Omega_k) \}$,

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{X}(\Omega)} = \left(\sum_{k=1}^2 \|\mathbf{Q}_k\|_{0, \Omega_k}^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $F_k^j \in L_2(\Omega_k)$ и $\mathbf{g}_k \in L_2(\Omega_k)$ ($k, j = 1, 2$) являются липшицево непрерывными, $\mathbf{G} \in \mathbf{M}(\Gamma)$. Определим обобщенное решение системы (7) как решение следующей вариационной задачи: найти тройку $(\mathbf{w}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{V}(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega) \times \mathbf{M}(\Gamma)$ такую, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{P}) + d(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) &= l(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{w}, \mathbf{Q}) &= 0, \quad d(\mathbf{w}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

для любых $(\mathbf{v}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbf{V}(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega) \times \mathbf{M}(\Gamma)$, где линейная и билинейные формы имеют вид

$$l(\mathbf{v}) = \sum_{m=1}^2 l_m(\mathbf{v}), \quad l_1(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_1} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 d\mathbf{x} + \int_\Gamma \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1} d\Gamma, \quad l_2(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_2} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\mathbf{x};$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{P}) = \sum_{m=1}^2 b_m(\mathbf{v}, \mathbf{P}), \quad b_m(\mathbf{v}, \mathbf{P}) = - \int_{\Omega_m} \operatorname{div} \mathbf{v}_m \mathbf{P}_m d\mathbf{x};$$

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sum_{m=1}^2 a_m(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad a_m(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_m} (\alpha \rho_m \mathbf{w}_m \cdot \mathbf{v}_m + 2\mu_m \varepsilon(\mathbf{w}_m) : \varepsilon(\mathbf{v}_m) - \rho_m (\mathbf{w}_m \cdot (\mathbf{g}_m \times \mathbf{v}_m))) d\mathbf{x};$$

$$d(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{m=1}^2 d_m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}), \quad d_m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_\Gamma (-1)^{m+1} \chi \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_m|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_m} d\Gamma.$$

Для согласования решения на Γ в (8) использованы условия:

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{w}_1, \mathbf{P}_1)(n_1)^j - G^i) v^i d\Gamma = \int_{\Gamma} -(\sigma_{ij}(\mathbf{w}_2, \mathbf{P}_2)(n_2)^j) v^i d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \quad (9)$$

$$\int_{\Gamma} \chi (w_1 - w_2)^i v^i d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}(\Gamma),$$

где $(n_2)^j = -(n_1)^j$ и $(n_m)^j$ — j -я компонента внешней нормали \mathbf{n}_m к Γ относительно Ω_m ($m=1,2$); $\chi \in C^1(\Gamma)$ — функция, удовлетворяющая равенству $\chi = 1/\det(\gamma' \circ \gamma^{-1})$; γ — функция параметризации Γ такая, что $\gamma \in C^2(\hat{I}, R^2)$, $|y_1 - y_2| < C |\gamma(y_1) - \gamma(y_2)| \quad \forall y_1, y_2 \in \hat{I} = [a, b]$.

Для замыкания с помощью (9) полученных в Ω_1 и Ω_2 уравнений в (8) введен вспомогательный вектор $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)^T$, определяемый из соотношения

$$\int_{\Gamma} \lambda^i z^i d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{\chi} (\sigma_{ij}(\mathbf{w}_2, \mathbf{P}_2)(n_2)^j) z^i d\Gamma \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma). \quad (10)$$

4. Схема метода конечных элементов

Выполним триангуляцию Ξ_h области Ω . Для каждой Ω_j имеем квазиравномерное (см. [13]) разбиение Ω_{jh} на треугольники со сторонами порядка h_j . Треугольники обозначим через K и назовем конечными элементами. Их совокупность обозначим через $\Xi_h^{(j)}$. Разбиение $\Omega_{jh} = \bigcup_{K \in \Xi_h^{(j)}} K$ аппроксимирует подобласть Ω_j так, что $\partial\Omega_{jh}$ является кусочно-линейной интерполяцией $\partial\Omega_j$. Концы Γ входят в множество узлов интерполяции. Таким образом, для Γ построим две кусочно-линейные интерполяции Γ_{1h} и Γ_{2h} , которые являются частями $\partial\Omega_{1h}$ и $\partial\Omega_{2h}$ соответственно. Так как Γ_{jh} кусочно-линейны, то параметризуем их с помощью непрерывных кусочно-линейных функций $\gamma_h^i: \hat{I} \rightarrow R^2$, $\hat{I} = [a, b]$ и при этом $\gamma_h^1(a) = \gamma_h^2(a)$, $\gamma_h^1(b) = \gamma_h^2(b)$.

В качестве узлов аппроксимации для компонент вектора скоростей выберем вершины и середины сторон K , а в качестве узлов аппроксимации для функции давления — вершины K . Множества вершин и середин сторон на K , принадлежащих Γ_{1h} , обозначим через N и L соответственно. Определим множества $\hat{N} = \{y \in \hat{I} : \gamma_h^1(y) = r; r \in N \text{ на } \Gamma_h \equiv \Gamma_{1h}\}$ и $\hat{L} = \{y \in \hat{I} : \gamma_h^1(y) = r; r \in L \text{ на } \Gamma_h\}$. Поскольку $\Xi_h^{(1)}$ — регулярная по построению, а параметризация γ кривой Γ удовлетворяет свойству инъективности, то узлы \hat{N} образуют регулярную сетку на \hat{I} . Отметим, что подмножества узлов аппроксимаций Ω_{1h} и Ω_{2h} на Γ не совпадают, то есть сетки не стыкуются на Γ . Обозначим через Ω_h разбиение Ω :

$$\Omega_h = \Omega_{1h} \cup \Omega_{2h} = \left(\bigcup_{K \in \Xi_h^{(1)}} K \right) \cup \left(\bigcup_{K \in \Xi_h^{(2)}} K \right) = \bigcup_{K \in \Xi_h} K. \text{ Параметр } h \text{ таков, что } h \cong h_1 \cong h_2.$$

Введём конечно-элементные пространства на Ω_{jh} : для компонент вектора скоростей $V_h^{(j)}(\Omega_{jh})$ подпространство непрерывных, квадратичных на K , конечно-элементных функций из $H^1(\Omega_{jh})$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega \cap \partial\Omega_j$; для давления: $X_h^{(j)}(\Omega_{jh})$ подпространство непрерывных, линейных на K , конечно-элементных функций из $L_2(\Omega_{jh})$. Построенный метод есть метод Тэйлора–Худа первого порядка [14].

Обозначим через \hat{M}_h пространство лагранжевых множителей (мортарных функций) на \hat{I} , построенное на сетке с узлами из \hat{N} такое, что $\forall \hat{w}_h \in \hat{M}_h$; выполнены условия: \hat{w}_h — непрерывная функция пространства L_2 ; \hat{w}_h квадратична на каждом внутреннем отрезке и линейна на концевых отрезках разбиения \hat{I} (вспомогательный узел на внутреннем элементе разбиения \hat{I} совпадает с узлом из \hat{L}). Следовательно, на Γ_h зададим пространство M_h такое, что $M_h = \hat{M}_h \circ \gamma^{-1}$. При этом сеточное решение $\lambda_{jh}^m \in M_h$ ($m, j=1,2$) ищем естественным образом — в виде линейной комбинации произведений коэффициентов на базисные функции M_h . Полагаем $\lambda_h^m = \lambda_{1h}^m = -\lambda_{2h}^m$, где $\lambda_h = (\lambda_h^1, \lambda_h^2)^T$ — сеточный аналог вектора λ , определенного в (10).

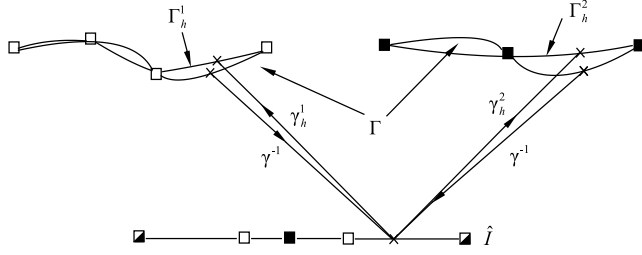


Рис. 1. Определение дискретного скачка функции; \blacksquare – общий узел и первой (\square), и второй (\blacksquare) сеток

Определим конечно-элементные пространства на Ω_h и Γ_h :

$$\mathbf{V}_h(\Omega_h) = \{ \mathbf{v}_h : \mathbf{v}_{lh} \in \mathbf{V}_h^{(l)}(\Omega_{lh}) \} \quad \text{с нормой}$$

$$\| \mathbf{v}_h \|_{\mathbf{V}_h} = \left(\sum_{l=1}^2 \| \mathbf{v}_{lh} \|_{1, \Omega_{lh}}^2 + h^{-1} \| [\mathbf{v}_h]_h \|_{0, \Gamma}^2 \right)^{1/2},$$

$[\mathbf{v}_h]_h$ — дискретный скачок \mathbf{v}_h на Γ :

$$[\mathbf{v}_h]_h = \mathbf{v}_{1h} \circ \gamma_h^1 \circ \gamma^{-1} - \mathbf{v}_{2h} \circ \gamma_h^2 \circ \gamma^{-1} \quad (\text{см. Рис. 1});$$

$$\mathbf{V}_h(\Omega_h) = \{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2)^T : \mathbf{v}_h^j \in \mathbf{V}_h(\Omega_h) \},$$

$$\| \mathbf{v}_h \|_{\mathbf{V}_h} = \left(\sum_{j=1}^2 \left(\sum_{m=1}^2 \| \mathbf{v}_{mh}^j \|_{1, \Omega_{mh}}^2 + h^{-1} \| [\mathbf{v}_h^j]_h \|_{0, \Gamma}^2 \right) \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^2 \| \mathbf{v}_{mh} \|_{1, \Omega_{mh}}^2 + h^{-1} \| [\mathbf{v}_h]_h \|_{0, \Gamma}^2 \right)^{1/2}; \quad \mathbf{X}_h(\Omega_h) = \{ \mathbf{Q}_h : \mathbf{Q}_{lh} \in \mathbf{X}_h^{(l)}(\Omega_{lh}) \} \quad \text{с нормой} \quad \| \mathbf{Q}_h \|_{\mathbf{X}_h} = \left(\sum_{l=1}^2 \| \mathbf{Q}_{lh} \|_{0, \Omega_{lh}}^2 \right)^{1/2};$$

$$\mathbf{M}_h(\Gamma_h) = \{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2)^T : \mathbf{v}_h^j \in \mathbf{M}_h(\Gamma_h) \} \quad \text{с нормой} \quad \| \mathbf{v}_h \|_{\mathbf{M}_h} = h^{1/2} \| \mathbf{v}_h \|_{0, \Gamma}.$$

Определение. Приближенным решением задачи (7), согласно МКЭ, назовем тройку $(\mathbf{w}_h, \mathbf{P}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$, удовлетворяющую — для любых $(\mathbf{v}_h, \mathbf{Q}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$ — системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{P}_h) + \mathbf{d}_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) &= \mathbf{l}_h(\mathbf{v}_h), \\ \mathbf{b}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{Q}_h) &= 0, \quad \mathbf{d}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{l}_h(\mathbf{v}_h) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{l}_{kh}(\mathbf{v}_h), \quad \mathbf{l}_{1h}(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega_{1h}} \tilde{\mathbf{F}}_1 \cdot \mathbf{v}_{1h} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_{1h} d\Gamma,$$

$$\mathbf{l}_{2h}(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega_{2h}} \tilde{\mathbf{F}}_2 \cdot \mathbf{v}_{2h} d\mathbf{x},$$

$$\mathbf{d}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{d}_{kh}(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Gamma} \chi [\mathbf{w}_h]_h \cdot \mathbf{v}_h d\Gamma,$$

$$\mathbf{a}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{a}_{kh}(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h),$$

$$\mathbf{a}_{kh}(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \Xi_h^{(k)}} \int_K (2\mu_k \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_{kh}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{kh}) - \rho_k (\mathbf{w}_{kh} \cdot (\tilde{\mathbf{g}}_k \times \mathbf{v}_{kh})) + \varepsilon_K \operatorname{div} \mathbf{w}_{kh} \operatorname{div} \mathbf{v}_{kh} + \alpha \rho_k \mathbf{w}_{kh} \cdot \mathbf{v}_{kh}) dK,$$

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{Q}_h) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{b}_{kh}(\mathbf{w}_h, \mathbf{Q}_h), \quad \mathbf{b}_{kh}(\mathbf{w}_h, \mathbf{Q}_h) = - \sum_{K \in \Xi_h^{(k)}} \int_K \operatorname{div} \mathbf{w}_{kh} \mathbf{Q}_{kh} dK,$$

где $\tilde{\mathbf{g}}_k, \tilde{\mathbf{F}}_k$ — липшицевы непрерывные функции на $\Omega_k \cup \Omega_{kh}$ такие, что $\tilde{\mathbf{g}}_k = \mathbf{g}_k, \tilde{\mathbf{F}}_k = \mathbf{F}_k$ в $\Omega_k \cap \Omega_{kh}$ и $\| \tilde{\mathbf{g}}_k \|_{W_x^1(\Omega_k \cup \Omega_{kh})} \leq C_{\tilde{\mathbf{g}}_k}, \| \tilde{\mathbf{F}}_k^j \|_{W_x^1(\Omega_k \cup \Omega_{kh})} \leq C_{\tilde{\mathbf{F}}_k^j} (k, j = 1, 2)$.

Комментарий. В билинейную форму $\mathbf{a}_{kh}(\cdot, \cdot)$ в (11) внесена добавка $\sum_{K \in \Xi_h^{(k)}} \int_K \varepsilon_K \operatorname{div} \mathbf{w}_{kh} \operatorname{div} \mathbf{v}_{kh} dK$, так как известно (см. [10]), что при малых значениях вязкости μ_k и $\varepsilon_K \equiv 0$ нет удовлетворительного, с точки зрения сходимости, результата.

Конечно-элементная задача (11) порождает СЛАУ, имеющую седловую матрицу

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1h} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2h} & \mathbf{D}_{2h} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1h} \\ \mathbf{w}_{2h} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1h} \\ \mathbf{P}_{2h} \\ \boldsymbol{\lambda}_h \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1h} \\ \mathbf{F}_{2h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Отметим, что \mathbf{A} — положительно определенная квадратная матрица, а \mathbf{C} — прямоугольная (некватратная) матрица. Ненулевые множители в $\mathbf{D}_{kh} (k = 1, 2)$ присутствуют только в тех уравнениях системы, которые относятся к узлам, лежащим на Γ .

5. Построение итерационного процесса

Для нахождения решения системы (12), (13) построим сходящийся итерационный процесс (см. [15]) с переобуславливанием матрицы системы. Для этого

- 1) выберем произвольные $\boldsymbol{\eta}^0$ и $\boldsymbol{\zeta}^0$;
- 2) проведём итерации $k = 0, 1, 2, \dots$, далее 3) и 4), пока не выполнено условие остановки;
- 3) найдём вектор $\boldsymbol{\zeta}^{k+1}$: $\boldsymbol{\zeta}^{k+1} = \boldsymbol{\zeta}^k + \alpha_1 \hat{\mathbf{A}}^{-1}(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}^k - \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}^k)$;
- 4) вычислим вектор $\boldsymbol{\eta}^{k+1}$: $\boldsymbol{\eta}^{k+1} = \boldsymbol{\eta}^k + \alpha_2 \hat{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbf{C}^T \boldsymbol{\zeta}^{k+1} - \mathbf{z})$.

Здесь: $\boldsymbol{\zeta}^k, \boldsymbol{\eta}^k$ и $\boldsymbol{\zeta}^{k+1}, \boldsymbol{\eta}^{k+1}$ — значения векторов на k -й и $(k+1)$ -й итерациях соответственно; α_1, α_2 — параметры процессов; матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{S}}$ — переобуславливающие матрицы для матриц \mathbf{A} и $\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$ соответственно.

На каждой итерации вычислим вектор невязки \mathbf{r}^n и вектор $\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}^n$. Вектор невязки \mathbf{r}^n для абстрактного итерационного процесса $\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \beta \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}^n$ решения системы $\mathbf{K} \mathbf{q} = \boldsymbol{\chi}$ определим равенством $\mathbf{r}^n = \boldsymbol{\chi} - \mathbf{K} \mathbf{q}^n$. Для нахождения \mathbf{q}^{n+1} используем разложение вектора $\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}^n$ в m -мерном подпространстве Крылова с помощью обобщенного метода минимальных невязок (GMRES(m)-метод) [16, 17].

Для построения матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ возьмём неполное разложение матрицы \mathbf{A} на треугольные множители $\mathbf{PLU}(0)$ [17], то есть $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{L}}$ и $\hat{\mathbf{U}}$ — верхняя и нижняя треугольные матрицы соответственно.

Матрица \mathbf{A} — блочно-диагональная, следовательно, и $\hat{\mathbf{A}}$ имеет вид $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{1h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{1h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{U}}_{2h} \end{bmatrix}$. Процесс

получения матрицы $\hat{\mathbf{S}}$ и решение системы с ней сложнее.

Рассмотрим вспомогательную матрицу $\tilde{\mathbf{S}}$ к $\hat{\mathbf{S}}$: $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{C} = ((\hat{\mathbf{U}}^T)^{-1} \mathbf{C})^T \cdot (\hat{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{Y}}^T \cdot \tilde{\mathbf{X}}$. Алгоритм нахождения матриц $\tilde{\mathbf{Y}}^T$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ основан на Row-oriented Level- \bar{p} процедуре [18] с уровнем заполнения \bar{p} . В работе [18] показано, что если при построении переобуславливателя к \mathbf{A} выбран алгоритм с уровнем заполнения \bar{q} (в частности $\bar{q} = 0$ — $\mathbf{PLU}(0)$), то при создании переобуславливателя к \mathbf{S} необходимо выбирать алгоритм с уровнем заполнения, равным $2\bar{q} + 1$. Отметим, что матрица $\tilde{\mathbf{X}}$ ($\tilde{\mathbf{Y}}^T$) не является квадратной. В связи с этим решение системы с матрицей $\tilde{\mathbf{S}}$ невозможно в отличие от умножения её на вектор.

Пусть для решения $\mathbf{x}' = \mathbf{H} \mathbf{y}'$ получена переобуславливающая матрица $\tilde{\mathbf{H}}$, но она обладает плохим свойством: решение системы с ней (нахождение обратной — $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}$) не реализуемо. Тогда следует найти такую переобуславливающую матрицу к \mathbf{H} — $\hat{\mathbf{H}}$, для которой $\hat{\mathbf{H}}$ будет вспомогательной с той особенностью, что ее можно легко умножить на вектор. Пусть требуется найти \mathbf{r}^* — решение системы $\hat{\mathbf{H}} \mathbf{r}^* = \bar{\mathbf{r}}$, тогда внутренняя итерационная процедура будет следующей: 1) $\boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{0}$; 2) $\boldsymbol{\omega}^l = \boldsymbol{\omega}^{l-1} + \kappa^l (\bar{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{H}} \boldsymbol{\omega}^{l-1})$ ($l = 1, \dots, L$); 3) $\mathbf{r}^* = \boldsymbol{\omega}^L$, где κ^l — число.

6. Результаты численных экспериментов на модельных задачах

Пусть $\bar{\Omega} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Межфазную границу Γ зададим параметрически: $\begin{cases} x = a \sin r(s), \\ y = s, \end{cases}$ a — число; $r(s)$ — известная функция, $g = b \cdot \text{rot } \mathbf{w}$. Обозначим через $N_{x_1}^{(j)}$ и $N_{x_2}^{(j)}$

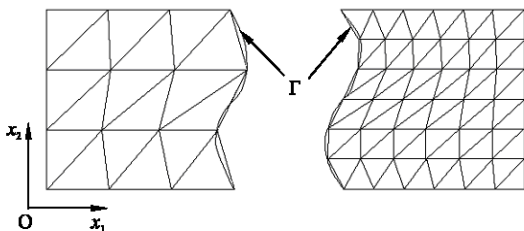


Рис. 2. Триангуляции $\Xi_n^{(j)}$ подобластей Ω_j ($j = 1, 2$)

количество отрезков разбиения Ω_j по оси Ox_1 и Ox_2 соответственно. Шаг $h_{x_2}^{(j)}$ по направлению Ox_2 равен $2\pi / N_{x_2}^{(j)}$. Для каждого $(x_2)_k^{(j)} = k \cdot h_{x_2}^{(j)}$ ($k = 0, \dots, N_{x_2}^{(j)}$), выберем свой равномерный шаг разбиения Ω_j по направлению Ox_1 . Параметр h примем равным $h_{x_1}^{(j)}$. Рассмотрим случай, когда $N_{x_2}^{(j)} = 2N_{x_1}^{(j)}$ и $N_{x_2}^{(2)} = 2N_{x_2}^{(1)}$ (см. Рис. 2).

Известно [19], что любую $z_i \in H^k(\Omega_i)$ можно продолжить на R^2 с сохранением класса H^k , то есть $\exists E_i^k : H^k(\Omega_i) \rightarrow H^k(R^2)$, $E_i^k z_i = z_i$ в Ω_i , $\|E_i^k z_i\|_{k,R^2} < C \|z_i\|_{k,\Omega_i}$ ($i, k = 1, 2$).

Пусть $z \in H_*^k(\Omega)$. Оператор E^k действует на функцию z ($E^k z$), если на каждое сужение $z_i \in H^k(\Omega_i)$ действует оператор E_i^k так, как определено выше. Если $q \in H_*^1(\Omega)$, $q_h \in X_h$ и $v \in H_*^2(\Omega)$, $v_h \in V_h$, то $\|E^1 q - q_h\|_{X_h}^2 := \|E_1^1 q_1 - q_{1h}\|_{0,\Omega_{1h}}^2 + \|E_2^1 q_2 - q_{2h}\|_{0,\Omega_{2h}}^2$ и $\|E^2 v - v_h\|_{V_h}^2 := \|E_1^2 v_1 - v_{1h}\|_{1,\Omega_{1h}}^2 + \|E_2^2 v_2 - v_{2h}\|_{1,\Omega_{2h}}^2 + h^{-1} \| [E^2 v - v_h] \|_{0,\Gamma}^2$.

Рассмотрим два примера в качестве тестовых для задачи (7). В первом примере вектор w непрерывен на Γ , а функция P и частные производные w терпят разрыв. Такая ситуация имеет место на практике в силу влияния поверхностного натяжения жидкостей. Во втором примере жидкости характеризуются малыми значениями μ . Выбор оптимального параметра $\epsilon_K > 0$ при малых μ является одним из направлений исследований, которым автор намеревается заняться в дальнейшем.

Пример 1. В качестве решения задачи (7) выберем

$$w^1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1,5a(x_1 - a \sin(1,5(x_2 - \pi))) \cos(1,5(x_2 - \pi)), & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1,5ca(x_1 - a \sin(1,5(x_2 - \pi))) \cos(1,5(x_2 - \pi)), & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad w^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1 - a \sin(1,5(x_2 - \pi)), & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ c(x_1 - a \sin(1,5(x_2 - \pi))), & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$P(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sin(x_1) \cdot \sin(x_2), & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ c \sin(x_1) \cdot \sin(x_2), & \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Пусть $\mu = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 5, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 3, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad b = 0,995, \quad c = 1/3, \quad \alpha = 1, \quad r(s) = 1,5(s - \pi), \quad \epsilon_K = 0$ на каждом

$K \in \Xi_h$. Приведём величины погрешности вычислений в различных нормах и при разных значениях параметра a — таблица 1 и рисунок 3.

Таблица 1. Величины погрешности вычислений в Примере 1

	$N_{x_1}^{(1)} \backslash a$	48	64	80	96
$\ E^2 w - w_h\ _{V_h}$	0,2	0,002498	0,001879	0,001503	0,001250
$\ E^1 P - P_h\ _{X_h}$	0,2	0,002726	0,002052	0,001645	0,001363
$\ E^2 w - w_h\ _{V_h}$	0,4	0,003977	0,003001	0,002394	0,001990
$\ E^1 P - P_h\ _{X_h}$	0,4	0,002899	0,002179	0,001750	0,001447

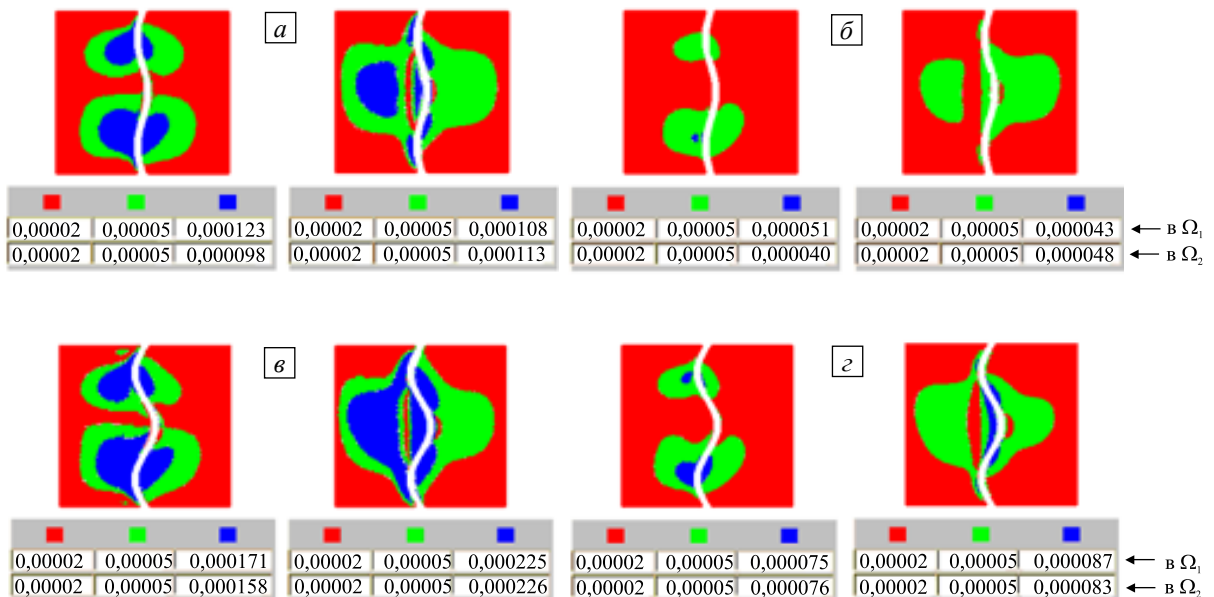


Рис. 3. Погрешности вычисления компонент w в норме $C(\bar{\Omega}_h)$ при $a = 0,2$ ($a, б$) и $a = 0,4$ ($в, г$); $N_{x_1}^{(1)} = 48$ ($a, в$); $N_{x_1}^{(1)} = 96$ ($б, г$)

Пример 2. В качестве решения задачи (7) выберем $w^1(\mathbf{x}) = -\cos^2(1,5x_1) \cdot \sin(3x_2)$, $w^2(\mathbf{x}) = \sin(3x_1) \cdot \cos^2(1,5x_2)$, $P(\mathbf{x}) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$. Пусть $\rho = \begin{cases} 0,5, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases}$ $\mu = \begin{cases} 0,0005, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0,001, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases}$ $b = 0,99$, $\alpha = 1$, $r(s) = s$, $\varepsilon_K = 0,1$ на каждом $K \in \mathcal{E}_h$. Приведём величины погрешности вычислений в различных нормах и при разных значениях параметра a — таблица 2 и рисунок 4.

Таблица 2. Величины погрешности вычислений в Примере 2

	a	$N_{x_1}^{(1)}$				
		64	80	96	128	160
$\ E^2 \mathbf{w} - \mathbf{w}_h\ _{V_h}$	0,2	0,075313	0,060221	0,050134	0,037727	0,030081
$\ E^1 P - P_h\ _{X_h}$	0,2	0,004099	0,003261	0,002718	0,002041	0,001625
$\ E^2 \mathbf{w} - \mathbf{w}_h\ _{V_h}$	0,4	0,104924	0,083720	0,069732	0,052403	0,041846
$\ E^1 P - P_h\ _{X_h}$	0,4	0,003555	0,002839	0,002361	0,001772	0,001415

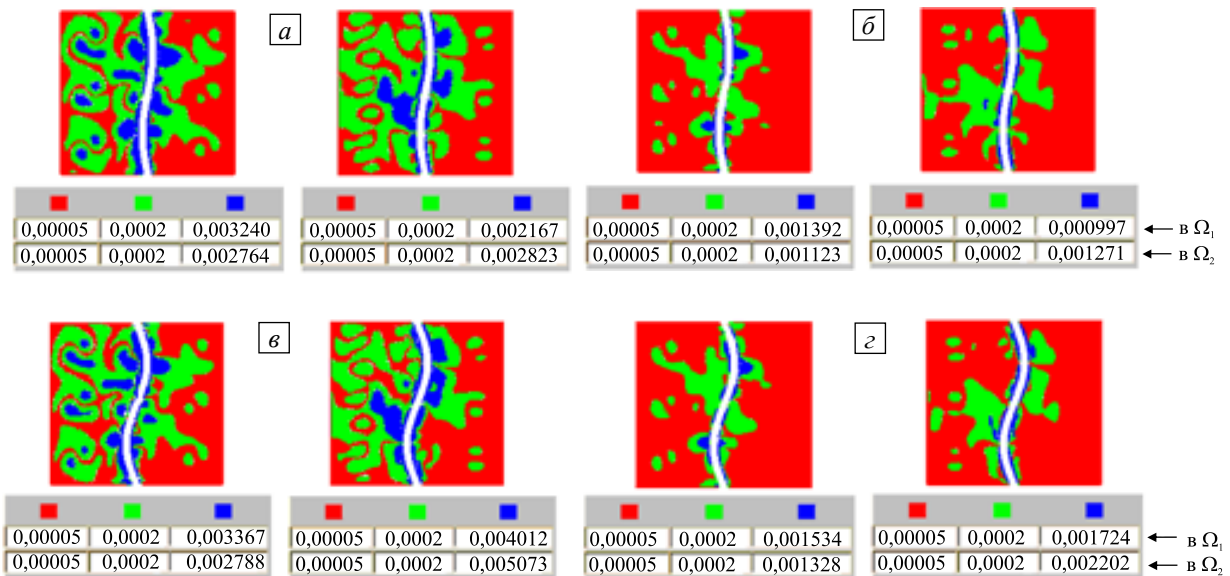


Рис. 4. Погрешности вычисления компонент w в норме $C(\bar{\Omega}_h)$ при $a = 0,2$ (a, б) и $a = 0,4$ (в, з); $N_{x_1}^{(1)} = 48$ (a, в); $N_{x_1}^{(1)} = 96$ (б, з)

Сравнение показанных здесь погрешностей численных экспериментов с теоретическими результатами сходимости приближённого решения к точному решению задачи (7), полученными автором в [9], показывает их хорошее согласование по порядку величин.

7. Заключение

В работе построен приближённый метод решения и проведён численный анализ математической модели, полученной в результате дискретизации по времени и линеаризации задачи течения двухфазной вязкой жидкости без перемешивания с изменяющейся во времени межфазной границей в формулировке уравнений Навье–Стокса, учитывающих несжимаемость. Результаты численных экспериментов согласуются с априорными оценками работы [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00060-а, 11-01-98502-Р-восток_а и 12-01-31018-мол_а).

Литература

1. Chang Y.C., Hou T.Y., Merrimam B., Osher S. A level set formulation of Eulerian interface captured methods for incompressible fluid flows // J. Comput. Phys. – 1996. – V. 124. – P. 449-464. DOI
2. Рукавишников А.В. Обобщенная постановка задачи течения двухфазной жидкости с непрерывно изменяющимся интерфейсом // Матем. моделирование. – 2008. – Т. 20, № 3. – С. 3-8.

3. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. – 605 p.
4. *Bernardi C., Maday Y., Patera A.* A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Collège de France Seminar, V. XI / Ed. H. Brezis et al. – Paris: Pitman, 1994. – P. 13-51.
5. *Flemisch B., Melenk J.M., Wohlmuth B.I.* Mortar methods with curved interfaces // Appl. Numer. Math. – 2005. – V. 54, N. 3-4. – P. 339-361. [DOI](#)
6. *Belgacem F.B.* The mixed mortar finite element method for the incompressible Stokes problem: convergence analysis // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – V. 37, N. 4. – P. 1085-1100. [DOI](#)
7. *Рукавишников А.В., Рукавишников В.А.* Неконформный метод конечных элементов для задачи Стокса с разрывным коэффициентом // Сиб. журн. индустр. матем. – 2007. – Т. 10, № 4. – С. 104-117.
8. *Рукавишников А.В.* О построении численного метода для задачи Стокса с разрывным коэффициентом вязкости // ЖВТ. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 110-123.
9. *Рукавишников А.В.* Неконформный метод конечных элементов для одной задачи гидродинамики с криволинейным интерфейсом // ЖВММФ. – 2012. – Т. 52, № 6. – С. 1072-1094.
10. *Olshanskii M.A., Reusken A.* Grad-div stabilization for Stokes equations // Math. Comput. – 2004. – V. 73, N. 248. – P. 1699-1718. [DOI](#)
11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 568 с.
12. *Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.* Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics. – Oxford, UK: Oxford University Press, 2005. – 413 p.
13. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
14. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 368 p.
15. *Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.* Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1997. – V. 34, N. 3. – P. 1072-1092. [DOI](#)
16. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. – New Jersey: PWS Pub. Co., 1996. – 450 p.
17. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000. – 345 с.
18. *Little L., Saad Y., Smoch L.* Block LU preconditioners for symmetric and nonsymmetric saddle point problems // SIAM J. Sci. Comput. – 2003. – V. 25, N. 2. – P. 729-748. [DOI](#)
19. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. – Boston: Pitman, 1985. – 410 p.

Поступила в редакцию 11.04.13; опубликована в электронном виде 15.10.13

Bibliography

1. *Chang Y.C., Hou T.Y., Merriman B., Osher S.* A level set formulation of Eulerian interface captured methods for incompressible fluid flows // *J. Comput. Phys.* – 1996. – V. 124. – P. 449-464. [DOI](#)
2. *Rukavishnikov A.V.* Obobshchennaya postanovka zadachi techeniya dvukhfaznoi zhidkosti s nepreryvno izmenyayushchimsya interfeisom // *Matem. modelirovanie.* – 2008. – T. 20, № 3. – S. 3-8.
3. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. – 605 p.
4. *Bernardi C., Maday Y., Patera A.* A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method // *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Collège de France Seminar, V. XI / Ed. H. Brezis et al.* – Paris: Pitman, 1994. – P. 13-51.
5. *Flemisch B., Melenk J.M., Wohlmuth B.I.* Mortar methods with curved interfaces // *Appl. Numer. Math.* – 2005. – V. 54, N. 3-4. – P. 339-361. [DOI](#)
6. *Ben Belgacem F.* The mixed mortar finite element method for the incompressible Stokes problem: convergence analysis // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2000. – V. 37, N. 4. – P. 1085-1100. [DOI](#)
7. *Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A.* Nekonformnyi metod konechnykh elementov dlya zadachi Stoksa s razryvnym koeffitsientom // *Sib. zhurn. industr. matem.* – 2007. – T. 10, № 4. – S. 104-117.
8. *Rukavishnikov A.V.* O postroenii chislennogo metoda dlya zadachi Stoksa s razryvnym koeffitsientom vyazkosti // *ZhVT.* – 2009. – T. 14, № 2. – S. 110-123.
9. *Rukavishnikov A.V.* Nekonformnyi metod konechnykh elementov dlya odnoi zadachi gidrodinamiki s krivolineinym interfeisom // *ZhVMMF.* – 2012. – T. 52, № 6. – S. 1072-1094.
10. *Olshanskii M.A., Reusken A.* Grad-div stabilization for Stokes equations // *Math. Comput.* – 2004. – V. 73, N. 248. – P. 1699-1718. [DOI](#)
11. *Sedov L.I.* Mekhanika sploshnoi sredy. – M.: Nauka, 1970. – T. 2. – 568 s.
12. *Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.* Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics. – Oxford, UK: Oxford University Press, 2005. – 413 p.
13. *S'yarle F.* Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach. – M.: Mir, 1980. – 512 s.
14. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 368 p.
15. *Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.* Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1997. – V. 34, N. 3. – P. 1072-1092. [DOI](#)
16. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. – New Jersey: PWS Pub. Co., 1996. – 450 p.
17. *Il'in V.P.* Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob'emov dlya ellipticheskikh uravnenii. – Novosibirsk: Izd-vo IM SO RAN, 2000. – 345 s.
18. *Little L., Saad Y., Smoch L.* Block LU preconditioners for symmetric and nonsymmetric saddle point problems // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2003. – V. 25, N. 2. – P. 729-748. [DOI](#)
19. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. – Boston: Pitman, 1985. – 410 p.