

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38

УДК 531.383:532.516

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ МЕЖДУ НИМИ, С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ

А.Ю. Блинкова¹, Ю.А. Блинков², Л.И. Могилевич³

¹*Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия*

²*Саратовский государственный национальный исследовательский университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

³*Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал), Саратов, Россия*

Получены уравнения, описывающие волны деформации с помощью асимптотических методов решения связанной задачи гидроупругости, включающей уравнения динамики двух соосных геометрически и физически нелинейных упругих оболочек с учетом рассеяния энергии и уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между цилиндрическими оболочками, с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрены два случая свойств материала оболочек: с конструкционным демпфированием и с вязкоупругим поведением. Показано, что в обоих случаях получаются одни и те же уравнения, обобщающие известное модифицированное уравнение Кортвега-де Вриза–Бюргерса. Вследствие того, что радиус срединной поверхности оболочки значительно меньше длины волны деформации, в уравнениях динамики вязкой несжимаемой жидкости сделан асимптотический переход к классическому уравнению гидродинамической теории смазки.

Наличие жидкости между соосными оболочками приводит к возникновению волны деформации не только во внешней оболочке, но и во внутренней, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю. В результате во внешней и внутренней оболочках устанавливается волна деформации постоянной амплитуды и скорости распространения с локальным всплеском на переднем фронте, что соответствует решению типа «уединенной волны», которое не описывается аналитически. Исследуемую конструкцию можно толковать как трехслойный пакет, заполнителем которого является жидкость.

Ключевые слова: нелинейные волны, соосные цилиндрические оболочки, рассеяние энергии, вязкая жидкость

NON-LINEAR WAVES IN COAXIAL CYLINDER SHELLS CONTAINING VISCOUS LIQUID INSIDE WITH CONSIDERATION FOR ENERGY DISPERSION

A.Yu. Blinkova¹, Yu.A. Blinkov² and L.I. Mogilevich³

¹*Saratov State Technical University named after Gagarin Yu.A., Saratov, Russia*

²*Saratov State National Research University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russia*

³*Moscow Railway University (Povolzhsky Branch), Saratov, Russia*

The equations which describe the strain waves by means of asymptotic methods of solving the hydro-elastic problem that includes the dynamic equations of two coaxial geometrically and physically nonlinear elastic shells are obtained. Energy dissipation and equations for an incompressible viscous fluid between cylindrical shells with appropriate boundary conditions are taken into account.

Two cases are considered: one with structural damping in the material of shells, and the other with the viscoelastic material of the shell. Both cases lead to the same equations, which generalize the well-known modified Korteweg-de Vries–Burgers equations by introducing the term describing the liquid impact between the shells. The radius of the medial surface of the shell is significantly smaller than the wavelength of deformation, and therefore the asymptotic transition to the classical equation of hydrodynamic lubrication theory is made in the equations of viscous incompressible fluid.

The presence of fluid between the co-axial shells gives rise to deformation waves not only in the outer shell but also in the inner one, where the initial deformation moment is equal to zero. Hence, the deformation wave of stable amplitude and velocity takes place. This fact is in accordance with the solitary wave solution, which cannot be described analytically. The construction under consideration can be characterized as a three layered packet, with liquid as a filler.

Key words: non-linear waves, coaxial cylinder shells, energy dispersion, incompressible liquid

Волновые процессы в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в работах [1–4], а при взаимодействии оболочки с вязкой жидкостью, но без учета волновых явлений — в [5–7]. Исследование волновых процессов в соосных вязкоупругих оболочках с конструкционным демпфированием при наличии вязкой жидкости, заполняющей пространство между оболочками, отсутствует.

Цель данной работы — получение уравнений, описывающих динамику системы соосных цилиндрических оболочек с учётом вязкой несжимаемой жидкости между оболочками с помощью асимптотических методов, и решение связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость.

В случае осесимметричного течения уравнения движения и уравнения неразрывности вязкой несжимаемой жидкости записываются в цилиндрических координатах r, ϑ, x (ось x совпадает с осью симметрии оболочек) в виде [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости, которые при использовании для описания движения сплошной среды подхода Лагранжа выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r} &= -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \\ V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r} &= \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_i - W^{(i)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь: t — время; V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; p — давление; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; индекс (i) указывает на принадлежность величины внешней ($i=1$) или внутренней ($i=2$) оболочкам; $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочки в направлении оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; R_1 — внутренний радиус внешней оболочки; R_2 — внешний радиус внутренней оболочки ($R_1 = R_2 + \delta$); δ — толщина слоя жидкости в кольцевом поперечном сечении трубы.

Запишем уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях в предположении, что оболочка деформируется согласно модели Кирхгофа–Лява, а ее материал нелинейно-упругий с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [9]:

$$\sigma_i = E^{(i)} e_i - m^{(i)} e_i^3, \tag{3}$$

где $E^{(i)}$ — модуль Юнга, $m^{(i)}$ — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Кроме этого учтем конструкционное демпфирование материала оболочек, характеризуемое величиной, пропорциональной $\partial W^{(i)} / \partial t$, добавляемой к даламберовой силе инерции [10]

$$\varepsilon_g^{(i)} \frac{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \sqrt{\frac{E^{(i)}}{\rho_0^{(i)} (1 - \mu_0^{(i)2})}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon_g^{(i)}$ — коэффициент демпфирования; $\rho_0^{(i)}$ — плотность материала оболочки; $\mu_0^{(i)}$ — коэффициент Пуассона; $R^{(i)}$ — радиус срединной поверхности оболочки; $h_0^{(i)}$ — толщина оболочки ($h_0^{(1)} / 2 = R^{(1)} - R_1$, $h_0^{(2)} / 2 = R_2 - R^{(2)}$); $c_0^{(i)} = \sqrt{E^{(i)} / [\rho_0^{(i)} (1 - \mu_0^{(i)2})]}$ — скорость звука в материале оболочки.

С учетом (3), (4) уравнения для описания динамики геометрически нелинейных оболочек записываются в виде [9, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\} - \\ - \frac{4}{3} \frac{m^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - (1 + \mu_0^{(i)}) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \mu_0^{(i)} \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\rangle - \\ & - \frac{4}{3} \frac{m^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \frac{1}{R^{(i)}} \left[\mu_0^{(i)} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - (1+\mu_0^{(i)}) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \right] + \\ & + \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_g^{(i)} \frac{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \sqrt{\frac{E^{(i)}}{\rho_0^{(i)}(1-\mu_0^{(i)2})}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = q_n (-1)^{i-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_x^{(i)}, q_n$ — напряжения, действующие на оболочку со стороны находящейся между оболочками жидкости, приложенные к невозмущенной поверхности оболочки ($W^{(i)} \ll R^{(i)}$), которые определяются формулами

$$q_x^{(i)} = \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R^{(i)}}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R^{(i)}}. \quad (6)$$

Принимая за характерный линейный размер длину волны l и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного и того же материала (что позволяет опустить индекс (i) у величин $E, m, \rho_0, \mu_0, \varepsilon_g$), перейдем в уравнениях (5) к безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}}. \quad (7)$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} = O(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{u_m} = O(\varepsilon^{1/2}), \\ \frac{h_0^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon_g = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \frac{E}{m} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{l} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \frac{w_m}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи, заданный с точностью $o(1)$.

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные ξ и τ в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (9)$$

где c — безразмерная неизвестная скорость волны, τ — внутренняя переменная; зависимые переменные представим в виде разложения по малому параметру ε :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (10)$$

Подставляя (7)–(9) в уравнения (5), в нулевом приближении разложения по ε получим систему линейных уравнений, из которой следует

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \quad (11)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (12)$$

Из следующего приближения асимптотического разложения с учетом (11) и (12) находится система уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m \sqrt{1-\mu_0^2}}{l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \\ & - \frac{2m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \varepsilon_g \frac{R^{(i)} \mu_0^2}{l \varepsilon} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{2 \partial \xi^3} = \\ & = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{1}{2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \left[q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

При отсутствии жидкости правая часть уравнений (13) равняется нулю, и система распадается на два одинаковых уравнения, представляющих модифицированные уравнения Кортевега-де Вриза–Бюргера для $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi = w_m^l u_{30}^{(i)} / (\mu_0 u_m R^{(i)})$.

Для определения правой части уравнения (13) введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, & V_x &= w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, & r^* &= \frac{r-R_2}{\delta}, & t^* &= \frac{c_0}{l} t, & x^* &= \frac{c_0}{l} x, & p &= \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P; \\ \psi &= \frac{\delta}{R_2} = o(1), & \lambda &= \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = O\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), & \frac{\delta}{l} &= \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \frac{R_2}{l} \ll 1, & \psi &\ll 1, & \lambda &\ll 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложений по малому параметру λ (здесь и далее верхний индекс указывает на номер приближения):

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (15)$$

В нулевом приближении по ψ величина $\delta/l \approx 0$ (см. (14)). Тогда, считая $(\delta/l)(\delta c_0/v) \ll 1$, имеем ползущие течения [11, 12]), и в качестве нулевого приближения по λ получим уравнения гидродинамики, совпадающие с классическими уравнениями гидродинамической теории смазки

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (16)$$

и граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 1, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 0. \quad (17)$$

Из решения задачи (16), (17) следует:

$$\begin{aligned} P^0 &= 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \\ \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} &= 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} &= 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая переменные (9), (10) и найденные величины (11) и (12), из (18) получим

$$P^0 = 12 \sqrt{1-\mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi = 12 \mu_0 \sqrt{1-\mu_0^2} \frac{u_m}{w_m l} (R^{(1)} u_{10}^{(1)} - R^{(2)} u_{10}^{(2)}). \quad (19)$$

Далее, с принятой для ε , ψ , λ точностью из (6) найдем напряжения, действующие на оболочки со стороны жидкости

$$q_x^{(i)} = \left[\rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1,0}, \quad q_n = -\rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{l}{\delta} P^0 \quad (i=1,2),$$

и следовательно, выражение в правой части уравнения (13) преобразуется к виду:

$$(-1)^i 6\mu_0 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)} \delta c_0 \varepsilon} \frac{v}{\left(\frac{1}{2} + \mu_0 \frac{R^{(i)}}{\delta} \right)} \left[\frac{R^{(1)}}{\delta} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(2)}}{\delta} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right]. \quad (20)$$

Учитывая, что $1/2 \ll \mu_0 R^{(i)}/\delta$ (так как $\mu_0 R^{(i)}/\delta = O(\psi^{-1}) \gg 1$), можно отбросить первое слагаемое в круглых скобках. С принятой точностью по ψ , ε положим $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$, $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} = h_0$. Подставляя (20) в уравнение (13), окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \\ & - \frac{2m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\ & - \varepsilon_g \frac{R \mu_0^2}{l \varepsilon} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} + (-1)^{i-1} 6\mu_0 \left(\frac{1}{2} + \mu_0 \frac{R}{\delta} \right) \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \delta c_0 \varepsilon} \frac{v}{\left(\frac{R}{\delta} \right)} \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При отсутствии жидкости ($\rho = 0$) последнее слагаемое выпадает, и система уравнений превращается в независимые модифицированные уравнения Кортевега-де Вриза–Бюргерса для $\partial u_{10}^{(i)}/\partial \xi$, имеющие точное частное решение. Замены

$$\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = c_3 \varphi^{(i)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau, \quad (22)$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные коэффициенты, позволяют записать систему уравнений (21) в виде:

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} + 6\varphi^{(i)} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^3} - 6\sigma_1 (\varphi^{(i)})^2 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} - \sigma_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^2} + (-1)^{i-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = 0. \quad (23)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются из уравнения (21) при подстановке в него (22) и имеют вид

$$c_2 = 6\mu_0 \left(\frac{1}{2} + \mu_0 \frac{R}{\delta} \right) \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \delta c_0 \varepsilon} \frac{v}{\left(\frac{R}{\delta} \right)}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{1/3}, \quad c_3 = 6 \frac{c_2}{c_1} \frac{2l \varepsilon}{\sqrt{1-\mu_0^2} u_m}.$$

обозначения: $\frac{2m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1-\mu_0^2} \frac{c_3^2 c_1}{c_2} = 6\sigma_1$, $\varepsilon_g \frac{R \mu_0^2 c_1^2}{l \varepsilon} \frac{c_2}{c_2} = \sigma_2$. Если не учитывать рассеяние энергии в оболочках, то есть положить $\varepsilon_g = 0$ ($\sigma_2 = 0$), получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} + 6\varphi^{(i)} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^3} - 6\sigma_1 (\varphi^{(i)})^2 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} + (-1)^{i-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = 0 \quad (i=1,2). \quad (24)$$

Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейно вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе цилиндрических оболочках, без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью рассматривались ранее с позиции теории солитонов [13, 14]. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и проведения компьютерного моделирования процессов, происходящих в исследуемой системе.

Для оболочек, подчиняющихся гипотезе Кирхгофа–Лява, и при условии осевой симметрии задачи имеем следующие связи между компонентами деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, соответственно, в продольном

и окружном направлении по отношению к срединной поверхности цилиндрической оболочки, прогибами и перемещениями в продольном направлении [9, 10]:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y^{(i)} = -\frac{1}{R^{(i)}} W^{(i)} \quad (i = 1, 2), \quad (25)$$

где $R^{(i)}$ — радиус срединной поверхности соответствующей оболочки, z — текущее расстояние от нее. Зададим зависимости компонент напряжений σ_x , σ_y и деформаций в виде уравнений квадратичной теории вязкоупругости [15], полагающей линейную упругость объёмных деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_y^{(i)}) - \frac{E}{1+\mu_0} \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \left(1 + a (\varepsilon_u^{(i)})^2 \right) e_x^{(i)} d\tau, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_y^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)}) - \frac{E}{1+\mu_0} \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \left(1 + a \varepsilon (\varepsilon_u^{(i)})^2 \right) e_y^{(i)} d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь: E — модуль Юнга; μ_0 — коэффициент Пуассона материала оболочек (считаем материалы одинаковыми); t — время; α , β , a — вязкоупругие параметры материала; ε_u^2 — квадрат интенсивности деформаций; e_x , e_y — компоненты дивергента деформаций

$$(\varepsilon_u^{(i)})^2 = \frac{4}{3} \left((\varepsilon_x^{(i)})^2 + (\varepsilon_y^{(i)})^2 - \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_y^{(i)} \right) \quad e_x^{(i)} = \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(i)} - \frac{1}{3} \varepsilon_y^{(i)}, \quad e_y^{(i)} = \frac{2}{3} \varepsilon_y^{(i)} - \frac{1}{3} \varepsilon_x^{(i)}. \quad (27)$$

Разлагая функции $\left(1 + a (\varepsilon_u^{(i)})^2 \right) e_x^{(i)}$, $\left(1 + a (\varepsilon_u^{(i)})^2 \right) e_y^{(i)}$ из (26) в ряд Тейлора по степеням $(t - \tau)$ при условии $\beta t \gg 1$ и сохраняя два члена разложения, получим приближенные уравнения состояния оболочек [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_y^{(i)}) + P \left[\frac{2}{3} \varepsilon_x^{(i)} - \frac{1}{3} \varepsilon_y^{(i)} + a (\varepsilon_u^{(i)})^2 e_x^{(i)} \right], \\ \sigma_y^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_y^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)}) + P \left[\frac{2}{3} \varepsilon_y^{(i)} - \frac{1}{3} \varepsilon_x^{(i)} + a (\varepsilon_u^{(i)})^2 e_y^{(i)} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где введен оператор \bar{P} такой, что

$$\bar{P} f = \frac{E}{1+\mu_0} \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta} f \right).$$

По найденным напряжениям (28) вычислим усилия и моменты [10]

$$N_x = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_y dz, \quad M_x = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_y z dz \quad (29)$$

и подставим (28), (29) в систему уравнений динамики оболочек [10]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x^i, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) - \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -q_n (-1)^{i-1}. \quad (30)$$

Для исследования уравнений динамики вязкоупругих оболочек в (27)–(30) положим

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad a = O(\varepsilon^{-1}), \quad \frac{\alpha}{\beta} = O(1), \quad \frac{\alpha c_0}{\beta^2 l} = O(\varepsilon), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon). \quad (31)$$

Подставляя (7), (9), (10) в уравнения (27)–(30) с учетом оценок (31), получим нулевое приближение разложения по ε — линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m}{R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_1 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, \quad \mu_1 = \left(\mu_0 + \frac{1}{3}(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \right) / \left(1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (32)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = \left[1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \right] (1-\mu_1^2). \quad (33)$$

Из следующего приближения по ε , с учетом (32) и (33), находятся уравнения для определения $u_{10}^{(i)}$.

Учитывая результаты, полученные ранее для $q_x^{(i)}, q_n$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{c}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \mu_1^2 \frac{c}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \frac{2}{3} \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \frac{1+\mu_1^4 + (1+\mu_1)^4}{c} \times \\ \times \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l} (1-\mu_0)(1+\mu_1+\mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} + \\ + (-1)^{i-1} \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{\delta c_0 \varepsilon} 3\mu_1 \left(1 + 2\mu_1 \frac{R}{\delta} \right) \frac{R}{\delta} \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Легко видеть, что замена (22) позволяет записать систему уравнений (34) в виде

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} + 6\varphi^{(i)} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^3} - 6\sigma_1 (\varphi^{(i)})^2 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} - \sigma_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^2} + (-1)^{i-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = 0. \quad (35)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются по формулам:

$$c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{c \mu_1^2} \right]^{1/3}, \quad c_2 = \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{\delta c_0 \varepsilon} 3\mu_1 \left(1 + 2\mu_1 \frac{R}{\delta} \right) \frac{R}{\delta}, \quad c_3 = 6 \frac{c_2}{c_1} \frac{2l\varepsilon}{c u_m}.$$

Можно учесть, что $2\mu_1 \frac{R}{\delta} \gg 1$, и 1 отбросить. При этом вводятся обозначения

$$6\sigma_1 = \frac{c_3^2 c_1}{c_2} \frac{2}{3} \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \frac{1+\mu_1^4 + (1+\mu_1)^4}{c}, \quad \sigma_2 = c_1^2 \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1-\mu_0)(1+\mu_1+\mu_1^2).$$

Уравнение (35) полностью совпадает с уравнением (23), учитывающим конструкционное демпфирование материала оболочки. При описанном подходе нельзя полагать $\sigma_2 = 0$ ($\alpha = 0$), если сохраняется физическая нелинейность, и невозможно получить уравнения вида (24), так как в этом случае и $\sigma_1 = 0$.

При $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$ уравнение (35) распадается на два одинаковых уравнения, представляющие собой модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза–Бюргерса, имеющие точное решение

$$\varphi^{(i)} = \frac{3 - \sigma_2 \sqrt{\sigma_1} - 6k \sqrt{\sigma_1} \cdot \text{th} \left(kx + \left(2k^3 + \frac{\sigma_2^2 k}{6} - \frac{3}{2} \frac{k}{\sigma_1} \right) t \right)}{6\sigma_1}. \quad (39)$$

В работах [16–18] развит подход к построению разностных схем, основанный на использовании переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом получается

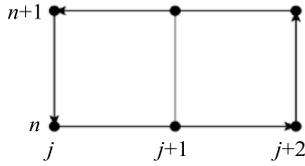


Рис. 1. Базовый контур для уравнения (40)

разностная схема метода конечных объемов, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

Для того чтобы воспользоваться предложенным подходом, запишем уравнение (35) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} -(3\varphi^{(i)2} - 2\sigma_1\varphi^{(i)3} + \varphi^{(i)}_{\eta\eta} - \sigma_2\varphi^{(i)}_{\eta})dt + \varphi^{(i)}d\eta + \iint_{\Omega} (-1)^{i-1}(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})dt d\eta = 0 \tag{40}$$

для любой области Ω с контуром $\partial\Omega$. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u^{(i)n}_j = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рисунке 1.

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{(i)}_t dt &= u^{(i)}(t_{n+1}, \eta) - u^{(i)}(t_n, \eta), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta &= u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta &= u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \end{aligned} \tag{41}$$

Используя для интегрирования по времени и четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (40), (41):

$$\begin{aligned} &\left(\left(3u^{(i)2n}_j + 3u^{(i)2n+1}_j - 3u^{(i)2n}_{j+2} - 3u^{(i)2n+1}_{j+2} \right) - \sigma_1 \left(2u^{(i)3n}_j + 2u^{(i)3n+1}_j - 2u^{(i)3n}_{j+2} - 2u^{(i)3n+1}_{j+2} \right) + \right. \\ &+ \left(u^{(i)n}_{\eta j} + u^{(i)n+1}_{\eta j} - u^{(i)n}_{\eta j+2} - u^{(i)n+1}_{\eta j+2} \right) - \sigma_2 \left(u^{(i)n}_{\eta j} + u^{(i)n+1}_{\eta j} - u^{(i)n}_{\eta j+2} - u^{(i)n+1}_{\eta j+2} \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ &+ \left(u^{(i)n+1}_{j+1} - u^{(i)n}_{j+1} \right) \cdot 2h + (-1)^{i-1} \left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n}_{j+1} \right) \cdot h\tau = 0, \\ &\left(u^{(i)n+1}_{t j} + u^{(i)n}_{t j} \right) \cdot \frac{\tau}{2} = u^{(i)n+1}_j - u^{(i)n}_j, \\ &\left(u^{(i)n}_{\eta j+1} + u^{(i)n}_{\eta j} \right) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j, \\ &u^{(i)n}_{\eta j+1} \cdot 2h = u^{(i)n}_{\eta j+2} - u^{(i)n}_{\eta j}. \end{aligned}$$

Вводя сеточные операторы сдвига θ_t , θ_{η} по переменным t , η , соответственно, запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned} &-(1 + \theta_t - \theta_{\eta}^2 - \theta_t \theta_{\eta}^2) \circ (3u^{(i)2} - \sigma_1 2u^{(i)2} + u^{(i)}_{\eta\eta} - \sigma_2 u^{(i)}_{\eta}) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ &+ (\theta_{\eta} \theta_t - \theta_{\eta}) \circ u^{(i)} \cdot 2h + (\theta_{\eta} \theta_t + \theta_{\eta}) \circ (-1)^{i-1} (u^{(1)} - u^{(2)}) \cdot h\tau = 0, \\ &(\theta_t + 1) \circ u^{(i)}_t \cdot \frac{\tau}{2} = (\theta_t - 1) \circ u^{(i)}, \\ &(\theta_{\eta} + 1) \circ u^{(i)}_{\eta} \cdot \frac{h}{2} = (\theta_{\eta} - 1) \circ u^{(i)}, \\ &\theta_{\eta} \circ u^{(i)}_{\eta\eta} \cdot 2h = (\theta_{\eta}^2 - 1) \circ u^{(i)}. \end{aligned}$$

Выбирая допустимый лексикографический порядок, проведём сортировку сначала по функциям $u_{\eta\eta} > u_{\eta} > u_t > u$, а затем по переменным $\theta_{\eta} > \theta_t$. Таким образом построим базис Грёбнера или

инволютивный базис [17]. В результате получим следующую разностную схему для уравнения (35), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\frac{u(i)_j^{n+1} - u(i)_j^n}{\tau} + 3 \frac{(u(i)_{j+1}^{2n+1} - u(i)_{j+1}^{2n+1}) + (u(i)_{j+1}^{2n} - u(i)_{j+1}^{2n})}{4h} - 2\sigma_2 \frac{(u(i)_{j+1}^{3n+1} - u(i)_{j+1}^{3n+1}) + (u(i)_{j+1}^{3n} - u(i)_{j+1}^{3n})}{4h} + \frac{(u(i)_{j+2}^{n+1} - 2u(i)_{j+1}^{n+1} + 2u(i)_{j-1}^{n+1} - u(i)_{j-2}^{n+1}) + (u(i)_{j+2}^n - 2u(i)_{j+1}^n + 2u(i)_{j-1}^n - u(i)_{j-2}^n)}{4h^3} - \sigma_2 \frac{(u(i)_{j+1}^{n+1} - 2u(i)_j^{n+1} + u(i)_{j-1}^{n+1}) + (u(i)_{j+1}^n - 2u(i)_j^n + u(i)_{j-1}^n)}{2h^2} + (-1)^{i-1} \frac{u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} - u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j+1}^{(2)n}}{2} = 0.$$

Результаты проведенного компьютерного моделирования описываемых уравнениями (35) волновых процессов, возникающих в соосных оболочках, содержащих в зазоре жидкость, представлены на рисунке 2 в виде графиков для безразмерных величин $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, определяющих продольную деформацию. Расчеты позволяют сделать следующие выводы:

– наличие жидкости между оболочками приводит к возникновению волны деформации не только во внешней оболочке, но и во внутренней, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю (Рис. 2, б);

– во внешней и внутренней оболочках устанавливается волна деформации с постоянной амплитудой, скоростью распространения и локальным всплеском на переднем фронте, что соответствует решению типа «уединенной волны», которое не описывается аналитически.

Проведенные исследования направлены на развитие математических моделей, адекватно описывающих реологические свойства крови, лимфы и других биологических жидкостей. Использование данных моделей, в свою очередь, позволит существенно расширить возможности анализа экспериментальных данных по кровотоку, лимфоток, пульсовым волнам и тому подобному, динамика которых носит существенно нелинейный характер, что имеет принципиальное значение для развития диагностических методов в современной медицине. Моделирование позволило выявить особенности поведения волн деформаций в геометрически и физически нелинейных вязкоупругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для системы двух нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка по пространственной переменной позволило получить результат расчета без вычислительных осцилляций (см. Рис. 2).

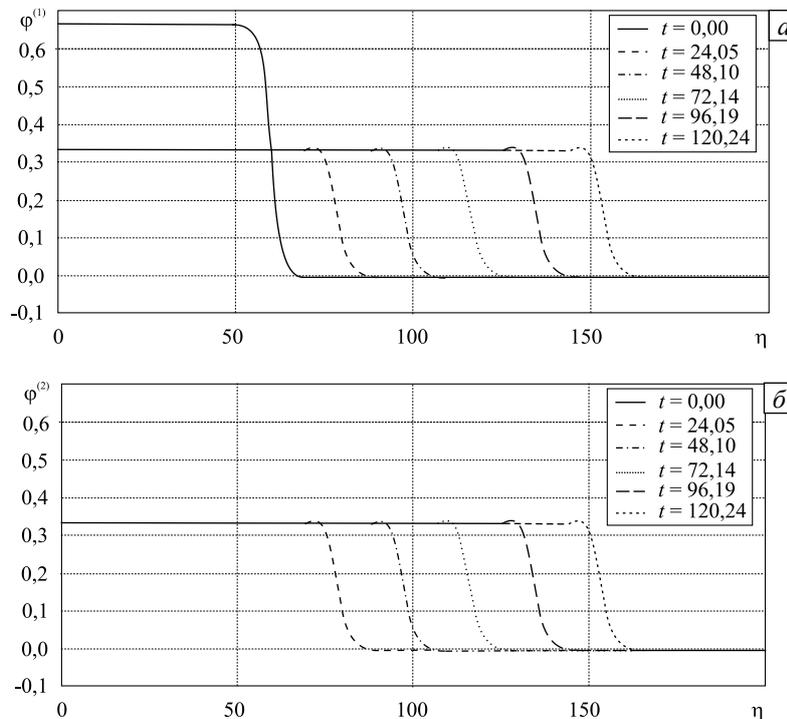


Рис. 2. График численного решения уравнения (35) с начальным условием (39) при $\sigma_1 = 1,0$, $\sigma_2 = 1,0$, $k = 1/3$ в различные моменты времени: $\varphi^{(1)}$ (а); $\varphi^{(2)}$ (б)

В результате возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, не имевшая место в начальный момент времени, и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать, при этом влияние жидкости постепенно исчезает. Совпадающие амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени, а форма волны сохраняется. Эту конструкцию можно толковать как трехслойный пакет, заполнителем которого является жидкость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00049-а) и гранта Президента РФ (проект МД-1025.2012.8).

Литература

1. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. Вузов. ПНД. – 1995. – Т. 3, № 1. – С. 52-58.
2. *Ерофеев В.И., Клоева Н.В.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. – 2002. – Т. 48, № 6. – С. 725-740.
3. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акустический журнал. – 2001. – Т. 47, № 3. – С. 359-363.
4. *Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журнал. – 2000. – Т. 46, № 1. – С. 116-117.
5. *Бочкарёв С.А.* Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 24-33. DOI
6. *Лекомцев С.В.* Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 233-243. DOI
7. *Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.* Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 94-102. DOI
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
9. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 778 с.
10. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
11. *Чивилихин С.А., Попов И.Ю., Гусаров В.В.* Динамика скручивания нанотрубок в вязкой жидкости // ДАН. – 2007. – Т. 412, № 2. – С. 201-203.
12. *Попов Ю.И., Розыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В.* Солитоны в стенке нанотрубки и стоксово течение в ней. // ПЖТФ. – 2010. – Т. 36, № 18. – С. 42-54.
13. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стеснённым вращением // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 67-75. DOI
14. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. – М.: Физматлит, 2009. – 318 с.
15. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. – М.: Наука, 1972. – 328 с.
16. *Блинков Ю.А., Мозжилкин В.В.* Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. – Т. 32, № 2. – С. 71-74. (Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Generation of difference schemes for the burgers equation by constructing Gröbner bases // Program. Comput. Soft+. – 2006. – V. 32, N. 2. – P. 114-117. DOI)
17. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V.* [Электронный ресурс] Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // SIGMA. – 2006. – V. 2. – 26 p. DOI
18. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A.* Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Lecture Notes in Computer Science. – 2009. – V. 5743. – P. 94-105. DOI

Поступила в редакцию 06.05.13; опубликована в электронном виде 15.10.13

Сведения об авторах

Блинкова Анастасия Юрьевна, асп., Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А. (СГТУ им. Гагарина Ю.А.), 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77; E-mail: anblinkova@yandex.ru

Блинков Юрий Анатольевич, дфмн, зав.каф., Саратовский государственный национальный исследовательский университет им. Н.Г. Чернышевского (СГНИУ им. Н.Г. Чернышевского), 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83; E-mail: blinkovua@info.sgu.ru

Могилевич Лев Ильич, дтн, проф., Поволжский филиал Московского государственного университета путей сообщения (Поволжский филиал МИИТ), 410790, Саратов, ул. Астраханская, д. 1а; E-mail: Mogilevich@sgu.ru

Bibliography

1. *Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I.* Nelineinye volny deformatsii v tsilindricheskikh obolochkakh // *Izv. Vuzov. PND.* – 1995. – T. 3, N. 1. – S. 52-58.
2. *Erofeev V.I., Klyueva N.V.* Solitony i nelineinye periodicheskie volny deformatsii v sterzhnyakh, plastinakh i obolochkakh (obzor) // *Akusticheskii zhurnal.* – 2002. – T. 48, N. 6. – S. 725-740.
3. *Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I.* Nelineinye volny v neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochkakh: novoe evolyutsionnoe uravnenie // *Akusticheskii zhurnal.* – 2001. – T. 47, N. 3. – S. 359-363.
4. *Arshinov G.A., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I.* Dvumernye uedinennye volny v nelineinoy vyazkouprugoi deformiruemoi srede // *Akusticheskii zhurnal.* – 2000. – T. 46, N. 1. – S. 116-117.
5. *Bochkarev S.A.* Sobstvennye kolebaniya vrashchayushchey krugovoi tsilindricheskoi obolochki s zhidkost'yu // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2010. – T. 3, N. 2. – S. 24-33. [DOI](#)
6. *Lekomtsev S.V.* Konechno-elementnye algoritmy rascheta sobstvennykh kolebaniy trekhmernykh obolochek // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2012. – T. 5, N. 2. – S. 233-243. [DOI](#)
7. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* Ustoichivost' koaksial'nykh tsilindricheskikh obolochek, sodержashchikh vrashchayushchiy potok zhidkosti // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2013. – T. 6, N. 1. – S. 94-102. [DOI](#)
8. *Loitsyanskii L.G.* Mekhanika zhidkosti i gaza. – M.: Drofa, 2003. – 840 s.
9. *Kauderer G.* Nelineinaya mekhanika. – M.: Izd-vo inostrannoy literatury, 1961. – 778 s.
10. *Vol'mir A.S.* Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti. – M.: Nauka, 1979. – 320 s.
11. *Chivilikhin S.A., Popov I.Yu., Gusarov V.V.* Dinamika skruchivaniya nanotrubok v vyazkoi zhidkosti // *DAN.* – 2007. – T. 412, N. 2. – S. 201-203.
12. *Popov Yu.I., Rozygina O.A., Chivilikhin S.A., Gusarov V.V.* Solitony v stenke nanotrubki i stoksovo techenie v nei. // *PZhTF.* – 2010. – T. 36, N. 18. – S. 42-54.
13. *Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Katson V.M., Sheshenin S.F.* Formirovanie solitonov deformatsii v kontinuumе Kossera so stesennym vrashcheniem // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2009. – T. 2, N. 4. – C. 67-75. [DOI](#)
14. *Bagdov A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V.* Lineinye i nelineinye volny v dispergiruyushchikh sploshnykh sredakh. – M.: Fizmatlit, 2009. – 318 s.
15. *Moskvitin V.V.* Soprotivlenie vyazko-uprugikh materialov. – M.: Nauka, 1972. – 328 s.
16. *Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V.* Generatsiya raznostnykh skhem dlya uravneniya Byurgersa postroeniem bazisov Grebnera // *Programmirovaniye.* 2006. – T. 32, N. 2. – S. 71-74. (*Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V.* Generation of difference schemes for the burgers equation by constructing Gröbner bases // *Program. Comput. Soft+.* – 2006. – V. 32, N. 2. – P. 114-117. [DOI](#))
17. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V.* [Elektronnyj resurs] Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // *SIGMA.* – 2006. – V. 2. – 26 p. [DOI](#)
18. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A.* Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations // *Computer Algebra in Scientific Computing. Lecture Notes in Computer Science.* – 2009. – V. 5743. – P. 94-105. [DOI](#)