

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.3.35](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.3.35)
УДК 539.3:532.73

ПАКЕТ «КОМПОЗИТ-2D» И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЕГО ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ РАЗЛИЧНЫХ АНСАМБЛЕЙ ВКЛЮЧЕНИЙ В ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОМПОЗИТАХ

С.Е. Евлампиева¹, Е.А. Паркаева², А.Л. Свистков¹

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

Разработанный авторами пакет программ «КОМПОЗИТ-2D» предназначен для исследования напряженно-деформированного состояния и определения эффективных свойств в композитах, содержащих сотни круглых включений (плоская задача). Для вычисления структурных напряжений и деформаций в любой точке рассматриваемого ансамбля включений используется теория функций комплексного переменного. Результаты расчета ансамбля с регулярными включениями на основе пакета сравниваются с численным решением, полученным при стандартной постановке для ячейки периодичности методом конечных элементов. Приведен пример вычисления зависимости эффективного модуля упругости от степени заполнения системы регулярными твердыми включениями.

Ключевые слова: композит, матрица, наполнитель, напряженно-деформированное состояние, макроскопические свойства, структура, плоская задача

SOFTWARE PACKAGE “COMPOSITE-2D” AND ITS USE FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE OF DIFFERENT ENSEMBLES OF INCLUSIONS IN ELASTOMERIC COMPOSITES AND THEIR EFFECTIVE PROPERTIES

S.E. Evlampieva¹, E.A. Parkaeva² and A.L. Svistkov¹

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

²Perm State National Research University, Perm, Russia

We have developed a software package “COMPOSITE-2D” for calculating the stress-strain state of elastomeric composites containing hundreds of spherical inclusions (plane problem) and their effective properties. Structural stresses and strains at any given point of the material are evaluated using the theory of functions of a complex variable. Comparison is made between the results of calculations for the ensemble of regular inclusions obtained by the software package “COMPOSITE-2D” and the numerical solution for the periodicity cell obtained by a standard formulation of the finite element method. An example of calculation of the relationship between the effective modulus of elasticity and the degree of reinforcement of the system by solid inclusions is presented.

Key words: composite, matrix, filler, stress-strain state, macroscopic properties, structure, plane problem

1. Введение

В работе обсуждается использование авторского программного пакета «КОМПОЗИТ-2D», созданного для анализа поведения ансамблей круглых включений в рамках двумерных задач теории упругости. Известно, что все эффекты, связанные с особенностями механического поведения ансамблей включений зернистого типа в трехмерных композитах, проявляются аналогичным образом в поведении ансамблей в двумерных случаях. Исследуемые величины качественно ведут себя точно так же, а вот их значения разнятся. Однако решать двумерные задачи намного проще, чем трехмерные. К тому же становится возможным исследовать поля напряжений с высокой точностью на сотнях включений и выяснить особенности влияния структуры на свойства композиционного материала, важные для понимания механизмов формирования макроскопического поведения композитов.

К настоящему времени в теории композиционных материалов оформилось несколько направлений вычисления НДС и определения эффективных свойств. Это — методы регуляризации [1–5]; методы самосогласования [6–12]; асимптотический метод осреднения [13] с использованием ячейки периодичности [14, 15] и применением принципа физической дискретизации [16, 17]; метод последовательных приближений в стохастической краевой задаче [18, 19] и другие. Каждое из направлений имеет свои преимущества, дает хорошие результаты для какого-то определенного класса материалов и оказывается неприемлемым для другого.

Получить точные результаты при определении механических свойств композита можно и на регулярной модели, но эта модель недостаточно адекватно отражает реальную случайную микроструктуру композита. Среди композиционных материалов значительное место занимают структурно-неоднородные материалы, содержащие включения, случайным образом расположенные в матрице. Для их исследования привлекаются статистические методы, основанные на применении теории

случайных функций [20]. Преимущество этих методов состоит в том, что они позволяют учитывать такие важные факторы реальной структуры композитов, как случайность взаимного расположения компонентов и разброс их свойств. Статистическая информация о структуре берется в виде многоточечных моментных функций, построенных по данным экспериментов на образцах композита или результатам расчета по модели со случайной структурой.

Для рассматриваемого в данной работе высоконаполненного композита с твердым наполнителем в виде хаотично расположенных включений разных размеров и мягким связующим наиболее подходящим методом исследования, по мнению авторов, представляется аналитический метод, основанный, в частности, на теории функций комплексного переменного [21]. Метод дает возможность не только рассчитать эффективные модули, но и установить особенности микроструктурных полей напряжений около частиц наполнителя в той или иной хаотической реализации небольшой области материала. Знание характера распределения напряжений необходимо для выявления причин и особенностей формирования локальных свойств неоднородной среды, специфики ее разрушения, формирования кластеров поврежденности, исследования локализации процесса потери устойчивости и другого.

С целью решения перечисленных задач в плоской деформации (при плоской деформации) был разработан алгоритм и на его основе подготовлен и протестирован пакет программ «КОМПОЗИТ-2D». Пакет может применяться к вычислению микронапряжений и микродеформаций, определению эффективных свойств различных хаотических структур и исследованию регулярных структур, сетчатых и регулярных агрегатов и структур с разными размерами частиц с использованием итерационного аналитического метода.

Для структуры, содержащей 91 регулярно расположенное круглое включение, окруженное материальным слоем, помещенное в бесконечную матрицу, нагруженную вдоль оси x единичным растягивающим усилием $P=1$ (см. Рис. 1), проведена проверка правильности расчета с помощью пакета «КОМПОЗИТ-2D». Полученное решение сравнивалось с решением, найденным методом конечных элементов на ячейке периодичности при стандартной постановке задачи для периодических структур. Вычисленные данные для ансамбля из регулярно расположенных включений (согласно пакету «КОМПОЗИТ-2D») и для ячейки периодичности (согласно методу конечных элементов) приведены на рисунке 2. Из рисунка видно, что полученные кривые эффективного модуля Юнга хорошо согласуются, тем самым подтверждается правильность заложенного в пакет подхода. Все величины напряжений, модулей упругости, коэффициента Пуассона, используемые далее, являются безразмерными; они делятся на модуль упругости матрицы, равный 1 МПа, а геометрические размеры и перемещения отнесены к радиусу включений, также равному единице.

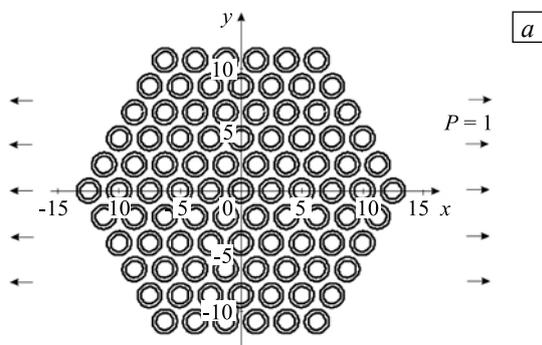


Рис. 1. Геометрия ансамбля включений и схема нагружения

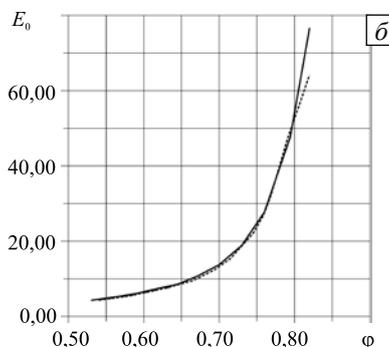


Рис. 2. Зависимость эффективного модуля Юнга E_0 от объемного наполнения ϕ для ансамбля включений в бесконечной матрице (сплошная линия) и на ячейке периодичности (штриховая линия)

В следующих разделах кратко описываются шаги, последовательно реализованные в пакете «КОМПОЗИТ-2D»:

- постановка задачи и краткое описание метода теории функций комплексного переменного;
- итерационный метод решения системы линейных уравнений;
- определение эффективных характеристик ансамбля включений (по реакции внешнего поля напряжений).

2. Постановка задачи

Рассмотрим N жестких включений разного размера, хаотично расположенных внутри упругой изотропной матрицы, на бесконечности подвергнутой растяжению в условиях плоской деформации. Включения скреплены с матрицей через упругий слой. На поверхностях раздела включение – слой, слой – матрица выполняется условие непрерывности перемещений и напряжений. Материал предполагается всюду несжимаемым.

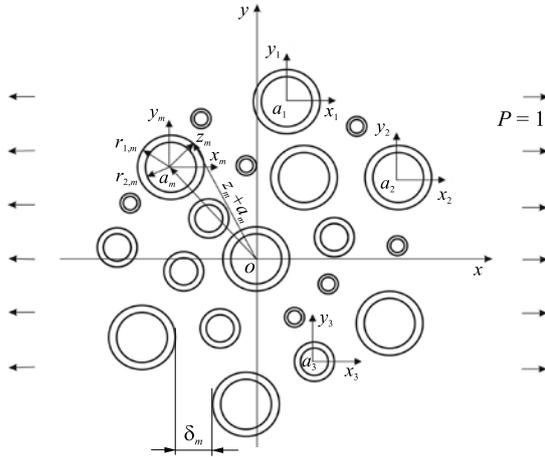


Рис. 3. Общий случай схемы нагружения и принятые обозначения

Принятые обозначения и схема нагружения приведены на рисунке 3, где $a_m = x_m + iy_m$ — координаты центра m -го включения на плоскости, r_{1m} — радиус слоя вокруг включения, r_{2m} — радиус включения, δ_m — зазор между включениями, P — нагрузка на бесконечности, направленная вдоль оси x . Требуется определить напряженно-деформированное состояние в любой точке матрицы.

Задача нахождения структурных напряжений и деформаций в многосвязных областях подробно представлена в работе [22]. Ее решение строится на основе теории функций комплексного переменного. Напряженное состояние в матрице с включениями находится в виде суммы однородного поля $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ и возмущений от каждого из включений $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \tau_{xy}^m$ ($m = 1, \dots, N$):

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sum_{m=1}^N \sigma_x^m, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sum_{m=1}^N \sigma_y^m, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \sum_{m=1}^N \tau_{xy}^m. \quad (1)$$

Искомые напряжения, входящие в каждую из сумм (1), и перемещения целесообразно выразить через соответствующие им аналитические комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ Н.И. Мусхелишвили [21]:

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z), \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига. В выражениях (2) надчеркиванием обозначены сопряженные комплексные величины, символом «'» — дифференцирование по комплексной переменной $z = x + iy$.

На границах слой – матрица, слой – включение требуется выполнение условий равенства перемещений и равенства нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned} u_0 + iv_0 &= u_1 + iv_1, & \sigma_{r_1} &= \sigma_{r_2}, & \tau_{r\theta_1} &= \tau_{r\theta_2}, \\ u_1 + iv_1 &= u_2 + iv_2, & \sigma_{r_1} &= \sigma_{r_0}, & \tau_{r\theta_1} &= \tau_{r\theta_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь: индексы 0, 1, и 2 указывают, соответственно, на принадлежность величины матрице, слою или включению; r, θ — полярные координаты, связанные с центром m -го включения.

Согласно принятой процедуре решения краевой задачи (3) вводятся комплексные потенциалы для матрицы, слоя вокруг m -го включения и самого m -го включения: $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1^m, \psi_1^m, \varphi_2^m, \psi_2^m$. С их учетом граничные условия (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} \kappa_0\varphi_0 - z_m\bar{\varphi}_0' - \bar{\psi}_0 &= \frac{\mu_0}{\mu_1} [\kappa_1\varphi_1^m - z_m\bar{\varphi}_1'^m - \bar{\psi}_1^m], \\ \kappa_1\varphi_1^m - z_m\bar{\varphi}_1'^m - \bar{\psi}_1^m &= \frac{\mu_1}{\mu_2} [\kappa_2\varphi_2^m - z_m\bar{\varphi}_2'^m - \bar{\psi}_2^m], \\ \varphi_0 + z_m\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0 &= \varphi_1^m + z_m\bar{\varphi}_1'^m + \bar{\psi}_1^m, \\ \varphi_1^m + z_m\bar{\varphi}_1'^m + \bar{\psi}_1^m &= \varphi_2^m - z_m\bar{\varphi}_2'^m - \bar{\psi}_2^m. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции представляются в виде рядов Лорана:

$$\begin{aligned}\varphi_0^m &= \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{k0}^m z_m^k, & \psi_0^m &= \sum_{k=-\infty}^{-1} B_{k0}^m z_m^k, \\ \varphi_1^m &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{k1}^m z_m^k, & \psi_1^m &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{k1}^m z_m^k, \\ \varphi_2^m &= \sum_{k=0}^{+\infty} A_{k2}^m z_m^k, & \psi_2^m &= \sum_{k=0}^{+\infty} B_{k2}^m z_m^k.\end{aligned}\quad (5)$$

Так как возмущения в матрице должны затухать на удалении от включения, то при описании возмущений в матрице от включений в (5) учитываются только отрицательные коэффициенты в функциях φ_0^m и ψ_0^m . Во включении и слое рассматриваются только положительные коэффициенты в функциях φ_1^m, ψ_1^m и φ_2^m, ψ_2^m , поскольку напряжения не могут принимать бесконечные значения.

В формуле (4) комплексные потенциалы в матрице φ_0, ψ_0 определяются в виде:

$$\varphi_0 = \varphi^0 + \sum_{l=1}^N \varphi_0^l z_l, \quad \psi_0 = \psi^0 + \sum_{l=1}^N \psi_0^l z_l, \quad (6)$$

где N — число включений, φ^0, ψ^0 — функции при однородном напряженном состоянии на бесконечности.

Рассмотрим m -е включение и перейдем во всех слагаемых выражений (6) к полярным координатам $z_m = r_m \ell^{i0}$. Подставляя (5) и преобразованные соотношения (6) в граничные условия (4) и приравнявая члены при одинаковых степенях ℓ^{i0} , получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{ki}^m и B_{ki}^m . Объединяя уравнения при $k = -n$ и $k = n + 2$ и обозначая $A_{Ni}^{*m} = A_{N-1, i}^m r_{1, m}^N$ ($i = 0, 1$), $A_{N_2}^{*m} = A_{N_2}^m r_{2, m}^N$, приходим к системе восьми линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения A_{ki}^{*m}, B_{ki}^{*m} . Подобная система 8 уравнений строится для каждого включения, входящего в ансамбль.

Решение полученной системы из $8N$ уравнений выполнить проще, если рассматривать каждые 8 уравнений как самостоятельную группу с известной правой частью и применять далее итерационную процедуру [23]. В ее основу положена идея последовательного нахождения возмущений от каждого из включений в предположении, что другие возмущения известны. Их конкретные значения берутся с ранее выполненного шага. После первого обхода всех включений совершается второй обход, третий и так далее. Процесс продолжается до момента, пока новый обход по включениям практически не будет приводить к изменению значений рассчитанных коэффициентов. Заключительным шагом процедуры является проверка точности решения путем непосредственного вычисления граничных условий. Невязка их удовлетворения характеризует точность полученного решения. Сведение решения бесконечной системы линейных уравнений к решению на каждом шаге систем 8-го порядка значительно экономит память и повышает скорость счета. После того как найдены коэффициенты A_{ki}^{*m}, B_{ki}^{*m} , на основании формул (5), (6) становятся известными функции φ_i^m и ψ_i^m ($i = 0, 1, 2$), через которые определяются напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{x,y}$ и перемещения u, v в любой точке бесконечной матрицы. Дальнейший интерес представляют средние (гидростатические) напряжения σ_{cp} и максимальные главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

3. Определение эффективного модуля ансамбля включений

Идея вычисления эффективных характеристик в ансамблях включений по реакции внешнего поля, предложенная В.В. Мошевым [24], оформилась в следующую последовательность действий:

- вначале решается краевая задача, в которой определяются напряжения и деформации в любой точке рассматриваемого ансамбля включений и вокруг него;
- затем отыскивается эффективный радиус и модуль некоторого однородного упругого включения, производящего в матрице поле напряжений, наиболее близкое к полю, образованному ансамблем включений.

Поле напряжений, образованное однородным упругим включением, описывается в полярных координатах r и θ формулами [21]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{P}{2} \left[1 - \frac{\gamma R^2}{r^2} + \left(1 - \frac{2\beta R^2}{r^2} - \frac{3\delta R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{2} \left[1 + \frac{\gamma R^2}{r^2} - \left(1 - \frac{3\delta R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{P}{2} \left(1 + \frac{\beta R^2}{r^2} + \frac{3\delta R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (7)$$

где R — радиус упругого включения; $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ — найденные из решения краевой задачи (4) напряжения; β, δ, γ — известные коэффициенты [21]. В случае упругого включения коэффициенты имеют вид: в матрице $\beta = -[2(\mu_0/\mu - 1)]/[(\mu_0\kappa/\mu + 1)]$, $\delta = (\mu_0/\mu - 1)/(\mu_0\kappa/\mu + 1)$, $\gamma = [(\kappa_0 - 1) - \mu_0(\kappa - 1)/\mu]/[2\mu_0/\mu + (\kappa_0 + 1)]$; во включении $\beta_0 = [\mu_0(\kappa + 1)/\mu]/[2\mu_0/\mu + (\kappa_0 - 1)]$, $\delta_0 = [\mu_0(\kappa + 1)/\mu]/[1 + \mu_0\kappa/\mu]$, $\gamma_0 = 0$, $\kappa_0 = 3 - 4\nu_0$, или, с учетом конкретных выражений для κ, μ, ν , $\beta = -[2(\mu_0/\mu - 1)]/(\mu_0/\mu + 1)$, $\delta = (\mu_0/\mu - 1)/(\mu_0/\mu + 1)$, $\beta = -2\delta$, $\gamma = 0$, $\mu_0/\mu = E_0/E$, где μ_0, E_0, ν_0 — эффективные характеристики упругого включения (модуль сдвига, модуль Юнга, коэффициент Пуассона); μ, E, ν — характеристики матрицы (модуль сдвига, модуль Юнга, коэффициент Пуассона).

Разрешив систему уравнений (7), получим эффективный модуль Юнга и эффективный радиус упругого включения, а эффективный коэффициент Пуассона должен равняться 0,5 по условию задачи. Если найденное значение коэффициента Пуассона отличается от 0,5, то необходимо решить задачу еще раз, добавив число членов ряда при решении краевой задачи.

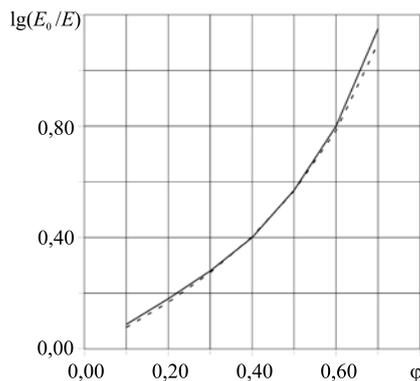


Рис. 4. Зависимость эффективного модуля Юнга от степени наполнения ϕ : полученная авторами (сплошная линия); вычисленная по эмпирической формуле Чонга (пунктирная линия)

Важное преимущество рассмотренного подхода заключается в том, что при реализации задачи для ансамбля из 91 включения не требуется хранить в машинной памяти массив коэффициентов матрицы системы линейных уравнений, так как все они определяются в момент, когда непосредственно нужны для осуществления вычислений. Итерационная процедура может расходиться при приближении включений друг к другу на расстояние, меньшее чем значение зазора $\delta_m = 0,05r_m$. Для меньших величин зазора требуется большее число итераций или большее число членов ряда (алгоритм становится неэффективным).

Для проверки предложенного подхода к расчету напряжений и деформаций и определению эффективных свойств рассмотрен пример регулярной структуры с треугольным расположением 91 жесткого включения. На рисунке 4 показана зависимость эффективного модуля Юнга от степени наполнения, построенная

по результатам вычислений авторов, и для сравнения приводится кривая при высокой степени наполнения, рассчитанная по эмпирической формуле, предложенной Чонгом в экспериментальной работе [25].

Эмпирическая формула Чонга в плоском варианте имеет вид: $E_0/E = [1 + 0,75(\phi/\phi_{\max})/(1 - \phi/\phi_{\max})]^2$, где $\phi_{\max} = 0,9069$ для треугольного (гексагонального) расположения включений. Из рисунка видно, что кривые совпадают, это говорит о достоверности расчетов с использованием пакета «КОМПОЗИТ-2D».

4. Структурные напряжения и деформации в ансамблях со случайным расположением включений

Рассмотрим ансамбль случайно расположенных жестких включений при 50%-ном наполнении, нагруженный на бесконечности единичным растягивающим вдоль оси x напряжением. На рисунке 5, а выделена область, в которой представлены поля средних гидростатических напряжений (Рис. 5, б) и максимальных главных деформаций (Рис. 5, в).

Из рисунка видно, что в ансамбле со случайным расположением включений максимальные по величине средние гидростатические напряжения сосредоточены в промежутках между близко расположенными включениями и составляют 4,15. На рисунке 5, в показаны поля распределения максимальных главных деформаций. Локальное максимальное значение главных деформаций равняется 3,85.

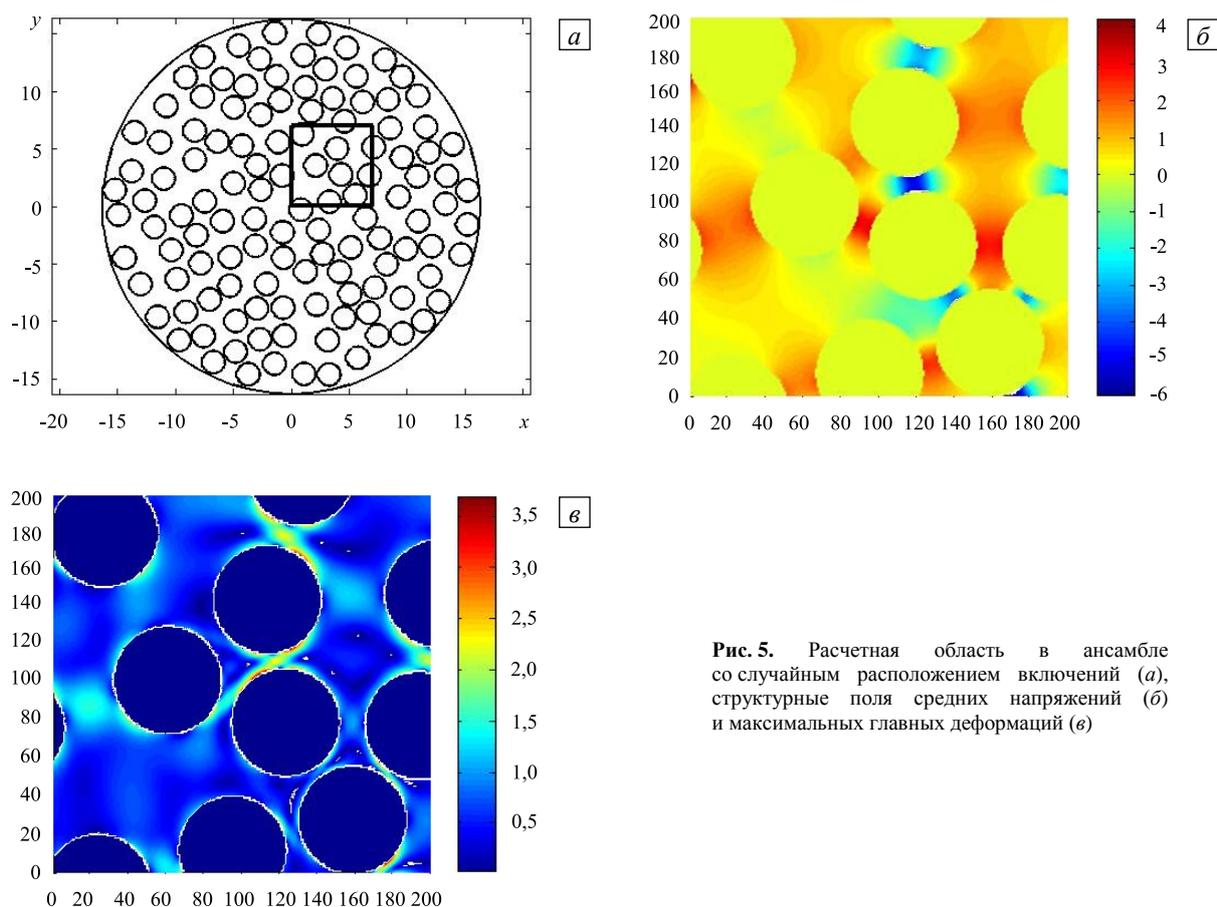


Рис. 5. Расчетная область в ансамбле со случайным расположением включений (а), структурные поля средних напряжений (б) и максимальных главных деформаций (в)

5. Реализация пакета

Разработанный пакет программ «КОМПОЗИТ-2D», предназначенный для расчета напряженно-деформированного состояния в различных ансамблях включений, позволяет получать результаты с высокой точностью. Обычно удовлетворение граничных условий для напряжений и перемещений осуществляется с невязкой на три порядка меньшей, чем значения напряжений и перемещений на границах слой – матрица. На границах включение – слой граничные условия выполняются точно (см. аналитическое решение (4)) и легко контролируются выводом на печать значений соответствующих величин. Время расчета НДС для ансамбля, состоящего из 121 включения, при задании на входе в вычислительный процесс 10 итераций и 40 членов каждого из рядов составляет несколько минут на персональном компьютере Intel(R) Core(TM) i5-2500 CPU, 3.30GHz (без построения изолиний).

Для реализации пакета был выбран объектно-ориентированный язык программирования высокого уровня C-Sharp. При изображении полей напряжений и деформаций в виде графиков изолиний используется пакет прикладных программ MatLab.

На этапе ввода осуществляется проверка корректности введенных значений (все поля ввода должны быть заполнены, значения должны иметь вещественный тип и тому подобное). Интерфейс приложения позволяет пользователю осуществлять ввод необходимой для расчета информации, отображать графики полей напряжений, деформаций, средних напряжений и максимальных главных деформаций, сохранять результаты вычислений и просматривать сохраненные результаты. Главное окно пакета программ «КОМПОЗИТ-2D» изображено на рисунке 6.

Пункт **Данные** дает пользователю возможность вводить всю необходимую информацию для формирования выходного файла, который будет участвовать в определении НДС и эффективных характеристик высоконаполненных эластомерных композитов с сильно выраженной механической неоднородностью.

Пункт **Тип расчета** предоставляет выбор типа численного расчета: вычисляются либо структурные напряжения и деформации в ансамбле включений, либо эффективные характеристики.

Пункт **Результаты** делает возможным просмотр на экране монитора найденных значений эффективных характеристик для ансамбля включений или поля напряжений рассматриваемого ансамбля в виде линий постоянного уровня.

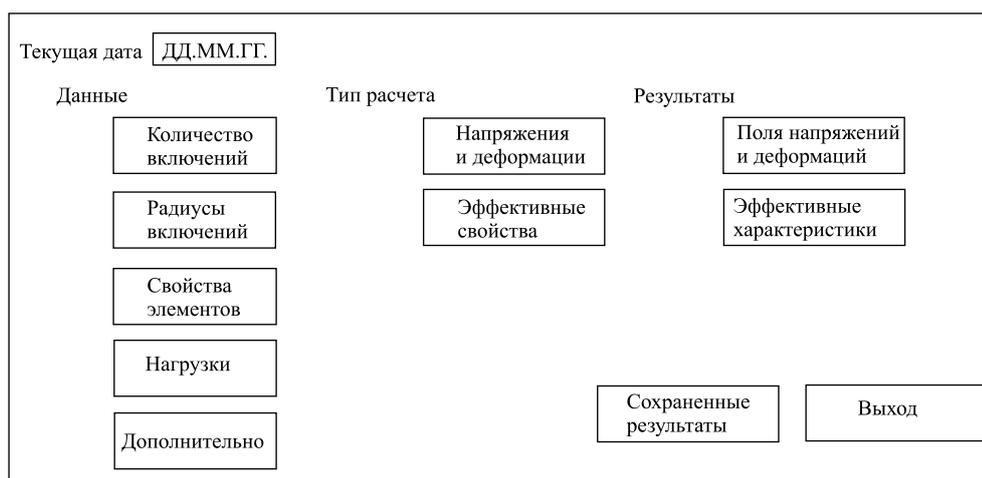


Рис. 6. Схема главного меню пакета

Полученные результаты сохраняются в виде:

- текстового файла, содержащего исходные данные и вычисленные значения эффективных характеристик;
- графических файлов с распределением напряжений, деформаций и полей максимальных главных деформаций и средних напряжений.

6. Заключение

Разработан и реализован на объектно-ориентированном языке C-Sharp пакет программ, предназначенный для исследования напряженно-деформированного состояния и определения эффективных свойств в эластомерных композитах с сильно выраженной механической неоднородностью.

Проведено сравнение результатов расчета варианта регулярной структуры с применением предложенного пакета «КОМПОЗИТ-2D» и по программе с использованием метода конечных элементов.

Получена зависимость эффективного модуля упругости от степени заполнения системы твердой фазой для регулярного ансамбля включений.

Представлены поля средних напряжений и максимальных главных деформаций для регулярной и хаотичной структур.

Авторы статьи выражают свою искреннюю благодарность Лебедеву С.Н. за оказанную помощь при получении решения на ячейке периодичности методом конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00740-а), и Министерства образования и науки Пермского края (соглашение № С-26/627).

Литература

1. Бахвалов Н.С. Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. – 1975. – Т. 225, № 2. – С. 249-252.
2. Григолюк Э.И., Фильштинский Э.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
3. Ванин Г.А. К основам теории композиционных материалов с упорядоченной структурой // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, № 3. – С. 9-18.
4. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.
5. Мольков В.А., Победра Б.Е. Эффективные характеристики однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой // МТТ. – 1985. – № 2. – С. 119-130.
6. Исупов Л.П. Вариант метода самосогласования для упругой композитной среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1985. – № 6. – С. 62-66.
7. Липатов Ю.С. Физическая химия наполненных полимеров. – М.: Химия, 1977. – 304 с.
8. Хилл Р. Новые доказательства некоторых экстремальных принципов теории упругости // Механика: Сб. перев. – М.: Мир, 1965. – Т. 90, № 2. – С. 130-136.
9. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
10. Сендецкий Дж. Механика композиционных материалов: Композиционные материалы: В 8 т. / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 564 с.
11. Паньков А.А. Методы самосогласования механики композитов. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 2008. – 253 с.
12. Паньков А.А. Обобщенный метод самосогласования для композитов со случайными упругими свойствами фаз составных или полых включений // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 3. – С. 310-332.

13. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
14. Kozhevnikova L.L., Moshev V.V., Rogovoy A.A. A continuum model for finite void growth around spherical inclusion // Int. J. Solids Struct. – 1993. – V. 30, N. 2. – P. 237-248. [DOI](#)
15. Moshev V.V., Kozhevnikova L.L. Structural cell of particulate elastomeric composites under extension and compression // Int. J. Solids Struct. – 2002. – V. 39, N. 2. – P. 449-465. [DOI](#)
16. Moshev V.V., Garishin O.C. Physical discretization approach to evaluation of elastic moduli of highly filled granular composites // Int. J. Solids Struct. – 1993. – V. 30, N. 17. – P. 2347-2355. [DOI](#)
17. Гаршин О.К. Механические свойства и разрушение дисперсно наполненных эластомеров. Структурное моделирование. – Germany, Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing (LAP), 2012. – 292 с.
18. Ташинов М.А., Вильдеман В.Э., Михайлова Н.В. Метод последовательных приближений в стохастической краевой задаче теории упругости структурно-неоднородных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 369-383.
19. Ташинов М.А., Михайлова Н.В. Многоточечные приближения высших порядков в краевой задаче упругости полидисперсных композитов со случайной структурой // Вестник ННГУ. – 2011. – № 4-4. – С. 1799-1800.
20. Иванов С.Г., Иванов Д.С. Влияние объемной доли волокон на статистические характеристики композитов случайной структуры // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 3. – С. 344-350.
21. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
22. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / Под ред. В.В. Мошева. – Екатеринбург, 1997. – 508 с.
23. Свистков А.Л., Гаршин О.К., Евлампиева С.Е., Лебедев С.Н. Итерационный метод расчета напряженно-деформированного состояния в ансамблях включений // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 2. – С. 17-28.
24. Евлампиева С.Е., Мошев В.В. Новый метод оценки эффективных свойств среды с хаотично расположенными включениями // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных материалов и конструкций. – Свердловск: Изд-во УрО РАН СССР, 1989. – С. 22-26.
25. Chong J.S., Christiansen E.B., Baer A.D. Rheology of concentrated suspensions // J. Appl. Polym. Sci. – 1971. – V. 15, N. 8. – P. 2007-2021. [DOI](#)

Поступила в редакцию 11.03.13; опубликована в электронном виде 15.10.13

Сведения об авторах

Евлампиева Светлана Евгеньевна, ктн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; E-mail: evl@icmm.ru

Паркаева Екатерина Александровна, студ., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; E-mail: parkaeva@mail.ru

Свистков Александр Львович, дфмн, зав.лаб., ИМСС УрО РАН; E-mail: svistkov@icmm.ru

Bibliography

1. *Bakhvalov N.S.* Osrednenie nelineinykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsientami // DAN SSSR. – 1975. – T. 225, N. 2. – S. 249-252.
2. *Grigolyuk E.I., Fil'shtinskii E.A.* Perforirovannye plastiny i obolochki. – M.: Nauka, 1970. – 556 s.
3. *Vanin G.A.* K osnovam teorii kompozitsionnykh materialov s uporyadochennoi strukturoi // Prikladnaya mekhanika. – 1983. – T. 19, N. 3. – S. 9-18.
4. *Kosmodamianskii A.S.* Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami, vrezami i vystupami. – Kiev: Vishcha shkola, 1975. – 227 s.
5. *Mol'kov V.A., Pobedrya B.E.* Effektivnye kharakteristiki odnonapravlennogo voloknistogo kompozita s periodicheskoi strukturoi // MTT. – 1985. – N. 2. – S. 119-130.
6. *Isupov L.P.* Variant metoda samosoglasovaniya dlya uprugoi kompozitnoi sredy // Vestn. MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika. – 1985. – N. 6. – S. 62-66.
7. *Lipatov Yu.S.* Fizicheskaya khimiya napolnennykh polimerov. – M.: Khimiya, 1977. – 304 s.
8. *Khill R.* Novye dokazatel'stva nekotorykh ekstremal'nykh printsipov teorii uprugosti // Mekhanika: Sb. perev. – M.: Mir, 1965. – T. 90, N. 2. – S. 130-136.
9. *Kristensen R.* Vvedenie v mekhaniku kompozitov. – M.: Mir, 1982. – 336 s.
10. *Sendetski Dzh.* Mekhanika kompozitsionnykh materialov: Kompozitsionnye materialy: V 8 t. / Pod red. L. Brautmana, R. Kroka. – M.: Mir, 1978. – T. 2. – 564 s.
11. *Pan'kov A.A.* Metody samosoglasovaniya mekhaniki kompozitov. – Perm': Izd-vo PGTU, 2008. – 253 s.
12. *Pan'kov A.A.* Obobshchennyi metod samosoglasovaniya dlya kompozitov so sluchainymi uprugimi svoystvami faz sostavnykh ili polykh vklyuchenii // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. – 2000. – T. 6, N. 3. – S. 310-332.
13. *Bakhvalov N.S., Panasenko G.P.* Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. – M.: Nauka, 1984. – 352 s.
14. *Kozhevnikova L.L., Moshev V.V., Rogovoy A.A.* A continuum model for finite void growth around spherical inclusion // Int. J. Solids Struct. – 1993. – V. 30, N. 2. – P. 237-248. [DOI](#)
15. *Moshev V.V., Kozhevnikova L.L.* Structural cell of particulate elastomeric composites under extension and compression // Int. J. Solids Struct. – 2002. – V. 39, N. 2. – P. 449-465. [DOI](#)
16. *Moshev V.V., Garishin O.C.* Physical discretization approach to evaluation of elastic moduli of highly filled granular composites // Int. J. Solids Struct. – 1993. – V. 30, N. 17. – P. 2347-2355. [DOI](#)
17. *Garishin O.K.* Mekhanicheskie svoystva i razrushenie dispersno napolnennykh elastomerov. Strukturnoe modelirovanie. – Germany, Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing (LAP), 2012. – 292 s.
18. *Tashkinov M.A., Vil'deman V.E., Mikhailova N.V.* Metod posledovatel'nykh priblizhenii v stokhasticheskoi kraevoi zadache teorii uprugosti strukturno-neodnorodnykh sred // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. – 2010. – T. 16, N. 3. – S. 369-383.
19. *Tashkinov M.A., Mikhailova N.V.* Mnogotochechnye priblizheniya vysshikh poryadkov v kraevoi zadache uprugosti polidispersnykh kompozitov so sluchainoi strukturoi // Vestnik NNGU. – 2011. – N. 4-4. – S. 1799-1800.
20. *Ivanov S.G., Ivanov D.S.* Vliyaniye ob'emnoi doli volokon na statisticheskie kharakteristiki kompozitov sluchainoi struktury // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. – 2002. – T. 8, N. 3. – S. 344-350.
21. *Muskhelishvili N.I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. – M.: Nauka, 1966. – 707 s.
22. Strukturnye mekhanizmy formirovaniya mekhanicheskikh svoystv zernistykh polimernykh kompozitov / Pod red. V.V. Mosheva. – Ekaterinburg, 1997. – 508 s.
23. *Svistkov A.L., Garishin O.K., Evlampieva S.E., Lebedev S.N.* Iteratsionnyi metod rascheta napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v ansambleyakh vklyuchenii // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. – 1999. – T. 5, N. 2. – S. 17-28.
24. *Evlampieva S.E., Moshev V.V.* Novyi metod otsenki effektivnykh svoystv sredy s khaotichno raspolozhennymi vklyucheniyami // Deformirovanie i razrushenie strukturno-neodnorodnykh materialov i konstruksii. – Sverdlovsk: Izd-vo UrO RAN SSSR, 1989. – S. 22-26.
25. *Chong J.S., Christiansen E.B., Baer A.D.* Rheology of concentrated suspensions // J. Appl. Polym. Sci. – 1971. – V. 15, N. 8. – P. 2007-2021. [DOI](#)