

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.3.30](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.3.30)
УДК 532.51

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОВЕДЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМЕЩЕННЫМ В НЕЕ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ

Д.В. Любимов¹, Т.П. Любимова², К.В. Пономарева^{1,2}, О.А. Хлыбов²

¹Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

В рамках осредненного подхода численно исследовано нестационарное поведение в невесомости стратифицированной жидкости с помещенным в нее твердым телом. Жидкость и тело находятся в замкнутой полости и испытывают высокочастотные поступательные вибрации. Показано, что система стремится к состоянию квазиравновесия, в котором поля градиента плотности жидкости и градиента пульсационной скорости подобны друг другу. Выяснено, что при наличии диффузии в зависимости от значений коэффициента диффузии вибрационного параметра возможны три различных режима установления квазиравновесия.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, высокочастотные вибрации, квазиравновесие, диффузия

NUMERICAL MODELING OF UNSTEADY BEHAVIOR OF STRATIFIED FLUID WITH IMMERSED SOLID INCLUSION IN A HIGH-FREQUENCY VIBRATIONAL FIELD

D.V. Lyubimov¹, T.P. Lyubimova², K.V. Ponomareva^{1,2} and O.A. Khlybov²

¹Perm State National Research University, Perm, Russia

²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

The unsteady behavior of a stratified fluid with an immersed solid inclusion in zero gravity conditions is studied numerically in the framework of average approach. The fluid and solid inclusion are in a closed cavity and subjected to high-frequency translational vibrations. It is shown that the system tends to the quasi-equilibrium state in which the fields of density gradient and pulsational velocity gradient are similar. It is found that in the presence of diffusion three different regimes of establishment of quasi-equilibrium are possible depending on the values of diffusion coefficient and vibrational parameter.

Key words: stratified fluid, high-frequency vibrations, quasi-equilibrium, diffusion

1. Введение

Известно, что вибрации оказывают значительное влияние на поведение гидродинамических систем. В частности, общее исследование течения жидкости в высокочастотном вибрационном поле проведено в [1]. Изучению воздействия высокочастотных вибраций на поведение однородной жидкости вблизи поверхности колеблющейся сферы посвящены работы [2, 3]. Пространственная неоднородность жидкости является дополнительным фактором, сказывающимся на характере течения вблизи колеблющихся поверхностей. В [4] анализируются осцилляции высокочастотных вибраций малой амплитуды в жидкости с переменными плотностью и вязкостью в зазоре между двумя вибрирующими твердыми плоскостями. Роль высокочастотных вибраций малой амплитуды в генерации течения неизотермической вязкой жидкости вблизи твердой колеблющейся сферы обсуждается в [5]. В статье [6] сформулирован вариационный принцип и на его основе записан функционал эффективной энергии. С помощью функционала показано, что при воздействии высокочастотных вибраций на неоднородную по плотности гидродинамическую систему последняя стремится к состоянию квазиравновесия, то есть к такому равновесию, в котором средняя скорость течения равняется нулю, а пульсационная скорость может быть ненулевой.

В настоящей работе осуществляется прямое численное моделирование поведения неоднородной по плотности системы при воздействии на нее высокочастотных вибраций. Моделирование состоит из двух частей. В первой части рассматривается перестройка поля плотности системы только за счет конвективного массопереноса, то есть не учитывается диффузия. Такая ситуация может реализоваться при добавлении в однородную жидкость некоторой примеси (пыли, взвешенных частиц) и выполнении условия, что диффузионные времена много больше вибрационных. Во второй части диффузия принимается во внимание.

Целью данной работы является, с одной стороны, верификация результатов, полученных в [6], на основании которых делается вывод о возможности достижения состояния квазиравновесия при возникновении и эволюции пульсационных и средних течений и полей плотности, а с другой — исследование влияния диффузии на поведение системы.

2. Постановка задачи: определяющие уравнения и граничные условия

Рассмотрим колеблющийся цилиндрический сосуд радиусом \bar{R} (Рис. 1), заполненный жидкостью, в который помещено цилиндрическое тело радиусом R (в дальнейшем «включение»). Система находится вне поля силы тяжести. В отсутствие вибраций цилиндры коаксиальны. Начальное распределение плотности жидкости выберем таким, чтобы ее градиент был перпендикулярен осям цилиндров. В начальный момент времени направления вибраций и градиента плотности совпадают. Предположим, что плотность материала включения велика по сравнению с максимальным значением плотности жидкости; в этом случае можно считать, что тело не меняет своего положения при воздействии вибраций, то есть оно считается неподвижным в лабораторной системе отсчета и совершает колебания относительно стенок сосуда.

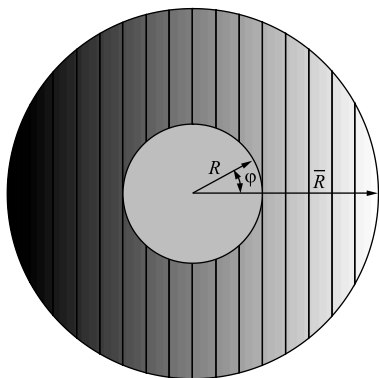


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области

Уравнения, описывающие эволюцию неоднородной по плотности изотермической жидкости под действием высокочастотных вибраций в отсутствие диффузии, в рамках осредненного подхода [6] имеют вид [6–8]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + E \nabla \rho &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: \mathbf{v} , ρ и p — средняя скорость течения, плотность, давление соответственно; η — динамическая вязкость; $E = V^2/2$ — пульсационная энергия; \mathbf{V} — пульсационная скорость, определяемая уравнениями

$$\operatorname{rot}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Слагаемое $E \nabla \rho$ в первом уравнении системы (1) представляет собой среднюю вибрационную силу. В настоящей работе исследуются осредненные течения, возникающие под действием этой силы.

Как известно, помимо объемного вибрационного механизма генерации течения, вблизи твердых колеблющихся поверхностей действует иной, погранслоный шликтинговский механизм зарождения средней завихренности. В исследуемой конфигурации соотношение влияния этих двух механизмов определяется выражением:

$$B / \operatorname{Re}_v = \omega R^2 / (2\nu) = \Omega / 2, \quad (3)$$

где B — безразмерный вибрационный параметр, Re_v — вибрационное число Рейнольдса, ω — частота вибраций, ν — кинематическая вязкость жидкости, Ω — безразмерная частота вибраций. Действие погранслоного механизма генерации течения становится заметным при $\Omega \rightarrow 1$. В то же время в значительном числе систем, представляющих практический интерес, выполняется соотношение $\Omega \gg 1$. Например, согласно (3), для слоя воды вблизи твердой сферы с $R = 1$ см, колеблющейся с частотой $\omega = 1$ Гц, безразмерная частота составляет $\Omega = 1200$. Таким образом, в работе сделано допущение о слабости шликтинговского механизма по сравнению с объемным; генерация средней завихренности в вязких пограничных слоях около твердых поверхностей не рассматривается.

Начальное распределение плотности примем в виде: $\rho(t=0) = \rho_0 - \alpha(r \cos \varphi + R)$, где ρ_0 — максимальное значение плотности, α — безразмерный параметр стратификации, r, φ — радиус и полярный угол цилиндрической системы координат.

Выберем следующие единицы измерения: для длины — радиус включения R ; для времени — R^2/ν ; для средней скорости — ν/R ; для амплитуды пульсационной скорости — $a\omega$ (a, ω — амплитуда и частота вибраций); для плотности — ρ_0 ; для давления — $\rho_0 \nu^2 / R^2$. В безразмерной форме система уравнений для средних полей и уравнения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + B E \nabla \rho &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\ \operatorname{rot}(\rho \mathbf{V}) &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $B = a^2 \omega^2 R^2 / (2v^2)$.

На поверхности включения для скорости среднего течения считаем выполненным условие прилипания, для амплитуды пульсационной скорости — условие непроницаемости. На внутренней поверхности внешнего цилиндра для скорости среднего течения также зададим условие прилипания, а амплитуда нормальной компоненты пульсационной скорости определяется законом вибраций. Таким образом, граничные условия для скоростей имеют вид:

$$\mathbf{v}|_{r=1} = 0, \quad \mathbf{v}|_{r=\Gamma} = 0, \quad V_n|_{r=1} = 0, \quad V_n|_{r=\Gamma} = \cos \varphi,$$

где $\Gamma = \bar{R}/R$ — безразмерный радиус полости.

При учете диффузии уравнение переноса принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{1}{Sc} \Delta \rho,$$

где $Sc = v/D^*$ — число Шмидта, D^* — коэффициент молекулярной диффузии. Остальные уравнения и граничные условия не меняются.

Введем функцию тока ψ , завихренность ϕ , момент импульса Ω среднего течения и функцию тока Ψ пульсационного течения: $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\psi \mathbf{k})$, $\mathbf{V} = \operatorname{rot}(\Psi \mathbf{k})$, $\phi = \operatorname{rot}_z \mathbf{v}$, $\Omega = \operatorname{rot}(\rho \mathbf{v})$, где \mathbf{k} — единичный вектор, направленный вдоль оси z . Уравнения, описывающие движение жидкости в терминах функций тока и завихренности, в отсутствие диффузии имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + B \cdot \frac{1}{r} J(\hat{E}, \rho) - \frac{1}{r} J(\psi, \Omega) &= \Delta \phi, & 1 \\ \Omega &= \nabla \rho \cdot \nabla \psi + \rho \phi, & 2 \\ \phi &= -\Delta \psi, & 3 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho &= 0, & 4 \\ \rho \Delta \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \rho &= 0, & 5 \\ \hat{E} &= \frac{1}{2} \left((\nabla \psi)^2 + (\nabla \Psi)^2 \right). & 6 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь обозначено: Ω — z -компонента момента импульса Ω ; $J(\cdot, \cdot)$ — якобиан по переменным r и φ .

При учете диффузии в системе меняется лишь уравнение (4₄), оно приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{1}{Sc} \Delta \rho.$$

2. Метод решения

Задача решалась численно, методом конечных разностей. Пространственные производные во внутренних узлах аппроксимировались центральными разностями, на границе — односторонними разностями, производная по времени в уравнении для Ω — разностью первого порядка. Уравнения для функций тока среднего и пульсационного течений решались методом последовательной верхней релаксации. Для вычисления плотности на новом временном слое по найденному полю средней скорости определялись координаты точки, из которой переместилась жидкая частица, и из которой, следовательно, должна быть перенесена информация с предыдущего временного слоя (см. [7]).

При учете диффузии иначе решалось лишь уравнение переноса. В этом случае производилось расщепление по физическим процессам: сначала тем же методом, что и в отсутствие диффузии, находилось решение однородного уравнения

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nu \nabla \rho' = 0,$$

затем находилось решение неоднородного уравнения с использованием уже найденной плотности ρ' :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{Sc} \Delta \rho'.$$

Величина ρ считалась искомым значением плотности на новом шаге по времени.

Расчеты проводились при фиксированных значениях безразмерного радиуса полости $\Gamma = 5$ и безразмерного параметра стратификации $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$, выбранного так, чтобы начальная неоднородность плотности была порядка 20%. Использовалась равномерная квадратная сетка с числом узлов 50×50 .

3. Численные результаты для задачи без учета диффузии

В состоянии квазиравновесия средняя скорость течения, в соответствии с [6], равняется нулю, а поля градиента пульсационной энергии и градиента плотности подобны. На рисунках 2, а–в изображены изолинии пульсационной энергии при $B = 1000$ в различные моменты времени (при дальнейшем увеличении времени ($t > 3$) пульсационное поле практически не меняется).

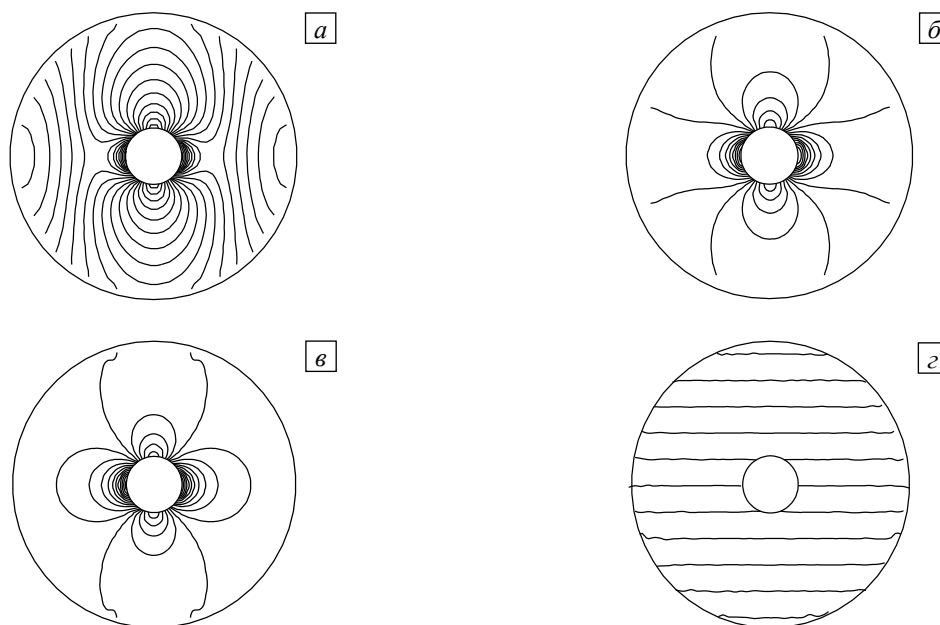


Рис. 2. Изолинии пульсационной энергии для случая $B = 1000$ в различные моменты времени t : 1 (а); 2 (б); 3 (в), и изолинии плотности при $t = 3$ (з)

При других значениях вибрационного параметра изолинии пульсационной энергии имеют такой же вид, отличается лишь скорость их изменения: чем больше параметр B , тем быстрее происходит перестройка. На рисунке 2, з изображено поле плотности при $t = 3$. Видно, что на малых временах оно остается таким же, как в начальном состоянии. Из сравнения рисунков 2, в и 2, з следует, что при $t = 3$ поле плотности не является подобным установившемуся полю пульсационной энергии, поэтому в системе должны возникнуть течения, перестраивающие поле плотности. Такие течения действительно наблюдаются (Рис. 3, б).

Отметим, что если бы включение отсутствовало, то в такой ситуации вибрации не вызвали бы никаких течений и распределение плотности жидкости осталось бы неизменным. При наличии включения индуцированные вибрациями течения не только перестраивают плотность, но и перестраиваются сами.

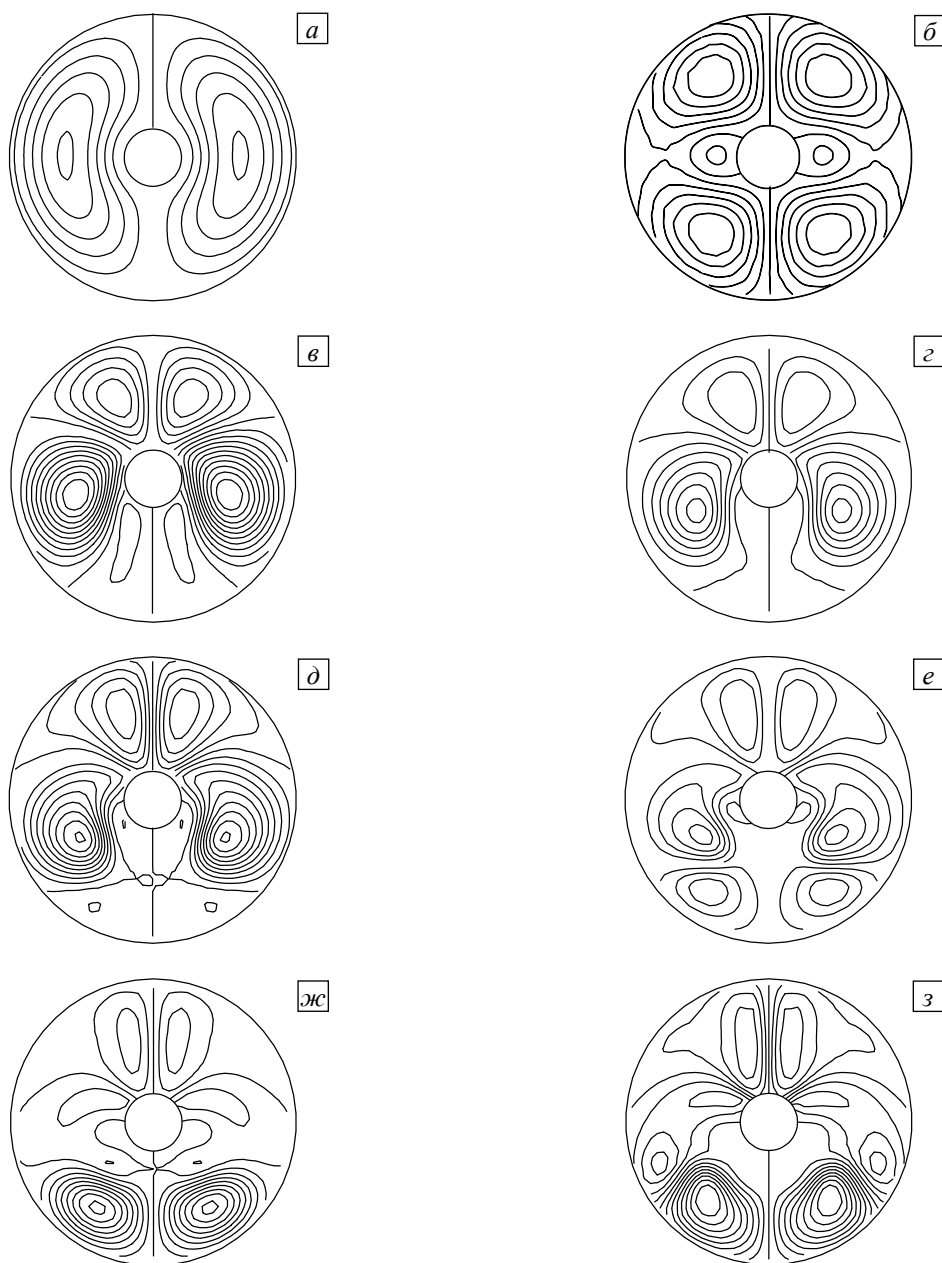


Рис. 3. Эволюция структуры среднего течения для случая $B=1000$ в различные моменты времени t : 1 (а); 3 (б); 5 (в); 100 (г); 150 (д); 200 (е); 300 (ж); 450 (з)

Как показали расчеты, действительно на временах до $t=3$ наблюдаются формирование и перестройка структуры среднего течения без перераспределения плотности; структура течения до некоторого момента времени остается постоянной и, наконец, при $t \approx 50$ вновь начинается перестраиваться. Максимальное по модулю значение функции тока сначала быстро нарастает, а затем так же быстро убывает, после чего это значение очень медленно уменьшается.

Перестройка поля плотности (Рис. 4) начинается значительно позже и происходит значительно медленнее, чем перестройка структуры среднего течения. Тем не менее можно заметить, что изолинии плотности, изгибаясь, стремятся стать подобными изолиниям пульсационной энергии (см. для сравнения Рис. 2, в и Рис. 4, г). Расчеты, проведенные при различных значениях вибрационного параметра, показали, что его изменение не затрагивает сценарий эволюции течения, но время до начала изменения плотности с увеличением B уменьшается.

Таким образом, расчеты, проведенные в пренебрежении диффузией, подтверждают выводы работы [6] о том, что система стремится к квазиравновесному состоянию, в котором среднее течение отсутствует, а поля плотности и пульсационной энергии подобны.

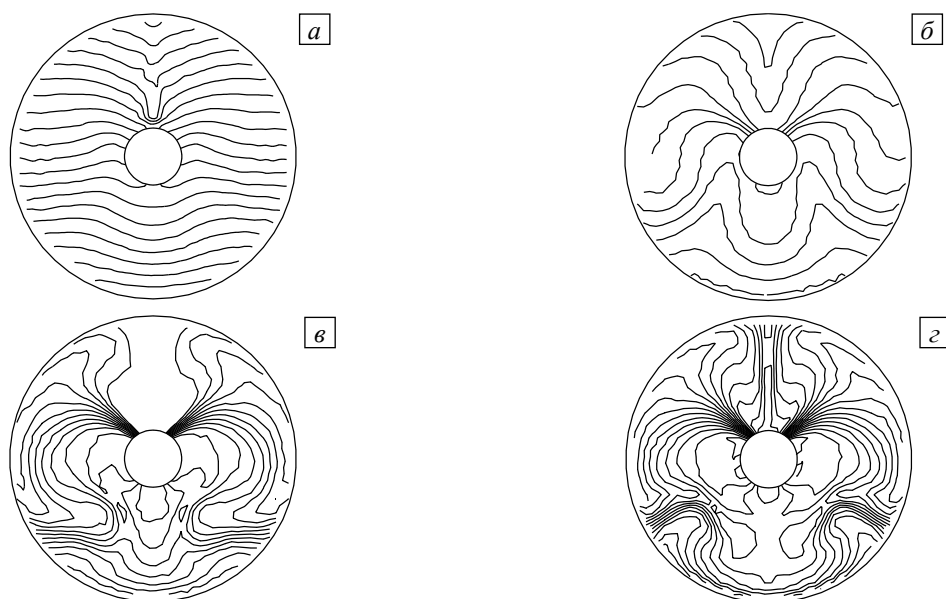


Рис. 4. Эволюция распределения плотности при $B=1000$ в различные моменты времени t : 15 (а); 50(б); 250 (в); 450 (г)

4. Численные результаты для задачи с учетом диффузии

Перейдем к обсуждению влияния диффузии. На рисунке 5 приведены зависимости от времени максимального по модулю значения функции тока среднего течения, полученные в численных расчетах с учетом диффузии при фиксированном значении числа Шмидта $Sc = (1/6) \cdot 10^5$ и различных величинах вибрационного параметра. Как видно, эволюция скорости во всех рассмотренных случаях качественно одинакова, однако при более интенсивных вибрациях она происходит быстрее.

С увеличением коэффициента диффузии характер эволюции качественно меняется, и при некотором значении Sc система приходит к состоянию квазиравновесия преимущественно за счет диффузии. На рисунке 6 представлены результаты расчетов для фиксированного значения вибрационного параметра $B=1000$ и различных величинах коэффициента диффузии. Видно, что при $Sc = (1/6) \cdot 10^1$ (кривая 1) скорость среднего течения уменьшается гораздо быстрее, чем при других значениях коэффициента диффузии. В этом случае эволюция определяется преимущественно диффузией: при таком большом значении коэффициента диффузии диффузионные времена настолько малы, что вследствие диффузии поле плотности выравнивается до того, как вибрационные силы станут достаточными для его перестройки. При $Sc = (1/6) \cdot 10^5$ (кривая 3) скорость среднего течения уменьшается гораздо медленнее, чем при $Sc = (1/6) \cdot 10^1$, эволюция в этом случае определяется преимущественно вибрациями: коэффициент диффузии слишком мал, и диффузия практически не оказывает влияния.

При $Sc = (1/6) \cdot 10^3$ (кривая 2) оба механизма — вибрационный и диффузионный, вносят одинаковый вклад. При этом они влияют на поле плотности каждый по-своему: диффузия стремится «выровнять» поле

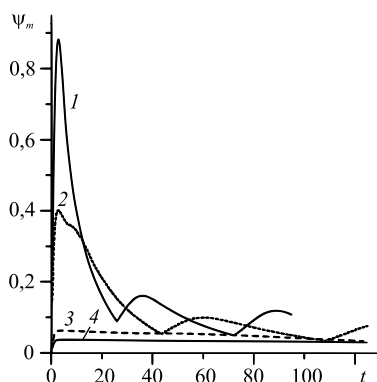


Рис. 5. Изменение во времени максимального по модулю значения функции тока среднего течения при $Sc = (1/6) \cdot 10^5$ и различных значениях вибрационного параметра B : 10000 (кривая 1); 6000 (2); 1000 (3); 600 (4)

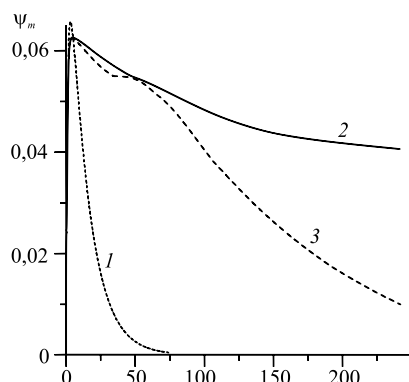


Рис. 6. Изменение максимального по модулю значения функции тока среднего течения при $B=1000$ и различных значениях числа Шмидта Sc : $(1/6) \cdot 10^1$ (кривая 1); $(1/6) \cdot 10^3$ (2); $(1/6) \cdot 10^5$ (3)

плотности, а вибрации — «изогнуть» изолинии плотности подобно изолиниям пульсационной энергии. Таким образом, диффузионный и вибрационный механизмы конкурируют в перестройке поля плотности, в результате процесс перестройки замедляется, функция тока скорости среднего течения уменьшается медленнее, чем при $Sc = (1/6) \cdot 10^5$.

Аналогичные расчеты были проведены при $B = 10000$ для различных значений коэффициента диффузии. Результаты этих расчетов показаны на рисунке 7. Как видно, и в этом случае можно выделить три режима установления квазиравновесия в системе: диффузионный при $Sc = (1/6) \cdot 10^1$; диффузионно-

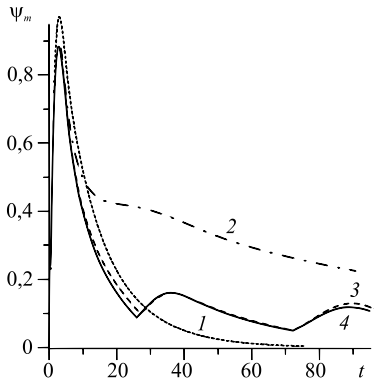


Рис. 7. Эволюция системы с вибрационным числом $B = 10000$ при различных значениях коэффициента диффузии Sc : $(1/6) \cdot 10^1$ (кривая 1); $(1/6) \cdot 10^2$ (2); $(1/6) \cdot 10^3$ (3); $(1/6) \cdot 10^5$ (4)

вибрационный при $Sc = (1/6) \cdot 10^2$; вибрационный при $Sc = (1/6) \cdot 10^3$ и $Sc = (1/6) \cdot 10^5$.

Сравнивая результаты, представленные на рисунках 6 и 7, можно заметить, что при $B = 1000$ и $Sc = (1/6) \cdot 10^3$ имеет место диффузионно-вибрационный режим (Рис. 6, кривая 2), а при $B = 10000$ и том же значении Sc — вибрационный (Рис. 7, кривая 2). Таким образом, для менее интенсивных вибраций переход от диффузионно-вибрационного к вибрационному режиму установления квазиравновесия в системе происходит при меньших значениях коэффициента диффузии.

Эволюция структуры течения и поля плотности при значении числа Шмидта $Sc = (1/6) \cdot 10^1$, то есть в случае, когда квазиравновесие в системе устанавливается преимущественно за счет диффузии, показана на рисунке 8.

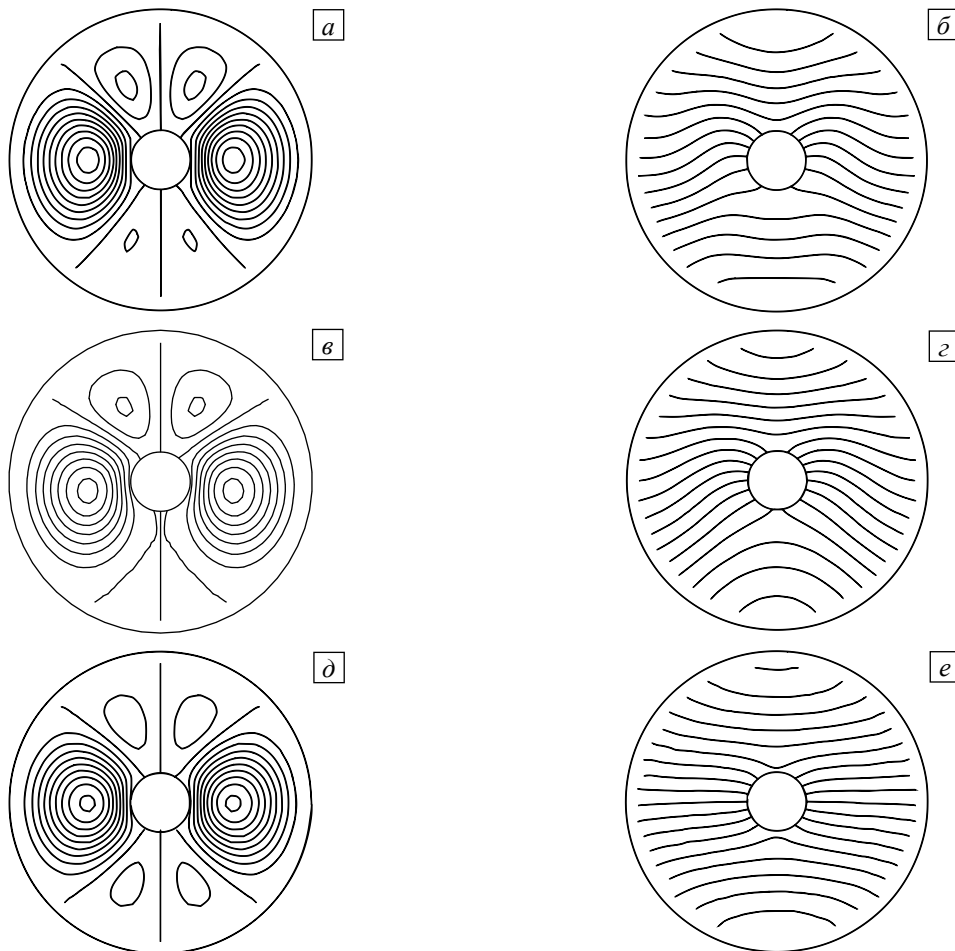


Рис. 8. Эволюции структуры течения (а, в, д) и распределения плотности (б, г, е) при $B = 10000$ и $Sc = (1/6) \cdot 10^1$ в различные моменты времени t : 3 (а, б); 14 (в, г); 54 (д, е)

На начальном этапе переходного процесса поля функции тока среднего течения при диффузионном режиме перестраиваются так же, как и при вибрационном режиме, однако к моменту времени $t \approx 50$ среднее течение становится настолько слабым, что дальнейших изменений полей практически не происходит. Таким образом, при диффузионном режиме структура течения и поле плотности перестраиваются качественно иначе, чем при двух других режимах.

5. Заключение

Проведено численное исследование поведения неоднородной по плотности жидкости с помещенным в нее твердым телом в замкнутой полости при наличии высокочастотных вибраций. Подтверждены выводы работы [6] о том, что такая система стремится к состоянию квазиравновесия, характеризуемому тем, что поля градиента плотности и градиента пульсационной скорости становятся подобными. Выяснено, что в зависимости от значения коэффициента диффузии можно различить три режима установления квазиравновесия в описанной системе. Получены картины, демонстрирующие эволюцию структуры течения и поля плотности в разных режимах; проведен их сравнительный анализ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00679).

Литература

1. *Lyubimov D.V.* Convective flows under the influence of high-frequency vibrations // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. – 1995. – V. 14, N. 4. – P. 439-458.
2. *Riley N.* On a sphere oscillating in a viscous fluid // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1966. – V. 19, N. 4. – P. 461-472. DOI
3. *Gopinath A.* Steady streaming due to small-amplitude torsional oscillations of a sphere in a viscous fluids // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1993. – V. 46, N. 3. – P. 501-520. DOI
4. *Dore B.D.* Oscillations in a non-homogeneous viscous fluid // *Tellus Series A*. – 1968. – V. 20, N. 4. – P. 514-523. DOI
5. *Любимова Т.П., Черепанова А.А.* Течения, индуцируемые колебаниями нагретой сферы // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74-82. DOI
6. *Cherepanov A.A., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Roux B.* Deformation of gas or drop inclusion in high frequency vibrational field // *Microgravity Quarterly*. – 1996. – V. 16, N. 2-3. – P. 69-73.
7. *Любимов Д.В., Любимова Т.П.* Об одном методе сквозного счета для решения задач с деформируемой поверхностью раздела // *Моделирование в механике*. – 1990. – Т. 4 (21), № 1. – С. 136-140.
8. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.

Поступила в редакцию 11.01.13; опубликована в электронном виде 15.10.13

Сведения об авторах

Любимов Дмитрий Викторович, дфмн, проф, зав.каф., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф, зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; E-mail: lubimova@psu.ru

Пономарева Ксения Викторовна, асп., ИМСС УрО РАН; E-mail: khlybov@psu.ru

Хлыбов Олег Анатольевич, мнс, ИМСС УрО РАН; E-mail: khlybov@psu.ru

Bibliography

1. *Lyubimov D.V.* Convective flows under the influence of high-frequency vibrations // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. – 1995. – V. 14, N. 4. – P. 439-458.
2. *Riley N.* On a sphere oscillating in a viscous fluid // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1966. – V. 19, N. 4. – P. 461-472. [DOI](#)
3. *Gopinath A.* Steady streaming due to small-amplitude torsional oscillations of a sphere in a viscous fluids // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1993. – V. 46, N. 3. – P. 501-520. [DOI](#)
4. *Dore B.D.* Oscillations in a non-homogeneous viscous fluid // *Tellus Series A*. – 1968. – V. 20, N. 4. – P. 514-523. [DOI](#)
5. *Lyubimova T.P., Cherepanova A.A.* Techeniya, indutsiruemye kolebaniyami nagretoi sfery // *Vychisl. mekh. splosh. sred.* – 2011. – T. 4, N. 3. – S. 74-82. [DOI](#)
6. *Cherepanov A.A., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Roux B.* Deformation of gas or drop inclusion in high frequency vibrational field // *Microgravity Quarterly*. – 1996. – V. 16, N. 2-3. – P. 69-73.
7. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P.* Ob odnom metode skvoznogo scheta dlya resheniya zadach s deformiruemoi poverkhnost'yu razdela // *Modelirovanie v mekhanike*. – 1990. – T. 4 (21), N. 1. – S. 136-140.
8. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A.* Dinamika poverkhnostei razdela v vibratsionnykh polyakh. – M.: Fizmatlit, 2003. – 216 s.